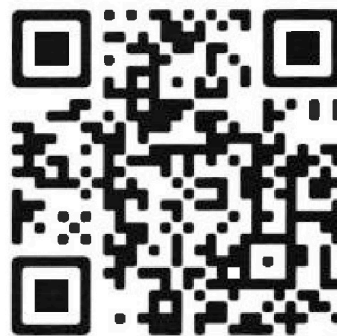




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$I) a q^6 = \sqrt{(25x-9)(x+6)}$$

$$II) a q^8 = x+3$$

$$III) a q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

Если в числ. или - числ. какой-то член = 0, то все они = 0.  
Очевидно, в том же случае при  $x = -3$ , также должно  $x = \frac{9}{25}$ .  
Значит, ни один из членов не равен нулю.  
 $x \neq \frac{9}{25}$ ;  $x \neq 6$ ;  $x \neq -3$

$$a = a q^6 \cdot a q^8 \cdot a q^{14} = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot (x+3) \sqrt{(x-6)^3}}{\sqrt{25x-9}} = (x-6)^2 (x+3)$$

$$\text{Тогда из II-го: } q = \sqrt[8]{\frac{x+3}{a}} = \sqrt[8]{\frac{x+3}{(x-6)^2(x+3)}} = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}$$

$$\text{Подставим в I: } (x-6)^2 (x+3) \cdot \frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{25x-9} (x-6)^{\frac{1}{2}} \quad | (x-6) \text{ сократ. - сдв}$$

$$(x+3) = \sqrt{25x-9} \quad |^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 25x - 9 \Rightarrow x^2 - 18x + 18 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 18 \end{cases} \quad \text{При } x=1: (25x-9)(x-6) < 0 - \text{подкоренное вын. е} \Rightarrow \text{не уст.}$$

При  $x=18$ : не трудно проверить, что прогрессия существует.

Ответ:  $x=18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Любопытные замечания!

$$|z| \leq 9$$

$$x \geq -5$$

$$4z + x \leq 1$$

$$x + 4x + \cancel{4z} + \cancel{z} \Leftrightarrow (x+z)^2 \leq y+z+4$$

QED



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:  $\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$   $W_1$  Итого:  $\frac{ED}{CD}$

Решение:  $\textcircled{I}$  Отметим вторую точку пересечения  $AD$  с  $W_1$ :  $M$

$\angle BAM = \angle BCM$  (оп. на  $\sphericalangle B$  в  $W_1$ )  
 $\angle BAM = \angle BED$  (оп. на  $\sphericalangle D$  в  $W_2$ )  $\Rightarrow$

$W_2 \Rightarrow \angle BCM = \angle BED$  - нарр. лев.  $\sphericalangle$   $\sphericalangle C$  и  $\sphericalangle E$

$\Rightarrow CM \parallel DE \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CKM \sim \triangle DKE, k = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \frac{5}{2} CM$

$\textcircled{II}$   $CD$  - т.с.  $\Rightarrow \angle CAB = \angle BCD = \angle BMC$ ;  
 $\angle CED = \angle COB \Rightarrow \angle COB = \angle BCM$   
(по гок.-у)

$\triangle BCM$  и  $\triangle CBD$ :  $\angle CBM = \angle CBD$ ;  $\Rightarrow \triangle BCM \sim \triangle CBD$   
 $\angle BCM = \angle CBD$

$$\Rightarrow \frac{CB}{BD} = \frac{BM}{CB} \Rightarrow CB^2 = BM \cdot BD$$

$\textcircled{III}$   $\angle MBK = \angle DBK$  как <sup>смежные</sup> ~~внешние~~ к равным углам  $\angle CBM$  и  $\angle CBD$  соотв  $\Rightarrow$

$\Rightarrow BK$  - бисс. - в  $\triangle DBM \Rightarrow$  по св-ву бисс.:  $\frac{BD}{DK} = \frac{BM}{KM} \Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{DK}{KM}$

По н.  $\textcircled{I}$   $\frac{DK}{KM} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{5}{2}$ .  $\exists BD = 5x$ , тогда  $BM = 2x$ , тогда

