



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z+4} = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

12 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть (b_n) - данная геом. прогрессия

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{25x-9(x-6)} \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_9 = x \cdot b_1 \cdot q^8 = x+3 \quad b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

ОДЗ: $\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 & \leftarrow \text{тогда выполняется } \frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \\ x-6 \neq 0 & x \neq 6 \end{cases}$

$$b_7 \cdot b_{15} = b_1^2 \cdot q^{20} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}} = \left| \frac{25x-9}{x-6} \right| = \frac{25x-9}{x-6}$$

$$\Rightarrow b_1 \cdot q^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = b_{11} \quad \text{но ОДЗ:}$$

$$b_7 \cdot b_{11} = b_1^2 \cdot q^{16} = (b_9)^2 \Rightarrow (b_9)^2 = \sqrt{(25x-9)^2} = |25x-9|$$

$$b_9 = \sqrt{|25x-9|}$$

при этом, $b_9 = x+3 \Rightarrow \sqrt{|25x-9|} = x+3$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 25x-9 = x^2+6x+9 \\ 25x-9 = -x^2-6x-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x-9 = x^2+6x+9 \\ 25x-9 = -x^2-6x-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-19x+18=0 \\ x^2+31x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \oplus \\ x=18 \oplus \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \oplus \\ x=-31 \ominus \end{cases} \text{, т.к. } x \geq -3$$

Проверка: $x=1$ $b_7=2$ $b_9=4$ $b_{15}=1$ $b_{11}=1$ $b_{15} = 108 \cdot \frac{1}{6\sqrt[6]{6}} = \frac{3}{6\sqrt[6]{6}}$

Проверка: $x=0$: $b_7 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ $b_9 = 3$ $b_{15} = \sqrt{\frac{-9}{-216}} = \frac{3}{6\sqrt[6]{6}}$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt[6]{6}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}; \quad b_1 \cdot q^8 = 3$$

$$q = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{6}} \quad b_1 \cdot \frac{1}{36} = 3 \Rightarrow b_1 = 108$$

$$b_{15} = 108 \cdot \frac{1}{(\sqrt[6]{6})^{14}} = 108 \cdot \frac{1}{6\sqrt[6]{6}} = \frac{3}{6\sqrt[6]{6}} \quad (+)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: $x=18$: $b_7 = \sqrt{(25-18-9) \cdot 12} = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$
 $b_9 = 21$

$$q^2 = \frac{b_9}{b_7} = \frac{21}{42\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$b_1 \cdot q^8 = 21$
 $b_1 \cdot \frac{1}{144} = 21$

$$b_{15} = 144 \cdot 21 \cdot \frac{1}{(\sqrt{12})^{14}} = \frac{144 \cdot 21}{144 \cdot 12 \cdot \sqrt{12}} = \frac{21}{24\sqrt{3}} \oplus$$

Ответ: $x=0$ и $x=18$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Рассмотрим $|y+4| + 4/|y-5| = \sqrt{81-z^2}$
 $\sqrt{81-z^2} \leq \sqrt{81} = 9$

$$|y+4| + 4/|y-5|$$

Т.к. $|y+4| \geq y+4$

$|y-5| \geq 5-y$, то $|y+4| + 4/|y-5| \geq y+4 + 20-4y = 24-3y$

По опрег
модуля
 $|x| \geq x$

Лев. часть $\geq 24-3y$; Прав. часть ≤ 9

$\Rightarrow 24-3y \leq 9$ (слага равенство
невероятно)
 $3y \geq 15$
 $y \geq 5$

Т.к. $|y+4| \geq y+4$

$|y-5| \geq y-5$, то $|y+4| + 4/|y-5| \geq 5y+4-20 = 5y-16$

А т.к. $y \geq 5$, то $5y-16 \geq 9$, а прав. ч. ≤ 9

\Rightarrow Равенство достигнуто, только если $\begin{cases} \sqrt{81-z^2} = 9 \\ 5y-16 = 9 \end{cases}$

Тогда ~~$|4| + 4/|0| = \sqrt{81}$~~
 $|9| + 4/|0| = \sqrt{81}$
 $9 = 9 \oplus$

$\begin{cases} z=0 \\ y=5 \end{cases}$

$\Rightarrow y=5, z=0$

Первое уравнение: $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

Обл: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x^2+4x-5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ x \in [-5, 1] \end{cases}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x^2+4x-5)}$
 $(x+5)(x-1)$
 $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 2\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4$

