



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый член прогрессии — a , знаменатель — q .

Получаем:
$$\begin{cases} aq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} & (1) \\ aq^{12} = 5-x & (2) \\ aq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} & (3) \end{cases}$$

Предположим, $x = \frac{35}{13}$, тогда $aq^6 = 0$ и независимо от

q должен обнуляться и aq^{12} , но $aq^{12} = 5 - \frac{35}{13} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow aq^6 \neq 0$. ~~$a \neq 0, q \neq 0$~~ и $a \neq 0, q \neq 0$

Разделим aq^{14} на $aq^6 \neq 0$: $q^8 = \sqrt{(x+1)^4} \Leftrightarrow q^8 = \pm (x+1)^2$

Случай $q^8 = -(x+1)^2 \leq 0$ возможен только при $q^8 = 0$ и $(x+1) = 0$, но $x \neq -1$ из-за ограничения знаменателей.

Получаем: $q^8 = (x+1)^2 \Leftrightarrow q^4 = |x+1|$

Тогда $q^2 = \pm \sqrt{|x+1|}$ и в силу $q^2 \geq 0$ и

$-\sqrt{|x+1|} < 0$ остаётся только $q^2 = \sqrt{|x+1|}$

Разделим aq^{12} на $q^2 = \sqrt{|x+1|} \neq 0$ и приравняем к aq^{14} :

$$(5-x) \cdot \sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

~~$\sqrt{(x-5)^2 \cdot |x+1|}$~~ Запишем ограничения: $(13x-35)(x+1) > 0$ ($\neq 0$ в силу $a \neq 0, q \neq 0$)

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

А также $(5-x) > 0$ из-за неотрицательности правой стороны, т.е.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x < 5$. Получаем ограничение на $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{35}{13}; 5)$.

Возведём в квадрат с учётом ограничения:

$$(x-5)^2 \cdot |x+1| = (13x-35)(x+1)$$

Рассмотрим случаи:

1) $x \in (-\infty; -1)$ и $|x+1| = -(x+1)$. Сократим на $x+1 \neq 0$:

$$-(x-5)^2 = 13x-35$$

$$x^2 - 10x + 25 + 13x - 35 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \iff (x+5)(x-2) = 0$$

Либо $x=2$ — не подходит ($2 > -1$)

Либо $x=-5$: Тогда

$$\left. \begin{array}{l} aq^4 = 10 \\ aq^{14} = 20 \\ aq^6 = \frac{10}{8} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Это может быть} \\ \text{прогрессия вида} \\ a = \frac{10}{64}; q = \sqrt{2}. \end{array}$$

Это значение подходит.

2) $x \in (\frac{35}{13}; 5)$ и $|x+1| = x+1$. Сократим на $x+1 \neq 0$:

$$(x-5)^2 = 13x-35; \quad x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0; \quad (x-3)(x-20) = 0$$

Либо $x=20 > 5$ — не подходит

Либо $x=3$: тогда получаем систему:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} aq^6 = \frac{1}{4} \\ aq^{12} = 2 \\ aq^{14} = 4 \end{cases} - \text{ Это может быть прогрессия вида}$$
$$a = \frac{1}{32} ; q = \sqrt{2}$$

Подходит только $x = -5$ и $x = 3$ и к ним можно найти примеры прогрессий.

Ответ: $-5 ; 3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем все ограничения подкоренных выражений:

$$x \geq -3 ; \quad x+z \leq 4 ; \quad -13 \leq z \leq 13 ;$$

$$-x^2 + x + y + z \geq 0 \Leftrightarrow x + y + z \geq x^2$$

Рассмотрим случаи:

1) $y \geq 12$, тогда второе уравнение системы имеет вид:

$$4y - 35 = \sqrt{169 - z^2}$$

Возведем в квадрат при условии, что $y \geq \frac{35}{4}$ и $|z| \leq 13$:

$$16y^2 - 280y + 1225 = 169 - z^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p \quad \text{все } p, \text{ есть реш.} \\ \text{+ сами реш.}$$

Преобразуем:

$$(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$\text{в. н. п. } t = \cos x, |t| \leq 1: \quad 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

Заметим, что производная левой части равна $12t^2 +$

$$+ 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \text{ и равна 0 только в точке}$$

$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ функция $(4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p)$ монотонно возрастает (независимо от p) и может иметь не больше 1

корни.