по н.  $\textcircled{II}$ :  $CB^2 = 5x \cdot 2x \Rightarrow CB = \sqrt{10} \cdot x \Rightarrow \triangle CBM \sim \triangle CBD$  с коэф.  $\text{sim} =$

$$= \frac{BM}{CB} = \frac{2x}{\sqrt{10}x} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{10} \cdot CD}{5}$$

$$\text{Из н.  $\textcircled{I}$ : } ED = \frac{5}{2} CM = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot CD \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{10}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что симметрия отн. центра прямоугольника равносильна композиции симметрий сначала от одной ср. линии, затем другой. Из этого следует, что раскраска либо обладает только одной из трёх симметрий, либо всеми тремя сразу.

Разобьём прямоугольник на 4 равных  $100 \times 100$  с общей верхинкой в центре исходного прам.-ка. Утверждается, что заполнив один прямоугольник, а затем выстроив вид симметрии, \* можно получить все возможные раскраски.

Всего 4 способа выбрать вид симметрии: <sup>по 1</sup> по каждой из ср. лин. и центра по отдельности и один способ с симметрией по всем сразу.

В первых трёх мы красим 4 клетки, т.к. после симметрии их кол-во удвоится. В последнем же красим только 2, т.к. симметрия удваивает кол-во клеток.

~~Итак ответ, ответ:  $C_{1000}^2 + 3C_{1000}^4$ , в котором всегда~~

Стало в первых трёх сл-х исследовать ~~повтор~~ выбор друг друга прам.-ов за стартовый. Умножим на 4 и поделим на 2

и тогда избавится от повт.-ся случаев. (поскольку каждая симметрия задает ств. 2 прам.-ка)

$$\text{Ответ: } C_{1000}^2 + 6C_{1000}^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1  $aq^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$  }  $aq^{14} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot (x+3) \Rightarrow = 0!!!$   
 $aq^8 = x+3$   
 $aq^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$   $\Rightarrow a = \frac{a^2 q^{14}}{a q^{14}} = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}^{14}}{(25x-9)} (x+3) =$

$= (x-6)^2 (x+3)$  ;  $a = (x-6)^2 (x+3)$  ,  $x \neq \frac{9}{25}$   
 $(x-6)^2 (x+3) \cdot q^8 = (x+3) \Rightarrow q^8 = \frac{(x+3)}{(x-6)^2} \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}$  ,  $x \neq -3$   
 $x \neq 6$

№2  $(x-6)^2 (x+3) \cdot \frac{1}{(x-6)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-6}} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x-6)(x+3) = \sqrt{25x-9}(x-6) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$   
 $x^2 - 19x + 18 = 0$   $\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 18 \end{matrix}$

№2  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$   
 $|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$   $\begin{matrix} - & + & + \\ & - & + \\ & - & + \end{matrix} \rightarrow y$

00  $|z| \leq 9$  ;  $4z+x \leq 1$   $(y+4)^2 + 16(y-5)^2 + 8|y+4||y-5| = 81-z^2$   
 $x \geq -5$  ;  $(x+2)^2 \leq y+2+4$   
 $1-x-4z \geq 0 \Leftrightarrow 4z+x \leq 1$   
 $y-4x-x^2+z \geq 0 \Leftrightarrow x^2+4x+4 \leq y+2+4 \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq y+2+4$

①  ~~$x \leq -4$  ;  $-y-4-4y+16 = \sqrt{81-z^2} \Rightarrow -5y+16 = \sqrt{81-z^2}$~~

②  $12 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7$   $7/31$   
 $3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \ 6 = 31$

$p \cos 3x + 3p \cos x + 12 \cos x = 6 \cos 2x + 10$   
 $p \cos 3x + 3p \cos x + 12 \cos x - 6 \cos 2x = 10$   
 $p \cos 3x - 6 \cos 2x + (3p+12) \cos x = 10$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

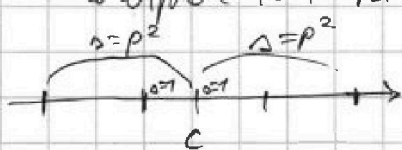
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

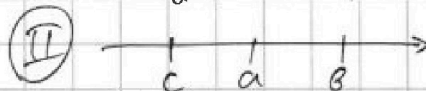
$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad a \neq b \Rightarrow a-c \neq b-c \Rightarrow p^2 \text{ на мн. } (a-c)(b-c) \text{ можно разложить только как } (\pm 1)(\pm p^2); (\pm p^2)(\pm 1).$$

Знаки у мн. должны быть одинаковыми, чтобы получить  $p^2 > 0$ , значит либо  $a < b < c$ , либо  $c < a < b$ .