$x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x = 2\sqrt{(x+5)(1-x)}$ $= 4$

~~$4\sqrt{(x+5)(1-x)} = 10$ $\sqrt{(x+5)(1-x)} = \frac{5}{2}$~~

Перейдем к следствию и сделаем проверку:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возведем в квадрат: $x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x = 4(x+5)(1-x) - 16\sqrt{(x+5)(1-x)}$

$$14\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4(x+5)(1-x) + 10$$

$$3: \sqrt{(x+5)(1-x)} = t, t \geq 0$$

$$4t^2 - 14t + 10 = 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Вор. 3: } \begin{cases} \sqrt{(x+5)(1-x)} = 1 \\ \sqrt{(x+5)(1-x)} = \frac{5}{2} \end{cases} \begin{cases} 5 - 4x - x^2 = 1 \\ 5 - 4x - x^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + \frac{5}{4} = 0$$

$$(x+2)^2 = 8$$

$$(x+2)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} - 2 \\ x = -2\sqrt{2} - 2 \\ x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \\ x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \end{cases}$$

Проверка: ① $x = 2\sqrt{2} - 2$: $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}{20} - \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{20} = \frac{2\sqrt{1}}{20} \Rightarrow$ Верно.

② $x = -2\sqrt{2}$: $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{20} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{20} = \frac{2\sqrt{1}}{20} \Rightarrow$ Неверно.

③ $x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$: $\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{2}+3}}{20} - \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{4}-\frac{\sqrt{11}}{2}}}{20} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}}{20} \Rightarrow$ Верно.

④ $x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2$: $\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{2}+3}}{20} - \frac{\sqrt{3+\frac{\sqrt{11}}{2}}}{20} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}}{20} \Rightarrow$ Неверно.

Ответ: $(x; y; z): (2\sqrt{2}-2; 5; 0); (\frac{\sqrt{11}}{2}-2; 5; 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: (проверим, что возводим в квадрат, выражения будут одного знака, а так как это подкоренные ≥ 0)

① $x = 2\sqrt{2} - 2$: $\sqrt{2\sqrt{2} + 3} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{1} - 4 \Rightarrow$ Неверно.

> 0 < 0

② $x = -2\sqrt{2} - 2$: $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{1} - 4 \Rightarrow$ подходит.

$3 - 2\sqrt{2} > 0$ $3 + 2\sqrt{2} > 0$

т.к. $\sqrt{3} > \sqrt{2}$;

③ $x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$: $\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{2} + 3} - \sqrt{3 - \frac{\sqrt{11}}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow$ Верно (подходит)

> 0 > 0

$\frac{\sqrt{11}}{2} + 3 > 0$

$4 - \frac{\sqrt{11}}{2} > 0$, т.к. $9 > \frac{11}{4}$

④ ~~$x = -\frac{\sqrt{11}}{2} - 2$~~ : $\sqrt{-\frac{\sqrt{11}}{2} + 3} - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{11}}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow$ неверно.

< 0 > 0

\Rightarrow подходит: $\lambda = -2\sqrt{2} - 2$
 $\lambda = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2$

Ответ: $(x, y, z): (-2\sqrt{2} - 2, 5, 0); (\frac{\sqrt{11}}{2} - 2, 5, 0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$3: \cos x = t, \quad t \in [-1; 1]$$

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 6(2t^2 - 1) + 10$$

$$4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t - 12t^2 + 6 - 10 = 0 \quad | :4$$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