Чтобы этот корень лежал между $t = -1$ и $t = 1$ ^(включительно) запишем следующие неравенства:

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p;$$

$$f(-1) \leq 0 \text{ и } f(1) \geq 0, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} -4 - p \leq 0 \\ 10 - p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq -4 \\ p \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-4; 10]$$

При всех таких p найдётся решение для $t = \cos x$, т.е. и для самого x .

Ответ: $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случаи симметрии:

1) Относительно центра:

В этом случае будем, не упуская общности, считать, что прямоугольник повернут боковой стороной горизонтально, т.е.:



Если провести прямую вертикально через центр, то она разделит прямоугольник на два 125×200 .

Выбор одной клетки из левого прямоугольника однозначно задаёт симметричную относительно центра клетку в правом прямоугольнике. Это значит, что в данном случае достаточно выбрать

4 клетки из левого прямоугольника, чтобы закрасить 8 клеток симметрично центру. Это можно сделать

$$C_4^{25000} \text{ способами } (25000 = 125 \cdot 200 - \text{площадь левого прямоугольника}).$$

2) Относительно средних линий:

В этом случае также достаточно выбрать только 4 клетки с одной стороны от средней линии, другие 4 клетки однозначно задаются из симметрии.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для горизонтальной средней линии: C_{2500}^4 способов;

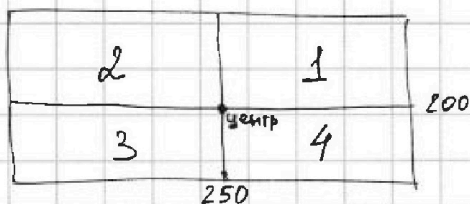
Для вертикальной средней линии: C_{2500}^4 способов.

~~Выделим случаи, рассмотренные несколько раз:~~

~~1. Центральная симметрия и симметрия относительно вертикальной средней линии.~~

~~Эти случаи пересекаются, если~~

Для той же ориентации прямоугольника проведем средние линии и пронумеруем четверти прямоугольника:

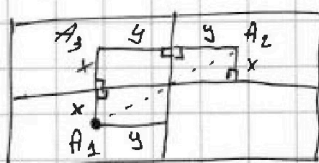


Рассмотрим случаи:

1. Выполнена симметрия относительно центра и вертикальной ср. линии.

Несложно доказать, что в этом случае выполнена и симметрия относительно горизонтальной ср. линии.

Её можно увидеть из рисунка:



Точка A_1 (какая-то в любой четверти) переходит в A_2 по центральной симметрии, A_2 в A_3 по симметрии относительно ср. линии и расстояние между A_1 и A_3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

равно удвоенному расстоянию между A_1 и горизонтальной ср. линией, а расстояние между A_1 и вертикальной ср. линией равно тому же расстоянию для A_3 , все углы прямые. \Rightarrow выполняется горизонтальная симметрия относительно горизонтальной ср. линии.

2. Симметрия от-но центра и горизонтальной ср. линии.

Этот случай аналогично предыдущему: Будет выполняться также и симметрия относительно вертикальной ср. линии.

3. Симметрия от-но обеих ср. линий:

Из тех же соображений и того же рисунка она также создаёт симметрию относительно центра.

\Rightarrow В каждом случае пересечение двух видов симметрии невозможно, так как ^{одновременно} может возникнуть только три ~~вида~~ вида симметрии при выполнении двух. Это означает, что в каждом из рассмотренных случаев по одному разу выполняются



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

случаев пересечения всех трёх видов симметрии.

Найдём, сколько случаев удовлетворяют сразу трём видам симметрии:

достаточно задать 2 клетки в ^{одной} из четвертей, а другие 6 задаются однозначно из симметрии (по 2 в каждой другой четверти). Получаем — C_{12500}^2 способов (где $12500 = 100 \cdot 125$ — площадь одной четверти).

