



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый член прогрессии —  $a$ , знаменатель —  $q$ .

Получаем: 
$$\begin{cases} aq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} & (1) \\ aq^{12} = 5-x & (2) \\ aq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} & (3) \end{cases}$$

Предположим,  $x = \frac{35}{13}$ , тогда  $aq^6 = 0$  и независимо от

$q$  должен обнуляться и  $aq^{12}$ , но  $aq^{12} = 5 - \frac{35}{13} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow aq^6 \neq 0$ .  ~~$a \neq 0, q \neq 0$~~  и  $a \neq 0, q \neq 0$

Разделим  $aq^{14}$  на  $aq^6 \neq 0$ :  $q^8 = \sqrt{(x+1)^4} \Leftrightarrow q^8 = \pm (x+1)^2$

Случай  $q^8 = -(x+1)^2 \leq 0$  возможен только при  $q^8 = 0$  и  $(x+1) = 0$ , но  $x \neq -1$  из-за ограничения знаменателей.

Получаем:  $q^8 = (x+1)^2 \Leftrightarrow q^4 = |x+1|$

Тогда  $q^2 = \pm \sqrt{|x+1|}$  и в силу  $q^2 \geq 0$  и

$-\sqrt{|x+1|} < 0$  остаётся только  $q^2 = \sqrt{|x+1|}$

Разделим  $aq^{12}$  на  $q^2 = \sqrt{|x+1|} \neq 0$  и приравняем к  $aq^{14}$ :

$$(5-x) \cdot \sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

~~$\sqrt{(x-5)^2 \cdot |x+1|}$~~  Запишем ограничения:  $(13x-35)(x+1) > 0$  ( $\neq 0$  в силу  $a \neq 0, q \neq 0$ )

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

А также  $(5-x) > 0$  из-за неотрицательности правой стороны, т.е.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x < 5$ . Получаем ограничение на  $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{35}{13}; 5)$ .

Возведём в квадрат с учётом ограничения:

$$(x-5)^2 \cdot |x+1| = (13x-35)(x+1)$$

Рассмотрим случаи:

1)  $x \in (-\infty; -1)$  и  $|x+1| = -(x+1)$ . Сократим на  $x+1 \neq 0$ :

$$-(x-5)^2 = 13x-35$$

$$x^2 - 10x + 25 + 13x - 35 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2) = 0$$

Либо  $x=2$  — не подходит ( $2 > -1$ )

Либо  $x=-5$ : Тогда

$$\left. \begin{array}{l} aq^4 = 10 \\ aq^{14} = 20 \\ aq^6 = \frac{10}{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Это может быть} \\ \text{прогрессия вида} \\ a = \frac{10}{64}; q = \sqrt{2}. \end{array}$$

Это значение подходит.

2)  $x \in (\frac{35}{13}; 5)$  и  $|x+1| = x+1$ . Сократим на  $x+1 \neq 0$ :

$$(x-5)^2 = 13x-35; \quad x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0; \quad (x-3)(x-20) = 0$$

Либо  $x=20 > 5$  — не подходит

Либо  $x=3$ : тогда получаем систему:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} aq^6 = \frac{1}{4} \\ aq^{12} = 2 \\ aq^{14} = 4 \end{cases} - \text{ Это может быть прогрессия вида}$$
$$a = \frac{1}{32} ; q = \sqrt{2}$$

Подходит только  $x = -5$  и  $x = 3$  и к ним можно найти примеры прогрессий.

Ответ:  $-5 ; 3$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем все ограничения подкоренных выражений:

$$x \geq -3 ; \quad x+z \leq 4 ; \quad -13 \leq z \leq 13 ;$$

$$-x^2 + x + y + z \geq 0 \Leftrightarrow x + y + z \geq x^2$$

Рассмотрим случаи:

1)  $y \geq 12$ , тогда второе уравнение системы имеет вид:

$$4y - 35 = \sqrt{169 - z^2}$$

Возведем в квадрат при условии, что  $y \geq \frac{35}{4}$  и  $|z| \leq 13$ :

$$16y^2 - 280y + 1225 = 169 - z^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p \quad \text{все } p, \text{ есть реш.} \\ \text{+ сами реш.}$$

Преобразуем:

$$(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

в.н.п.  $t = \cos x$ ,  $|t| \leq 1$ :  $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$

Заметим, что производная левой части равна  $12t^2 +$

$$+ 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \text{ и равна 0 только в точке}$$

$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$  функция  $(4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p)$  монотонно возрастает (независимо от  $p$ ) и может иметь не больше 1

корни.