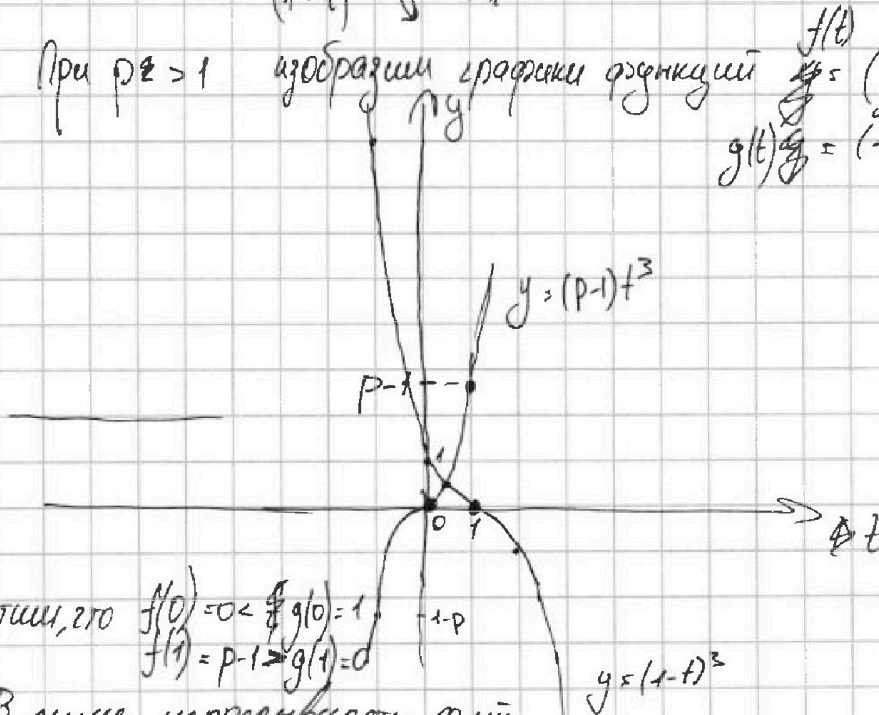
$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3$$

① $p=1: 0 = (1-t)^3 \Rightarrow t=1$

② $p > 1: \begin{matrix} (p-1)t^3 \uparrow \\ (1-t)^3 \downarrow \end{matrix} \neq \Rightarrow \text{не более 1 корня}$

При $p > 1$ изобразим графики функций $f(t) = (p-1)t^3$ и $g(t) = (1-t)^3$



Заметим, что $f(0) = 0 < g(0) = 1$,
 $f(1) = p-1 > g(1) = 0$

\Rightarrow В силу непрерывности ф-ий, на отрезке $t \in (0, 1)$ найдётся точка, в которой $f(t) = g(t)$ и при таком t сп-е $\cos x = t$ будет иметь решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

\Rightarrow при $p > 1$ ур-ие имеет хотя бы 1 решение.

Решим ур-ие
(У нас еще
маленько p).

$$(p-1)t^3 = (1-t)^3$$

или $t=0$: ~~$0=1$~~ $0=1 \ominus$
 $\Rightarrow t \neq 0$: $(p-1)t^3 = (1-t)^3 / : t^3 \neq 0$

$$p-1 = \left(\frac{1-t}{t}\right)^3$$

$$1-p = \left(\frac{t-1}{t}\right)^3$$

$$1-p = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$$

$$1 - \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt[3]{1-p} &\neq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} &\neq 1 \\ p &\neq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow При любых $p \neq 0$ ур-ие имеет корень $t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$

Исходная ур-ие будет иметь хотя бы 1 решение,
или $t \in [-1; 1]$, т.е. $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \in [-1; 1]$

Чтобы это выполнялось: $\begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \end{cases} \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ 1-p \geq 8 \end{cases} \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases} \Rightarrow \text{ур-ие имеет хотя бы 1 реш. при } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Эти решения задаются так: $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$;

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



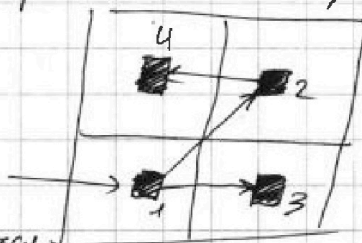
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

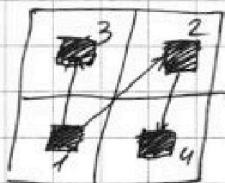
Рейсвитально, если есть симметрия А и В,
то клетка из одной



Пусть закрасим эту (1) клетку, тогда чтобы добиться симметрии А, нужно закрасить к. (2), а чтобы для этих двух добиться симметрии В, надо (1) отраз. в (3) (2) отраз. в (4) \Rightarrow получим 4 клетки, симметричные и по А, и по В, и по С.

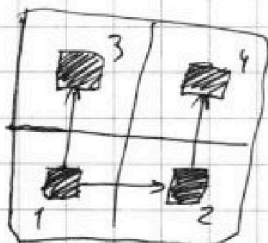
Аналогично

для А и С:



для А: 1 \rightarrow 2
для С: 2 \rightarrow 4
1 \rightarrow 3

для В и С:



для В: 1 \rightarrow 2
для С: 1 \rightarrow 3
2 \rightarrow 4

Если выполнены ~~статист~~ все симметрии (А, В и С), то и наоборот они выполнены.

