



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a_n)$  — арифм. прогрессия

$$a_3 = 5x + 3 \quad a_5 = (x^2 + 2x)^2 \quad a_7 = 3x^2$$

Пусть  $d$  — разность арифм. прогрессии  $(a_n)$ , тогда

$$\begin{cases} a_5 = a_3 + 2d \\ a_7 = a_3 + 6d \end{cases} \begin{cases} (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d \\ 3x^2 = 5x + 3 + 6d \end{cases} \quad ( : 3 )$$

$$\begin{cases} (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d \\ 2d = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ — корень} \quad (-1)^4 + 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 2 = \\ = 1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3} & x^3 + 3x^2 - 2 \\ \quad \underline{-3x^3 + 3x^2} & \quad \underline{-2x - 2} \\ \quad \quad \underline{-3x^3 + 3x^2} & \quad \quad \underline{-2x - 2} \\ \quad \quad \quad \underline{-2x - 2} & \quad \quad \quad 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ — корень}$$

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$$

~~$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 \\ \hline 2x^2 - 2 & \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \hline 2x^2 + 0x & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_4 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \quad x_5 = -1 + \sqrt{3}$$

Заметим, что  $d \neq 0$ .

$$2d = x^2 - x - 1 \text{ м.л.} \quad d = \frac{x^2 - x - 1}{2}$$

$$x^2 - x - 1 \neq 0$$

Случай:

~~$$x^2 - x - 1 = 0$$~~

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x \neq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ответ:  $-1; -1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |12-3y| \leq 3 \\ |13x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |12-3y|-3 \leq 0 \quad | \cdot (12-3y+3) > 0 \\ |13x-y|-1 \leq 0 \quad | \cdot (13x-y+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y-3)(12-3y+3) \leq 0 \\ (13x-y-1)(13x-y+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y)^2 - 9 \leq 0 \\ (13x-y)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y)^2 - 9 \leq 0 \\ (13x-y)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

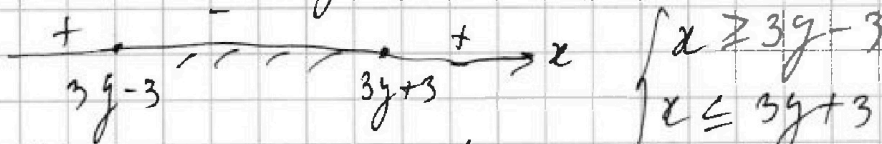
$$\begin{cases} (12-3y)^2 - 9 \leq 0 \\ (13x-y)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y-3)(x-3y+3) \leq 0 \quad (1) \\ (3x-y-1)(3x-y+1) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y-3)(x-3y+3) \leq 0 \quad (1) \\ (3x-y-1)(3x-y+1) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

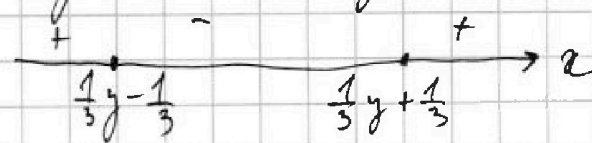
Ищем отрезок  $x$ :

1) Ищем:  $x = 3y + 3$ ,  $x = 3y - 3$



$$\begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ x \leq 3y + 3 \end{cases}$$

2) Ищем:  $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ ,  $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$



$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \cdot 3 \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \geq y - 1 \\ 3x \leq y + 1 \end{cases}$$

Ищем:

$$\begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\ x \leq 3y + 3 \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \max(3y - 3; \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}) \\ x \leq \min(3y + 3; \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}) \end{cases}$$

Но  $x$  минимально,  $y$  и  $x$  были как можно больше. Но для  $y$  больше  $x$  мы можем подобрать  $y$ , значит  $y$  трансформируется  $y$  и  $x$  нет минимума, значит.

Ответ: нет минимума.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем:

$$\begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 45q^2 \\ A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = \\ &= (m+n)(m+n-9) \\ B &= m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 13} \\ 25 \phantom{0} \\ \underline{5} \phantom{0} \\ 5 \phantom{0} \\ \underline{1} \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \quad (1) \\ mn(m+n-3) = 3 \cdot 5^2 q^2 \quad (1) \\ (m+n)(m+n-9) = 3 \cdot 5^2 q^2 \quad (2) \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \quad (2) \end{cases}$$

1) Заметим, что  $13p^2 > 0$  и  $m+n > 9$  тогда  $m+n-9 > 0$  м.е.  $m+n > 9$  (м.к.маи-нам)