Рассмотрим точки на расстояниях  $\pm 1, \pm p^2$  от т.с на числовой оси:



Тогда под условие попадают только два варианта:



$$\begin{cases} c-a=p^2 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=p^2+a \\ c=1+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ c=b-p^2 \end{cases} \Rightarrow a-1=b-p^2 \Rightarrow b-a=p^2-1 \text{ (св. к (I))}$$

$$\Rightarrow p^2+a=1+b \Rightarrow b-a=p^2-1=(p-1)(p+1)$$

По усл.  $b-a \div 3$ ;  $a, b \in \{p-1, p, p+1\}$  - три посл. числа  $\Rightarrow$  одно из них  $\div 3$

значит  $p \div 3 \Rightarrow p$ , простое  $\Rightarrow p=3$ .  $\begin{cases} (a-c)(b-c)=9 \\ b-a=8 \end{cases}$

$$b-a=8 \Rightarrow a^2+a+8=710$$

$$a^2+a-702=0$$

По теор. Виета:  $\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_2 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -19 \\ b_2 = 34 \end{cases}; \begin{cases} c_{11} = -18 \\ c_{21} = 35 \end{cases} \begin{cases} c_{12} = -28 \\ c_{22} = 25 \end{cases}$

$\swarrow$  У-я функ сл-в для точки C вычисляются по знаменателю

Ответы:  $\{a, b, c\} = \{-27, -19, -18\}; \{-27, -19, -28\};$   
 $\{26, 34, 35\}; \{26, 34, 25\}$



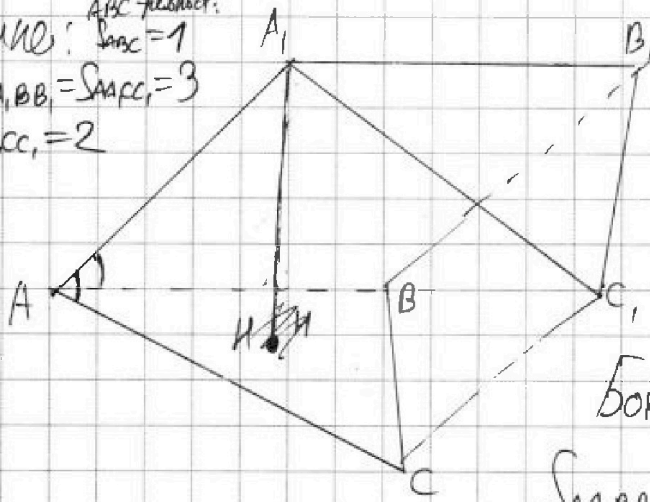
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:  $\Delta ABC$  равносторонний,  
 $S_{ABC} = 1$   
 $S_{AA_1BB_1} = S_{AA_1CC_1} = 3$   
 $S_{BB_1CC_1} = 2$



Искать:  $V$  призмы  
Решение:  $\Delta ABC$  - равносторонний  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AB = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Боковые грани  $\rightarrow$  параллелограммы;

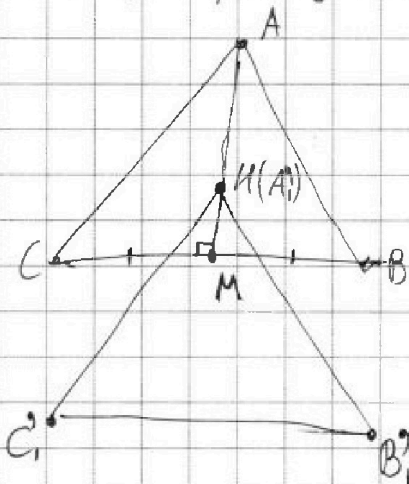
$$S_{AA_1BB_1} = AA_1 \cdot AB \cdot |\cos \angle A_1AB|$$

$$S_{AA_1CC_1} = AA_1 \cdot AC \cdot |\cos \angle A_1AC|$$

Из  $S_{AA_1BB_1} = S_{AA_1CC_1}$  следует  $|\cos \angle A_1AB| = |\cos \angle A_1AC|$