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C)$$

Т.к. одна закр. клетка в одной "сетверти" ~~на~~ наименьшего прямоугольника (а он делится на четверти, т.к. $100 : 2 = 50$ и $100 : 2 = 50$) при таких условиях даёт ещё 3 клетки в остальных четвертих то ~~двух~~ кол-во способов так закрасить 8 клеток будет равно кол-ву способов выбрать 2 клетки из одной четверти т.е. $n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C) = C_{50}^2$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 3 \cdot C_{50000}^2 - 3 \cdot C_{10000}^2 + C_{10000}^2 = 3 \cdot C_{50000}^2 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{50000}^2 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть A - способы закрасить с симметрией относ. центра.

B - способы закрасить с симметрией относ. вертикал. ср. линии.

C - способы закрасить с симметрией относ. гориз. ср. линии.

Всего шток: $100 \cdot 400 = 40000$

$$\text{Тогда } n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$n(A)$: Закрасив 2×200 клеток на пары клеток, обладающие симметрией относ. центра

выберем одну клетку из каждой пары. Тогда, выбрав 4 клетки из 20000 (т.е. всего: ~~40000~~ 20000 клеток) произвольного шток, мы однозначно определим 4 пары клеток, необходимые для симметрии.

Тогда кол-во способов закрасить = кол-во способов выбрать 4 клетки из 20000: C_{20000}^4

$n(B)$: Заметим, что выбрав 4 закраски слева от вертикал. ср. линии, мы однозначно определим 4 закраски справа, симметричные закраскам слева. \Rightarrow Нужно выбрать 4 клетки слева, т.е. $n(B) = C_{20000}^4$ (т.е. из половины шток)

$n(C)$: Аналогично B , только выбираем 4 клетки из 20000 сверху от ср. линии: $n(C) = C_{20000}^4$

Заметим, что если выполнены ~~какая-то из этих двух симметрий~~, то выполнены все 3 (и наоборот). Действительно, если есть симметрия A и B , то

\Rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$a < b$

$(b-a) \nmid 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$, p - простое.

$a^2 + b = 710$.

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow (a-c)$ и $(b-c)$ - делители p^2 .
 \Rightarrow Все варианты: $\pm 1; \pm p; \pm p^2$
 (т.к. p - простое)

① $a-c=1$ $\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+p^2 \end{cases}$

② $a-c=p^2$ $\begin{cases} a=c+p^2 \\ b=c+1 \end{cases}$, но $p^2 \geq 4 \Rightarrow a > b$ \ominus

③ $a-c=-1$ $\begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases}$ $p^2 \geq 4 \Rightarrow a > b$ \ominus

④ $a-c=-p^2$ $\begin{cases} a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$

⑤ $a-c = b-c = p$
 ~~$b=c$~~ $a=b$ \ominus

⑥ $a-c = b-c = -p$
 $a=b$ \ominus

\Rightarrow Либо $\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+p^2 \end{cases}$
 $(b-a) = p^2 - 1 \nmid 3$

Либо $\begin{cases} a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$
 $(b-a) = 1 - p^2 \nmid 3$

$\Rightarrow p^2 - 1 \nmid 3$

Но по малой теореме Ферма

$p^2 \equiv 1 \pmod 3$, если $p \neq 3$
 $(p, 3) = 1$

\Rightarrow Это возможно только если $(p, 3) \neq 1$

$\Rightarrow p$ делит 3
 а т.к. p - простое, то единственно возможное $p=3$!

$p=3 \Rightarrow (b-a) = 8 \nmid 3$
 $b = a + 8$

Нам известно, что $a^2 + b = 710 \Rightarrow$

$a^2 + a + 8 = 710$
 $a^2 + a - 702 = 0$
 $\begin{cases} a = -27 \\ a = 26 \end{cases}$

~~$a^2 + (a+8)^2 = 710$~~
 ~~$2a^2 + 16a + 64 = 710$~~
 ~~$a^2 + 8a + 32 = 345$~~
 ~~$a^2 + 8a - 323 = 0$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a = -27$, то $b = -27 + 8 = -19$