Сложим кол-во случаев каждого вида симметрии и вычтем удвоенное количество случаев пересечения 3 видов симметрии (т.к. оно ^{уже} посчитано по одному разу в каждом из трёх случаев):

$$C_{25000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 = 3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$$

Ответ: $3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b^2 = 560 \Leftrightarrow a = 560 - b^2$$

Тогда условие имеет вид:

$$560 - b^2 - b > 0 \quad (1)$$

$$(560 - b^2 - b) \div 3 \quad (2)$$

$$(560 - b^2 - c)(b - c) = p^2 \quad (p - \text{простое}) \quad (3)$$

Из условия (1) найдем ограничение на b :

$$b^2 + b - 560 < 0$$

$$D_b = 1 + 2240 = 2241, \quad 47^2 < 2241 < 48^2$$

$$b_1 = \frac{-1 + \sqrt{2241}}{2}; \quad \frac{-1 + 47}{2} = 23 < b_1 < \frac{-1 + 48}{2} = 23,5$$

$$b_2 = \frac{-1 - \sqrt{2241}}{2}; \quad \frac{-1 - 47}{2} = -24,5 < b_2 < \frac{-1 - 48}{2} = -24$$

$b \in \mathbb{Z}$, поэтому подходит $b \in [-24; 23]$

Рассмотрим условие (2). Составим таблицу

| | | | |
|----------------------------------|---|---|---|
| Остаток $b \pmod{3}$ | 0 | 1 | 2 |
| Остаток $560 - b^2 - b \pmod{3}$ | 2 | 0 | 2 |

Подходит только случаи $b \equiv 0$ и $b \equiv 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим условие (3):

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

И отдельно случаи:

1) $b \equiv 0 \pmod 3$: Тогда $a \equiv 2 \pmod 3$ (из $a = 560 - b^2$)

$$(a-c)(b-c) \equiv_3 (2-c)(-c) = c(c-2)$$

Составим таблицу:

| | | | |
|-----------------------|---|---|---|
| Остаток $p \pmod 3$ | 0 | 1 | 2 |
| Остаток $p^2 \pmod 3$ | 0 | 1 | 1 |

Т.е. либо $c(c-2) \equiv_3 0$, либо $c(c-2) \equiv_3 1$

Случай $c(c-2) \equiv_3 1$ невозможен (ни при каких остатках c не выполняется), $\Rightarrow c(c-2) \equiv_3 0$

~~Возможно 2 случая:~~

~~1. $c \equiv_3 0$~~

Рассуждаем, что

$$p^2 = (a-c)(b-c) \equiv_3 c(c-2) \equiv_3$$

$$\equiv_3 0 \Rightarrow p^2 \equiv_3 0 \Rightarrow p = 3 \text{ (единственное простое число, кратное 3)}$$

~~Перепробовав возможные степени p ($p: 3$ и имеет вид $p = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$):~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Если $(a-c)(b-c)$~~

Получаем единственную

случай:

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$(a-c)$ и $(b-c)$ не могут быть одновременно кратны 3, так как $a \equiv 2$, $b \equiv 0$ и c не может обеспечить кратность обеих выразителей одновременно (т.е. $a-c \equiv 2-c$, $b-c \equiv -c$ и $2-c \not\equiv -c$).

Также в силу $a > b$: $a-c > b-c$.

В \mathbb{Z} числа получаем только 2 решения:

$$1. \begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \end{cases}$$

Подставим в $a+b^2 = 560$: $9+c + 1+2c+c^2 = 560$
 $c^2 + 3c - 550 = 0$

$$D_c = 9 + 2200 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{-3-47}{2} = -25; \quad c_2 = \frac{-3+47}{2} = 22$$

$$a_1 = -16$$

$$a_2 = 31$$

$$b_1 = -24$$

$$b_2 = 23$$

Для обеих троек выполнены все условия \Rightarrow они подходят.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d. \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases}$$

Подставим в $a+b^2 = 560$: $c-1 + c^2 - 18c + 81 = 560$

$$c^2 - 17c - 479 = 0$$

$$D_c = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{17+47}{2} = 32 \quad ; \quad c_2 = \frac{17-47}{2} = -15$$

$$a_1 = 31$$

$$a_2 = -16$$

$$b_1 = 23$$

$$b_2 = -24$$

Обе тройки подходят под все условия.