Чтобы этот корень лежал между  $t = -1$  и  $t = 1$  <sup>(включительно)</sup> запишем следующие неравенства:

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p;$$

$$f(-1) \leq 0 \text{ и } f(1) \geq 0, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} -4 - p \leq 0 \\ 10 - p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq -4 \\ p \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-4; 10]$$

При всех таких  $p$  найдётся решение для  $t = \cos x$ , т.е. и для самого  $x$ .

Ответ:  $p \in [-4; 10]$



1  2  3  4  5  6  7

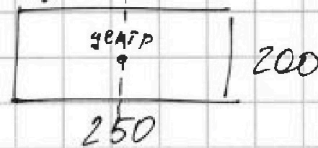
СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случай симметрии:

1) Относительно центра:

В этом случае будем не учитывать обшивку, считая, что прямоугольник повернут боковой стороной горизонтально, т.е.:



Если проведем прямую вертикально через центр, то она разделит прямоугольник на два  $125 \times 200$ .

Выбор одной клетки из левого прямоугольника однозначно задаёт симметричную относительно центра клетку в правом прямоугольнике. Это значит, что в данном случае достаточно выбрать

4 клетки из левого прямоугольника, чтобы закрасить 8 клеток симметрично центру. Это можно сделать

$$C_4^{25000} \text{ способами } (25000 = 125 \cdot 200 - \text{площадь левого прямоугольника}).$$

2) Относительно средних линий:

В этом случае также достаточно выбрать только 4 клетки с одной стороны от средней линии, другие 4 клетки однозначно задаются из симметрии.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для горизонтальной средней линии:  $C_{2500}^4$  способов;

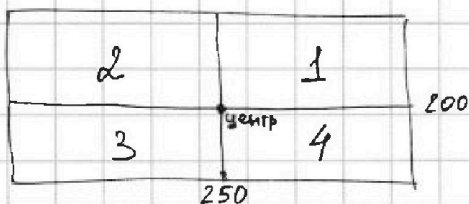
Для вертикальной средней линии:  $C_{2500}^4$  способов.

~~Выделим случаи, рассмотренные несколько раз:~~

~~1. Центральная симметрия и симметрия относительно вертикальной средней линии.~~

~~Эти случаи пересекаются, если~~

Для той же ориентации прямоугольника проведем средние линии и пронумеруем четверти прямоугольника:

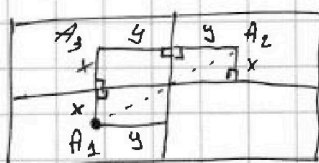


Рассмотрим случаи:

1. Выполнена симметрия относительно центра и вертикальной ср. линии.

Несложно доказать, что в этом случае выполнена и симметрия относительно горизонтальной ср. линии.

Её можно увидеть из рисунка:



Точка  $A_1$  (какая-то в любой четверти) переходит в  $A_2$  по центральной симметрии,  $A_2$  в  $A_3$  по симметрии относительно ср. линии и расстояние между  $A_1$  и  $A_3$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

равно удвоенному расстоянию между  $A_1$  и горизонтальной ср. линией, а расстояние между  $A_1$  и вертикальной ср. линией равно тому же расстоянию для  $A_3$ , все углы прямые.  $\Rightarrow$  выполняется горизонтальная симметрия относительно горизонтальной ср. линии.

2. Симметрия от-но центра и горизонтальной ср. линии.

Этот случай аналогично предыдущему: Будет выполняться также и симметрия относительно вертикальной ср. линии.

3. Симметрия от-но обеих ср. линий:

Из тех же соображений и того же рисунка она также создаёт симметрию относительно центра.

$\Rightarrow$  В каждом случае пересечение двух видов симметрии невозможно, так как <sup>одновременно</sup> может возникнуть только три ~~вида~~ вида симметрии при выполнении двух. Это означает, что в каждом из рассмотренных случаев по одному разу выполняются



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

случаев пересечения всех трёх видов симметрии.

Найдём, сколько случаев удовлетворяют сразу трём видам симметрии:

достаточно задать 2 клетки в <sup>одной</sup> из четвертей, а другие 6 задаются однозначно из симметрии (по 2 в каждой другой четверти). Получаем —  $C_{12500}^2$  способов (где  $12500 = 100 \cdot 125$  — площадь одной четверти).