Заметим, что  $m+n$  и  $m+n-9$  взаимно просты, тогда  $(m+n)(m+n-9)$  — четное. П.к.  $p$  — простое, то число  $13p^2$  может быть четным только, если  $p=2$ . Имеем:

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 2^2, \quad m+n > 9$$

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m+n = 13$$

$$\begin{cases} m+n = 26 \\ m+n-9 = 2 \end{cases} \quad \text{f}$$

$$\begin{cases} m+n = 52 \\ m+n-9 = 1 \end{cases} \quad \text{f}$$

2) Заметим, что если  $q \neq 2$ , то  $3 \cdot 5^2 q^2$  — нечетно, но если  $mn(m+n-3)$  — четно было четно. м.е.  $m$  — нечетно,  $n$  — четно,  $(m+n-3)$  — нечетно.  $(m+n-3)$  — нечетно, тогда при четном макс.  $m+n-3 > 0$ , м.е.  $m+n > 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если  $q \neq 2$ :  $m \cdot n / (m+n-3) = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$ ,  $m+n=13$   
 $10mn = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$  т.е.  $2 \cdot 5mn = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$  т.е.  
 $2mn = 3 \cdot 5 \cdot q^2$   
 Если  $q \neq 2$ , то  $3 \cdot 5q^2$  — нечетно, а  $2mn$  — четно, упрям  
 $q=2$

Если  $m \cdot n = 3 \cdot 5 \cdot 2$   
 $m+n=13$   
 $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m=5 \\ n=8 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m=15 \\ n=2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} m=6 \\ n=5 \end{cases}$   $m+n=11 \neq 13$  т.е.  $\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$   
 $m+n \neq 13$  т.е.  $\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$

2)  $m \cdot n / (m+n-3) = 6 / (m+n) \cdot (m+n-9) = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$

$(m+n)(m+n-9)$  — четно, упрям.  $q=2$

$(m+n)(m+n-9) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Зачем:  $m+n=x$

$x(x-9) = 300$

$x^2 - 9x - 300 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot (-300) = 81 + 1200 = 1281$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{1281}}{2}$ ,  $\sqrt{1281}$  — нецелое число т.е.

$x$  — нецелое число т.е.  $m+n$  — упрям —

не можем иметь т.е.  $m$  и  $n$  — натур. упрям.

$m \in \emptyset$  и  $n \in \emptyset$ , упрям  $(2) = (6) \cap (2) \neq m \in \emptyset$ ;  $1 \in \emptyset$ .

(1)  $\sqrt{2}$ :  $m=3, n=10$ ;  $m=2, n=11$ ;  $m=5, n=8$ ;  $m=10, n=3$ ;  
 $m=15, n=2$ ;  $m=6, n=5$   $m=3, n=10$ ;  $m=10, n=3$ .

Ответ:  $3$ ,  $n=3, n=10$ ;  $m=2, n=11$ ;  $m=5, n=8$ ;

$m=10, n=3$ ;  $m=15, n=2$

Ответ:  $m=3, n=10$ ;  $m=10, n=3$ .

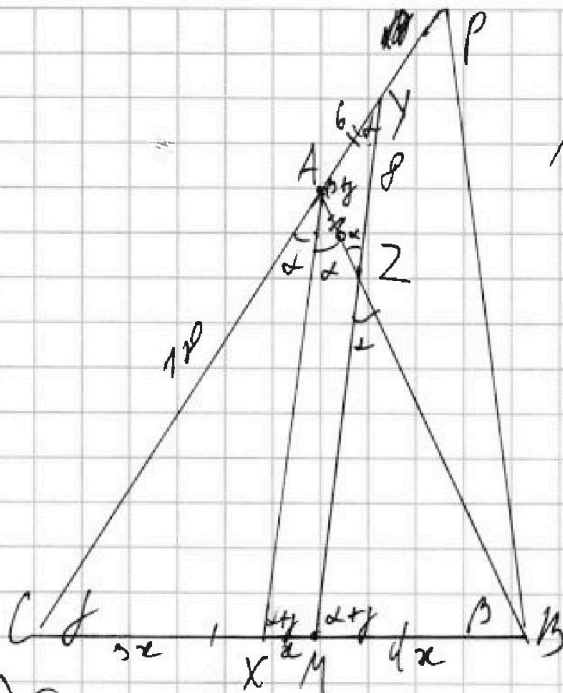


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AX$  — медиана;  
 $M$  — середина  $BC$ ;  $Y \in$  отрез.  $AC$ ;  
 $MY \parallel AX$ ;  $AX \cap MY = Z$ ;  
 $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .  
 Найти:  $BC$

Решение

1) Будем считать  $\angle FAX = \angle BAX = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$ ,  $\angle B = \beta$   
 $\angle AZY = \angle BAX = \alpha$  (как накрест лежащие при  $AX \parallel MY$ ).