и либо $c = a - 1 = -28$
либо $c = a + p^2 = -27 + 9 = -18$

Если $a = 26$, то $b = 26 + 8 = 34$

и либо $c = a - 1 = 25$
либо $c = a + p^2 = 26 + 9 = 35$

Ответ: $(-27; -19; -28); (-27; -19; -18);$
 $(26; 34; 25); (26; 34; 35)$

(где каковы-то пары (a, b) могут быть либо такие c , что $\begin{cases} a-c=1 \\ (a-b)/(b-c)=p^2=9 \end{cases}$ либо такое c , что $\begin{cases} a-c=-p^2=-9 \\ b-c=-1 \end{cases}$, чтобы условие на $(b-c)/(b-c)$ выполнялось, при этом остальные условия будут выполнены из-за того, как мы выбрали a и b .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y = 5 | z = 0$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$|9| + 4|0| = 9 \quad (+)$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 4$$

① $x = 2\sqrt{2} - 2$: $\sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{2}+3)(3-2\sqrt{2})}{9-8}} - 4$

$$\sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2$$

$$\frac{2\sqrt{2}+3 \sqrt{3+2\sqrt{2}} + 2\sqrt{1}}{2\sqrt{2}+3 - 2\sqrt{3-2\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+3) + 3-2\sqrt{2}} = 2-4$$

$$\frac{6-2 \cdot 1}{4}$$

$x = -2\sqrt{2} - 2$

$$\sqrt{-2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} + 4 = 2\sqrt{1}$$

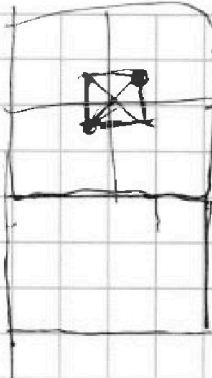


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

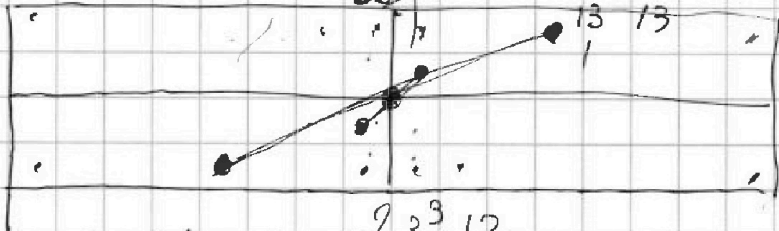


us

a^2

$$\begin{array}{r} 702 \mid 2 \\ 351 \quad 2 \\ 175 \quad 2 \\ 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 702 \mid 2 \\ 351 \quad 2 \\ 175 \quad 2 \\ 87 \quad 3 \\ 13 \quad 13 \end{array}$$

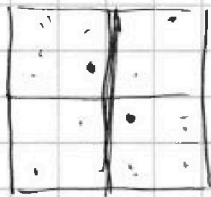


$$(a+27)(a-26) = a^2 + a - 902$$

$$100 \cdot 400 = 40000$$

$$C_{10000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - C_{10000}^2 - C_{10000}^2 - C_{10000}^2 + C_{10000}^2$$

$$= 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



$$C_{20000}^4 + C_{10000}^4$$

us

$$a^{p-1} = 1$$

$$a^2 \equiv 1$$

$$\begin{array}{l} a < b \\ (b-a) \mid 3 \\ (a-c) \mid (b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 710 \end{array}$$

- $\rightarrow a-c=1; b-c=p^2$
- ① $a=c+1; b=c+p^2$ (+), r.k.
 - ② $a-c=p^2; b-c=1$ (-)
 - ③ $a-c=-1; b-c=-p^2$
 - ④ $a-c=-p^2; b-c=-1$ (-)
 - ⑤ $a-c=-p^2; b=c-1$ (+)
 - ⑥ $a-c=b-c=p$
 $a=c+p; b=c+p$ (-) $a=b$
 - ⑦ $a-c=b-c=-p$
 $a=b$ (-)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $\&$ $7a_1: b_1 \cdot 9^6$ $15a_1: b_1 \cdot 9^{14}$
 $9a_1: b_1 \cdot 9^8$ \leftarrow $6a_1: \sqrt{x+3}$
 $x+3 \geq 0: x \geq -3$

$$\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = 9^2, \quad b_1 \cdot 9^{20} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}} = \frac{25x-9}{x-6}$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)} = x+3 \quad b_1 \cdot 9^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}$$