Сложим кол-во случаев каждого вида симметрии и вычтем удвоенное количество случаев пересечения 3 видов симметрии (т.к. оно <sup>уже</sup> посчитано по одному разу в каждом из трёх случаев):

$$C_{25000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 = 3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$$

Ответ:  $3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b^2 = 560 \Leftrightarrow a = 560 - b^2$$

Тогда условие имеет вид:

$$560 - b^2 - b > 0 \quad (1)$$

$$(560 - b^2 - b) \div 3 \quad (2)$$

$$(560 - b^2 - b)(b - c) = p^2 \quad (p - \text{простое}) \quad (3)$$

Из условия (1) найдем ограничение на  $b$ :

$$b^2 + b - 560 < 0$$

$$D_b = 1 + 2240 = 2241, \quad 47^2 < 2241 < 48^2$$

$$b_1 = \frac{-1 + \sqrt{2241}}{2}; \quad \frac{-1 + 47}{2} = 23 < b_1 < \frac{-1 + 48}{2} = 23,5$$

$$b_2 = \frac{-1 - \sqrt{2241}}{2}; \quad \frac{-1 - 47}{2} = -24,5 < b_2 < \frac{-1 - 48}{2} = -24,5$$

$b \in \mathbb{Z}$ , поэтому подходит  $b \in [-24; 23]$

Рассмотрим условие (2). Составим таблицу

Остаток $b \pmod{3}$	0	1	2
Остаток $560 - b^2 - b \pmod{3}$	2	0	2

Подходит только случаи  $b \equiv 0$  и  $b \equiv 2$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим условие (3):

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

И отдельно случаи:

1)  $b \equiv 0 \pmod 3$  : Тогда  $a \equiv 2 \pmod 3$  (из  $a = 560 - b^2$ )

$$(a-c)(b-c) \equiv_3 (2-c)(-c) = c(c-2)$$

Составим таблицу:

Остаток $p \pmod 3$	0	1	2
Остаток $p^2 \pmod 3$	0	1	1

Т.е. либо  $c(c-2) \equiv_3 0$ , либо  $c(c-2) \equiv_3 1$

Случай  $c(c-2) \equiv_3 1$  невозможен (ни при каких остатках  $c$  не выполняется),  $\Rightarrow c(c-2) \equiv_3 0$

~~Возможно 2 случая:~~

~~1.  $c \equiv_3 0$~~

Рассуждаем, что

$$p^2 = (a-c)(b-c) \equiv_3 c(c-2) \equiv_3$$

$$\equiv_3 0 \Rightarrow p^2 \equiv_3 0 \Rightarrow p = 3 \text{ (единственное простое число, кратное 3)}$$

~~Перепробовав возможные степени  $p$  ( $p: 3$  и имеет вид  $p = 3^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ):~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Если  $(a-c)(b-c)$~~

Получаем единственную

случай:

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$(a-c)$  и  $(b-c)$  не могут быть одновременно кратны 3, так как  $a \equiv 2$ ,  $b \equiv 0$  и  $c$  не может обеспечить кратность обеих выразителей одновременно (т.е.  $a-c \equiv 2-c$ ,  $b-c \equiv -c$  и  $2-c \not\equiv -c$ ).

Также в силу  $a > b$ :  $a-c > b-c$ .

В  $\mathbb{Z}$  числа получаем только 2 решения:

$$1. \begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \end{cases}$$

Подставим в  $a+b^2 = 560$ :  $9+c + 1+2c+c^2 = 560$   
 $c^2 + 3c - 550 = 0$

$$D_c = 9 + 2200 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{-3-47}{2} = -25 \quad ; \quad c_2 = \frac{-3+47}{2} = 22$$

$$a_1 = -16$$

$$a_2 = 31$$

$$b_1 = -24$$

$$b_2 = 23$$

Для обеих троек выполнены все условия  $\Rightarrow$  они подходят.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d. \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases}$$

Подставим в  $a+b^2 = 560$ :  $c-1 + c^2 - 18c + 81 = 560$

$$c^2 - 17c - 479 = 0$$

$$D_c = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{17+47}{2} = 32 \quad ; \quad c_2 = \frac{17-47}{2} = -15$$

$$a_1 = 31$$

$$a_2 = -16$$

$$b_1 = 23$$

$$b_2 = -24$$

Обе тройки подходят под все условия.

2)  $b \equiv 2 \pmod{3}$ : Тогда  $a \equiv 1 \pmod{3}$  (из  $a = 560 - b^2$ )

$$(a-c)(b-c) \equiv (1-c)(2-c) = (c-1)(c-2)$$

Из соображений об остатках  $p^2$  снова получаем:

Либо  $(c-1)(c-2) \equiv 1 \pmod{3}$ , что невозможно ни

при каких  $c$  (при  $c \equiv 0 \pmod{3}$ : сравним с 2;  $c \equiv 1 \pmod{3}$ : сравним с 0;

$c \equiv 2 \pmod{3}$ : сравним с 0).

Либо  $(c-1)(c-2) \equiv 0 \pmod{3}$ , то есть снова  $p^2 \equiv 0 \pmod{3}$ ,

что для простых  $p$  возможно только если  $p=3$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем:  $(a-c)(b-c) = 9$

Все подходящие  $\neq$  решения этого уравнения уже найдены в предыдущем случае.