Проведем  $A_1H$  - высоту призмы:  $\{A_1H \perp (ABC)$ . Эмпирическим путем не трудно догадаться, что призма наклонена в сторону ребра  $BC$ . (Это следует из неравенства  $S_{AA_1BB_1} = S_{AA_1CC_1} > S_{BB_1CC_1}$ )

Тогда проекция всех точек на  $(ABC)$  выведет так:



$H$  попадает на середину  $BC$ :  $HM \perp BC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\rho \cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x$

$CK:KE = 2:5$   $CD^2 = DM \cdot DA$

$KB \cdot KC = KM \cdot KA$

$\frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$

$\frac{CM}{DE} = \frac{2}{5}$

$CM \parallel DE$

$\frac{MK}{KD} = \frac{3}{5}$

$BK \cdot KE = DK \cdot KA$

$CD^2 = DM \cdot DA$

$\frac{CD}{DE} = \frac{BC}{BD}$

$\frac{ED}{CM} = \frac{5}{2} \Rightarrow ED = \frac{5CM}{2}$

$\frac{KD}{KM} = \frac{5}{2}$

$BK \cdot KE = DK \cdot KA$

$CM \parallel DE$

$\frac{CM}{DK} = \frac{CM}{CD} = \frac{CA}{C}$

$\frac{CM}{AD} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CM = \frac{AC \cdot CD}{AD}$

$ED = \frac{5AC \cdot CD}{2AD}$   $\frac{ED}{CD} = \frac{5}{2} \frac{AC}{AD}$

$\frac{2}{11} \parallel \parallel \frac{1}{31}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

2 ⇒ 3  $\frac{100 \cdot 400}{4} = 10^4$

$C_{1000}^2 + 3C_{1000}^4 = 1^9$

$b-a = p^2$

$a-b = 1-p^2$

$a+p^2 = b+1$

$a+b = p^2+1$

$a+p^2 = b+1$

$a+b = p^2+1$

$a-c = b-c$

$a^2+b = 710$

$b = 710 - a^2$

$b > a$

$710 - a^2 > a$

$a^2 + a - 710 < 0$

$710 \equiv 2 \pmod{3}$

$710 \equiv 2 \pmod{3}$

$ab - ac - bc + c^2 = p^2$

$ab - c(a+b) + c^2 = p^2$

$a^2 + b = 710$

$(c+1)^2 + c + p^2 = 710$

$(c+1)^2 + c + p^2 = 710$

$2 \ 3 \ 5 \ 7 \ 11 \ 13$

$9 \ 9 \ 25 \ 49 \ 121 \ 169$

$17 \ 19$

$389 \ 361$

$361$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p = \frac{1}{2} + \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$AC \cdot AA_1 = 3$$

$$AA_1 = \frac{3}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$BB_1 \cdot BC \cdot |\cos \alpha| = 3$$

$$BB_1 \cdot AB \cdot \cos \beta = 3$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\alpha = 360^\circ - \beta$$