$$|25x-9| = x+3$$

$$b_1 \cdot 9^6 = 3\sqrt{6}$$

$$b_1 \cdot 9^8 = 3$$

$$\Rightarrow 9^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}; 9 = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$$

$$b_1 \cdot \frac{1}{36} = 3 \Rightarrow b_1 = 108$$

$$b_1 \cdot 9^{14} = 108 \cdot \frac{1}{6^3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6\sqrt{6}} =$$

$$\frac{25}{18}$$

$$\frac{200}{25} = 8$$

$$676 + 94 = 770$$

- ① $b-a = 8 \cdot 2; 1 \cdot 9 = 9$ \oplus
- ② $b-a = 8 \cdot 3; -1 \cdot (-9) = 9$
- ③ $b-a = 8 \cdot 3$

2. $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$
 $\sqrt{x+5} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} + \sqrt{1-x-4z}$

$$x+5+16 + 8\sqrt{x+5} = \sqrt{4(y-4x-x^2+z)} + 1-x-4z + 4\sqrt{(y-4x-x^2+z)(1-x-4z)}$$

$$x+21 + 8\sqrt{x+5} = 4y - 16x - 4x^2 + 4z + 1 - x - 4z + 4\sqrt{(y-4x-x^2+z)(1-x-4z)}$$

$$x+21 + 8\sqrt{x+5} = 4y - 17x - 4x^2 + 4\sqrt{y}$$

229
 $\frac{229}{189}$
 $\frac{54}{189}$
 $\frac{26^2 = 676}{26}$
 $\frac{26}{156}$
 $\frac{52}{156}$
 $\frac{156}{156}$



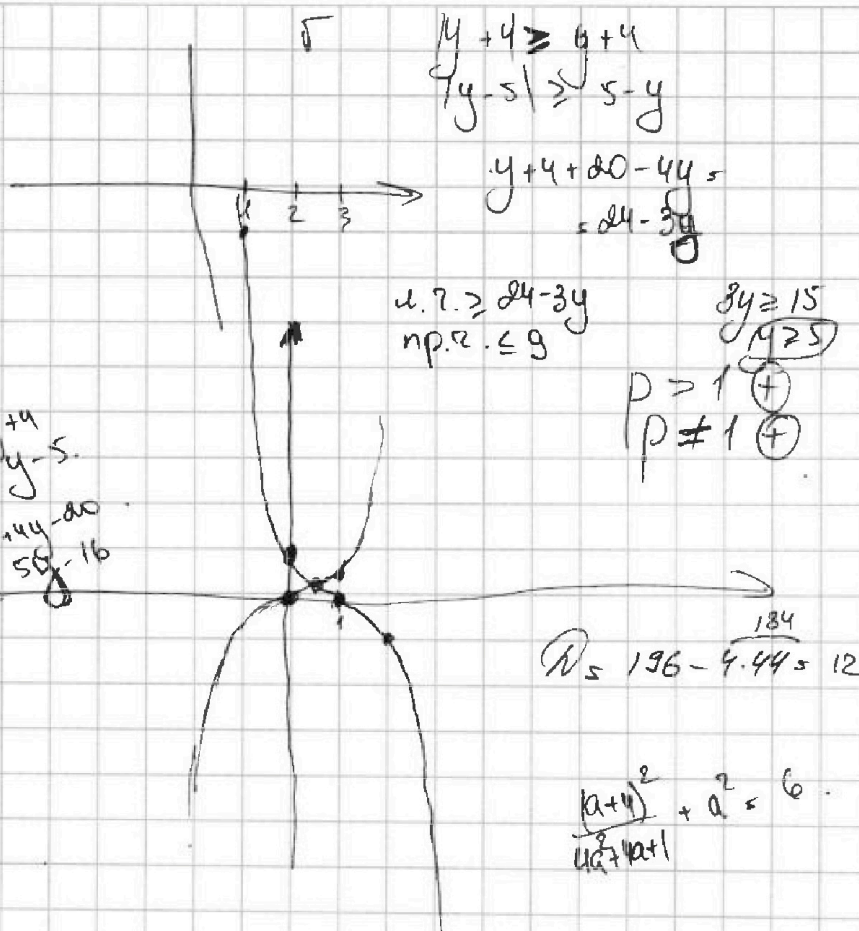
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