В  $\triangle ABC$ :  $\angle BAC + \angle C + \angle B = 180^\circ$

$$2\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ.$$

$\angle BAY = \angle C + \angle B = \beta + \gamma$  — внешний угол  $\triangle ABC$ .

В  $\triangle AZY$ :  $\angle BAY + \angle CYM + \angle AZY = 180^\circ$

$\angle CYM = 180^\circ - \beta - \gamma - \alpha$   $\angle CYM = \angle FAX = \alpha$  (соответственные при  $AX \parallel MY$ ), значит  $\triangle AZY$  — равнобедренный, значит  $AZ = AY = 6$

2)  $AX \parallel MY$ , значит  $\frac{AY}{AC} = \frac{MY}{CX}$  (по т. Талеса)

$$\frac{MY}{CX} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \text{ Будем считать } MY = x, \text{ тогда } CX = 3x.$$

$$BM = CM = MX + CX = x + 3x = 4x \text{ (т.к. } M \text{ — серед. } BC)$$

3)  $AX$  — медиана  $\triangle ABC$ , значит  $\frac{AC}{AB} = \frac{4x}{3x}$   
 (по свойству медианы)  $AB = \frac{AC \cdot 3x}{4x} = \frac{18 \cdot 3x}{4x} = \frac{54 \cdot 3x}{4x} = \frac{162}{4} = 30.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) По т. косинусов в  $\triangle AZY$ :

$$\cos \angle ZAY = \frac{AZ^2 + AY^2 - YZ^2}{2AZ \cdot AY} = \frac{6^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

ср  $\angle BAC = 180^\circ - \angle ZAY$  (смежные)

$$\cos \angle BAC = \cos(180^\circ - \angle ZAY) = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

5) По т. косинусов в  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle BAC$$

$$(8x)^2 = 18^2 + 30^2 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9}$$

$$64x^2 = 324 + 900 + 1080 \cdot \frac{1}{9}$$

$$64x^2 = 1224 + 120$$

$$64x^2 = 1344$$

$$x^2 = 21 \quad x = \sqrt{21}$$

$$BC = 8x = 8\sqrt{21}$$

Ответ:  $8\sqrt{21}$ .





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зачем мы, что всего 3 строки и 9 столбцов  
узлов, т.е.  $9 \cdot 3 = 27$  — всего узлов.

Зачем мы, что если мы выбрали 2 белосе  
клетки, симметричные относительно центра сетки,  
то при повторении они образуют 2 новых раскраски,  
если все мы выбрали белые клетки, не симметрич.  
относительно центра, то они образуют 4 новых  
раскраски при повторении,  
 $81 - 27 = 54$  — узлов и учетом все симметр.

$$\frac{80}{2} = 40 \text{ — пар симметр. узлов}$$

$$\frac{40}{2} = 20 \text{ — раскраски будут образовывать симметр.}$$

Зачем мы, что если не раскраски 2 т.е. по 2 раскраски  
будут повторяться при повторении, т.е. способов выбрать пар  
узлов  $20 \cdot 2 = 40$  — пар узлов без повтор.

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = 190 \text{ — пар-во способов выбрать пару узлов.}$$

Зачем мы, что если раскраски не повторяются

$$\frac{80 \cdot 48}{2} = 40 \cdot 48 \text{ — пар-во способов выбрать}$$

с несимметр. узла. без учета центр. узла не счит.

$$\frac{40 \cdot 48}{4} = 20 \cdot 48 = 960 \text{ — способов выбрать 2 узла,}$$

чтобы картинка при повторении не повторялась  
без учета центр. узла.

$$80 \cdot 1 = 80 \text{ — способов выбрать пару с центр. узлом}$$

$$\frac{80}{4} = 20 \text{ — способов выбрать пару с центр.}$$

узлом, чтобы раскраски при повторении не  
повторялись

$$20 + 960 + 20 = 1000 \text{ — способов выбрать узла, чтобы учи-}$$

тывая, что при повторении

Ответ: 1000.