$$180^\circ - \beta$$

$$\alpha = 180k - \beta, k \in \mathbb{Z}$$

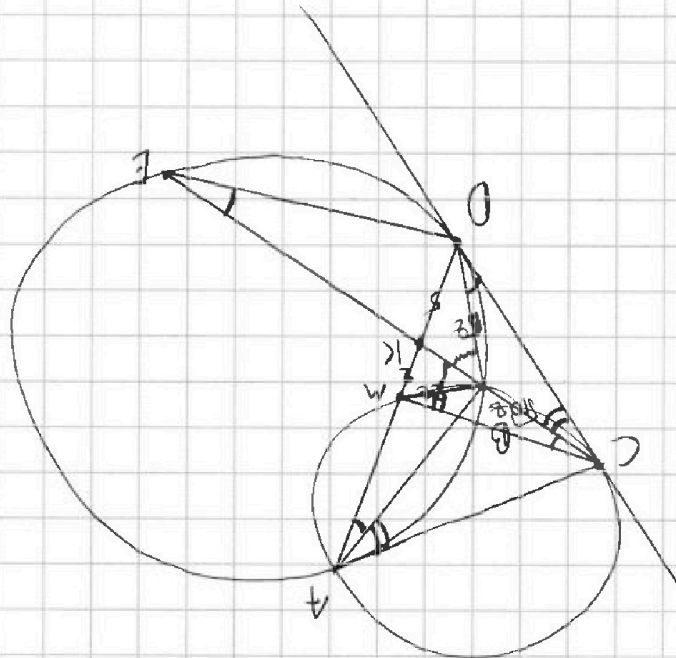
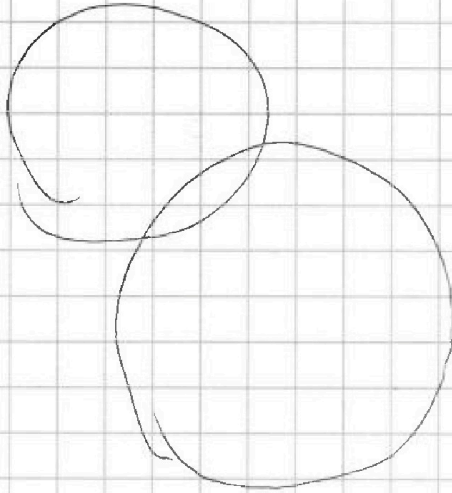


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CM}{2} = \frac{BM}{CB} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{CB}{BM} = \frac{BD}{CB} = CB^2 = 10 \cdot BM = 10 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$CB = \sqrt{10^3}$$

$$CB = ?$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По усл.  $b-a \not\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow b \not\equiv a \pmod 3$ .  $\& a^2+b=710 \Rightarrow b=710-a^2$

$710 \equiv 2 \pmod 3$ ;  $\begin{matrix} a^3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} a^2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$  Если  $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ , то  $710-a^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow b \equiv a \pmod 3$   
 $\left. \begin{matrix} a, b - \text{РАЗЛИЧНЫ} \\ \left. \begin{matrix} a^3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Противоречие.} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow b \not\equiv 3$

$a-c \not\equiv b-c \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \not\equiv 3^2$ , тогда  $b \not\equiv c \pmod 3, a \not\equiv b \pmod 3$

$(a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = p^2$  Если  $c \equiv 2 \pmod 3$ , то  $b \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow c(a+b) + c^2 \equiv 0 \pmod 3$

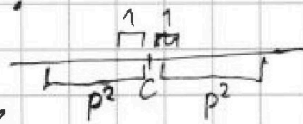
$\Rightarrow \text{различных целых } ab - c(a+b) + c^2 \equiv 3 - \text{против.} \Rightarrow c \equiv 1 \pmod 3, b \equiv 2 \pmod 3$  (Следовало еще из  $710-a^2=b$ )

Если из двух чисел является в-ом простым числом, то одно из них должно равняться единице по модулю, а второе самому квадрату.

$\begin{cases} |a-c|=1 \\ |b-c|=p^2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} |a-c|=p^2 \\ |b-c|=1 \end{cases}$

Также, при раскрытии модули должны оказаться одного знака, так как квадрат простого  $\neq$  из этого следует, что либо  $c < a < b$ , либо  $a < b < c$ .

Если рассмотреть окрестность точки C! с учетом выше перечисл. фактов



остается только два возможных варианта:

(I)  $\begin{cases} c-a=p^2 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c-a=p^2 \\ c-b=1 \end{cases}$

(II)  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

$b-a=8 \Rightarrow b=8+a$

$a^2+a+8=710$   
 $a^2+a-702=0$

$702 \mid 2$   
 $351 \mid 9$   
 $39 \mid 3$   
 $13 \mid 13$   
 $1$