2) $b \equiv 2 \pmod 3$: Тогда $a \equiv 1 \pmod 3$ (из $a = 560 - b^2$)

$$(a-c)(b-c) \equiv (1-c)(2-c) = (c-1)(c-2)$$

Из соображений об остатках p^2 снова получаем:

Либо $(c-1)(c-2) \equiv 1 \pmod 3$, что невозможно ни

при каких c (при $c \equiv 0 \pmod 3$: сравним с 2; $c \equiv 1 \pmod 3$: сравним с 0;

$c \equiv 2 \pmod 3$: сравним с 0).

Либо $(c-1)(c-2) \equiv 0 \pmod 3$, то есть снова $p^2 \equiv 0 \pmod 3$,

что для простых p возможно только если $p=3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем: $(a-c)(b-c) = 9$

Все подходящие \neq решения этого уравнения уже найдены в предыдущем случае.

Ответ: $(-16; -24; -25)$, $(31; 23; 22)$,
 $(31; 23; 32)$, $(-16; -24; -15)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{z} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{array} \right.$$

Отр. : $17 \geq x \geq -3$; $x+z \leq 4$

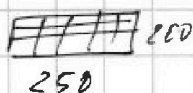
$-13 \leq z \leq 17$

$z+p=m$

$$\frac{m^3}{4^2} + \frac{6m^2}{4^2} + \frac{3m}{4} - m$$

№5

200×250

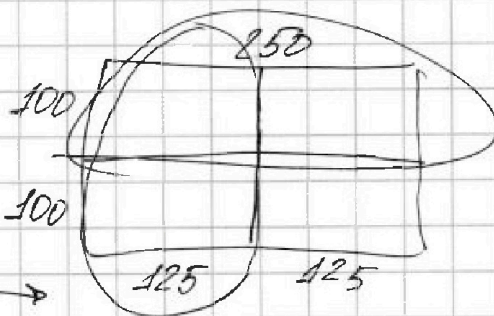


Красим & клеим : ~~любой~~ Симметрия

1) Центр ; 2) Ср. линия
прям.

1) Отн. центра :

Восприм 4 шовки
 $125 \cdot 200 = 25000$ клебок



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 560 - b^2 \quad ; \quad -b^2 - b + 560 \div 3$$

$$b^2 + b - 560 \div 3$$

$$(-b^2 - c + 560)(b - c) = p^2 \quad \left| \begin{array}{l} \cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ = 2\cos^2 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{array} \right.$$

№3) $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$ (?:) все p, есть реш. + реш.

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$t = \cos x, |t| \leq 1$; $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
 $-3 - p = 0$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$$

Нуль: $t = -\frac{1}{2}$
 $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 3 - p = 0$
 $-3,5 - p = 0$

$$(\cos x + 1)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1$$

$$+ 5\cos^3 x + 3\cos^2 x - 4 - p$$

$$(\cos x + 1)^3$$

Всегда есть ровно 1 реш, оно единственно было на $p \in [-4; 10]$

$f(-1) =$

$$t = \frac{3+p}{4} : 4 \cdot \frac{(3+p)^3}{4^3} + 6 \cdot \frac{(3+p)^2}{4^2} + 3 \cdot \frac{3+p}{4} - 3 - p = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y = \sqrt{169 - z^2} + 35$$

$$x \left(\frac{1}{2} - x \right) = \frac{1}{4} - x^2$$

$$2 \sqrt{y + x - x^2 + 2} = \sqrt{\sqrt{169 - z^2} + 35 + 4x - 4x^2 + z}$$

№6

$$\begin{aligned} a &> b \\ (a-b) &\div 3 \\ (a-c)(b-c) &= p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 560 - b^2 - b &> 0 \\ (560 - b^2 - b) &\div 3 \end{aligned}$$

Следствие: ~~2~~

$$a + b^2 = 560 \Rightarrow a = 560 - b^2$$

$$\begin{aligned} 560 &\equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow -b^2 - b + 2 \pmod{3} \\ b^2 + b + 1 &\pmod{3} \end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 1 |

$$\begin{aligned} b &\div 3 \quad \text{либо} \quad b \equiv 2 \pmod{3} \\ a &\equiv -1 \equiv 2 \pmod{3} \quad a \equiv -2 \pmod{3} \end{aligned}$$

$$(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{либо} \quad (a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\begin{aligned} (2-c)(c-2) &\equiv 0 \pmod{3} \\ \text{или} \quad c(c-2) &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

$$(50-3)^2 = 2500 - 300 + 9 = 1109$$