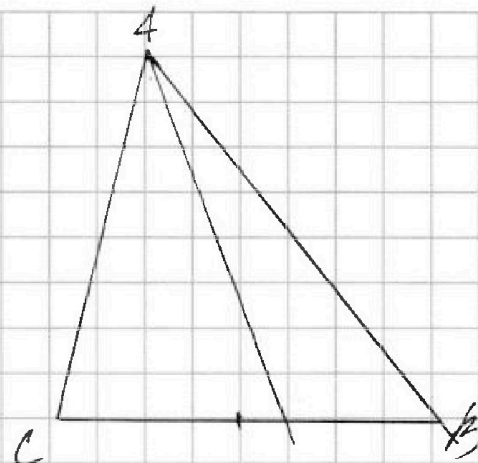
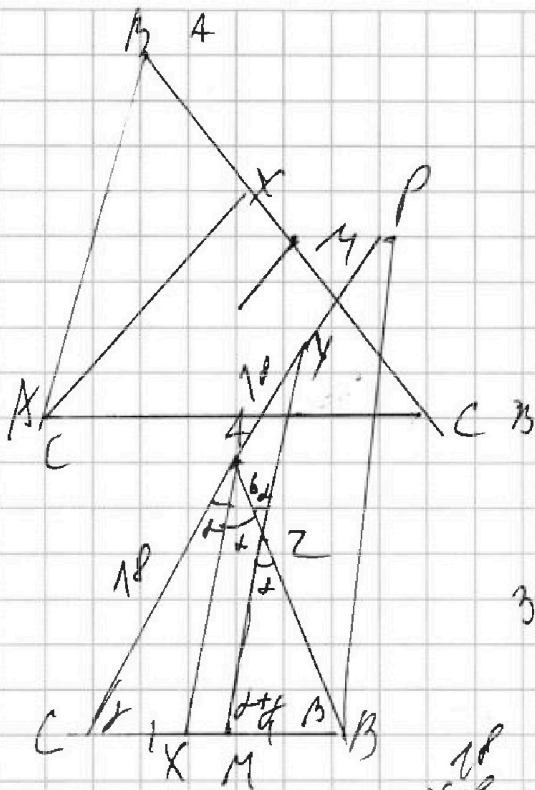


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$B + \gamma = 180^\circ - 2\alpha$$

$$36 + 36 = 72$$

$$72 - 64 = 8$$

$$18 \cdot 6 = 108$$

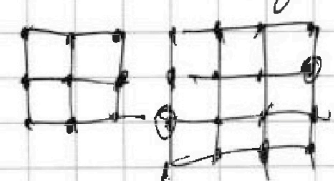
$$\begin{array}{r} 1349 \mid 64 \\ 128 \phantom{0} \\ \hline 64 \\ -64 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \mid 9 \\ -9 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array}$$

81

$2 \times 2 = 01 - 2 \times 2 = 0$        $\frac{8}{2} = 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Нум:  $x = 3y + 3$ ,  $x = 5y - 3$

$3y - 3$   $5y + 3$   
 $x \in [3y - 3; 5y + 3]$

$\max(4y + 8x) - 1$   
 $(y - 3x + 1)(y - 3x - 1)$   
 $y = 3x - 1$   $y = 5x + 1$

$\begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ x \leq 5y + 3 \end{cases}$

2) Нум:  $(x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3})$   $3y + 5 \geq 2$

$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ ,  $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$

$x \in [\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}; \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}]$

$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases}$

$2x \leq \frac{10}{3}y + \frac{10}{3}$   $| \cdot 3$

$4x \leq \frac{40}{3}y + \frac{40}{3}$

$4y + 8x \leq \frac{40}{3}y + \frac{40}{3}$   $= \frac{10}{3}y + \frac{40}{3}$

$\begin{cases} -x \geq -3y - 3 \\ 3x \geq y \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 3y + 3 \\ -3x \leq -y + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -x \geq -3y - 3 \\ 3x \geq y - 1 \end{cases}$

$-2x \leq 2y + 4$   $2x \geq -2y - 4$

$\begin{cases} 3y + 3 \geq x \\ 3x \geq y - 1 \end{cases}$

$3y + 3 + 3x \geq x + y - 1$   
 $x + y \geq -2$

$x \geq 3y - 3$   
 $-x \geq -3y - 3$

$\begin{cases} x_{\max}: x = 3y + 3 \\ x = \frac{10}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases}$

$4x \leq 24y - 24$

$\begin{cases} 4x \geq 4y - 4 \\ 4x \leq 4y + 4 \end{cases}$

$4y + 8y + 0 = 12y + 0$   
 $10$   
 $x_{\max}$

$x - y \geq -1$   
 $x - y \leq 1$

$\begin{cases} x \geq y - 1 \\ x \leq y + 1 \end{cases}$

$\begin{array}{r} 30 \\ \cdot 39 \\ \hline 351 \\ + 114 \\ \hline 1521 \end{array}$

$\begin{array}{r} 31 \\ \cdot 31 \\ \hline 93 \\ \hline 961 \end{array}$