Ответ:  $(-16; -24; -25)$ ,  $(31; 23; 22)$ ,  
 $(31; 23; 32)$ ,  $(-16; -24; -15)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 |  $a, aq, aq^2, \dots$

$$aq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}; \quad aq^{12} = 5-x; \quad aq^{14} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$

$$a \neq 0, q \neq 0 \quad \left| \quad \frac{aq^{14}}{aq^6} = \sqrt{(x+1)^4} \right.$$

$$q^8 = \pm (x+1)^2$$

$$q^8 = -(x+1)^2 = 0 \quad \text{--- (X)}$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = |x+1|$$

$x=3$  :  $\sqrt{\frac{4}{4^3}} = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4}$   $\swarrow \times q^6$

$13$  :  $5-3 = 2$

№ 6

$15$  :  $\sqrt{4 \cdot 4} = 4 \swarrow q^2$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$  ;    1)  $a > b$     3)  $(a-c)(b-c) = p^2$

2)  $(a-b) \not\div 3$     4)  $a+b^2 = 560$

Ключ :  $\text{mod } 3$      $\textcircled{a \neq b}$      $\begin{matrix} < a \leq 560 \\ -24 \leq b \leq 23 \end{matrix}$

3)  $ab - c(a+b) + c^2 = p^2$

4)  $a = 560 - b^2$  ;    2)  $560 - b - b^2 \not\div 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{z} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{array} \right.$$

Отр. :  $17 \geq x \geq -3$  ;  $x+z \leq 4$

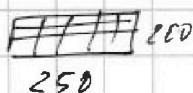
$-13 \leq z \leq 17$

$z+p=m$

$$\frac{m^3}{4^2} + \frac{6m^2}{4^2} + \frac{3m}{4} - m$$

№5

$200 \times 250$

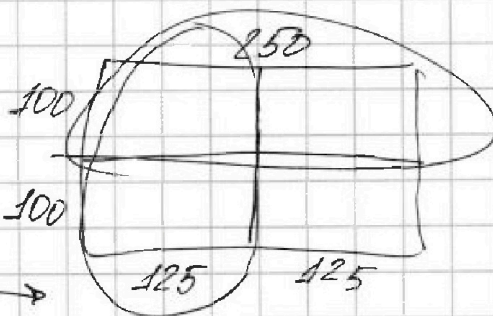


Красим & клеим : ~~любая~~ Симметрия

- 1) Центр ; 2) Ср. линия

1) Отн. центра :

Воспримем 4 шара  
 $125 \cdot 200 = 25000$  клеим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 560 - b^2 \quad ; \quad -b^2 - b + 560 \div 3$$

$$b^2 + b - 560 \div 3$$

$$(-b^2 - c + 560)(b - c) = p^2 \quad \left| \begin{array}{l} \cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ = 2\cos^2 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{array} \right.$$

№3)  $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$  ( ? ): все p, есть реш. + реш.

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$t = \cos x, |t| \leq 1$  ;  $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$   
 $-3 - p = 0$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$$

Ноль:  $t = -\frac{1}{2}$   
 $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 3 - p = 0$   
 $-3,5 - p = 0$

$$(\cos x + 1)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1$$

$$+ 5\cos^3 x + 3\cos^2 x - 4 - p$$

$$(\cos x + 1)^3$$

Всегда есть ровно 1 реш, оно зависит только от  $p \in [-4; 10]$

$f(-1) =$

$$t = \frac{3+p}{4} : 4 \cdot \frac{(3+p)^3}{4^3} + 6 \cdot \frac{(3+p)^2}{4^2} + 3 \cdot \frac{3+p}{4} - 3 - p = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y = \sqrt{169 - z^2} + 35$$

$$x \left( \frac{1}{2} - x \right) = \frac{1}{4} - x^2$$

$$2 \sqrt{y + x - x^2 + 2} = \sqrt{\sqrt{169 - z^2} + 35 + 4x - 4x^2 + z}$$

№6

$$a > b$$

$$(a-b) \div 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560 \Rightarrow a = 560 - b^2$$

$$560 - b^2 - b > 0$$

$$(560 - b^2 - b) \div 3$$

Следует: ~~2~~ ~~11~~

$$560 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow -b^2 - b + 2 \pmod{3}$$

$$b^2 + b + 1 \pmod{3}$$

ост b	0	1	2
ост f(b)	1	0	1

$$b \div 3$$

либо

$$b \equiv 2 \pmod{3}$$

$$a \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$a \equiv -2 \pmod{3}$$

$$(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod{3}$$

либо

$$(a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(2-c)(c-2) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$c(c-2) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(50-3)^2 = 2500 - 300 + 9 = 1109$$