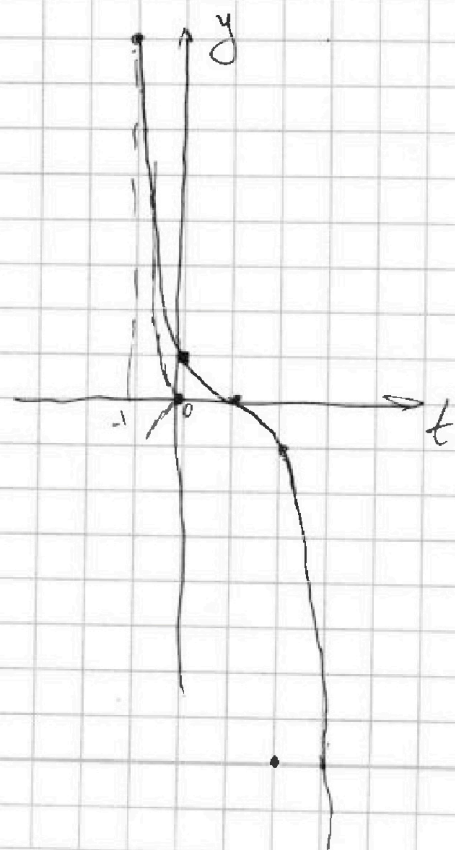
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$p > 1$



$(p-1) + 13$
 $(1-t) + 13$

$y + 4 \geq y + 4$
 $y - 5 \geq y - 5$
 $y + 4 + 4y - 20 = 5y - 16$



$g(-1) = 8$
 $f(-1) = 8$
 $1 - p \geq 8$
 $p \leq -7$

2. $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$\sqrt{x+5} = a$
 $\sqrt{1-x} = b$
 $a^2 + b^2 = 6$
 $a - b + 4 = 2ab$

$(1-x)(x+5) = (5-4x-x^2)$
 $\begin{cases} 2ab + b = a + 4 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases}$

$b(2a+1) = a+4 \Rightarrow b = \frac{a+4}{2a+1} = \frac{2a+1-a+3}{2a+1}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x - 1 + 10$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= 2 \cos^2 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$$

$$= 2 \cos^2 x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x \frac{(1 - \cos^2 x)}{2(\cos x - \cos^3 x)} - 2 \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$3. \quad \cos x = t$$

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 12t^2 - 6 + 10$$

$$4p t^3 - 3p t + 3p t + 12t = 12t^2 - 4 \Rightarrow -12t^2 - 4 = 0$$

$$4p t^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \quad | :4$$

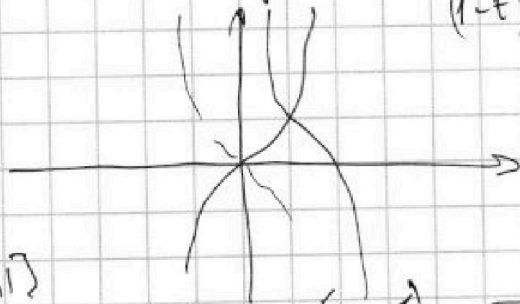
$$p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = -(t-1)^3$$

$$\textcircled{1} \quad p=1: \quad 0 = (1-t)^3$$

$$\textcircled{2} \quad p > 1: \quad \frac{(p-1)t^3}{(1-t)^3} = -1$$



$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 4$$

$$x+5 + 1-x - 2\sqrt{5-4x-x^2} = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$$

$$6 - 2t = 4t^2 - 16t + 16$$

$$4t^2 - 14t + 10 = 0$$

≤ 1 решений. Корни $t \in [-1; 1]$

$$p \leq 2: \quad \frac{(p-1)t^3}{(1-t)^3} = -1$$

$$(p-1)t^3 = -(1-t)^3 \quad | : t^3 \neq 0$$

$$\frac{(p-1)}{t} = \frac{(1-t)^3}{t^3} = p-1$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1} \Rightarrow \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$1-t = t \sqrt[3]{p-1} \Rightarrow 1 = t(1 + \sqrt[3]{p-1}) \Rightarrow t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \\ 3\sqrt[3]{1-p} \leq 2 \\ 3\sqrt[3]{1-p} \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ p \geq 1 \\ 1-p \geq 8 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1-t}{t}\right)^3 = p-1$$

$$\frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{p-1}$$

$$\frac{1}{t} = 1 + \sqrt[3]{p-1}$$

$$t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

