



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- √ 1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

- ± √ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

- √ 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

- √ 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- √ 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x$$

$$a_{13} = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^3}}$$

$$a_1 b^{47} = (a_1 b^{17})(a_1^3 b^{27})$$

$$(a_1 b^{17})^4 = (a_1 b^{17})(a_1 b^9)^3$$

$$a_{12}^4 = a_{13} a_{10}^3$$

$$(2-x)^4 = \sqrt{\frac{(25x+34)(25x+34)^3(3x+2)^3}{(3x+2)^3}}$$

ОДЗ:  $x \neq -\frac{2}{3}$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$\sqrt{25x+34} = (2-x)^2$$

1.  $x \geq -\frac{34}{25}$

2.  $x < -\frac{34}{25}$

$$25x+34 = 4-4x+x^2$$

$$-25x+34 = 4-4x+x^2$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -19 \end{cases}$$

Ответ: -19; -2; -1; 30



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-2^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) 0 \leq \sqrt{400-2^2} \leq 20 \Rightarrow 0 \leq |y+2| + 2|y-18| \leq 20$$

Решим кер-во:

$$|y+2| + 2|y-18| \leq 20$$

$$y \geq 18:$$

$$3y+2-36 \leq 20$$

$$y \leq 18$$

$$y = 18$$

$$-2 \leq y < 18:$$

$$-y+2+36 \leq 20$$

$$-y \leq -18$$

$$y \geq 18$$

$$y \leq -2$$

$$-3y-2+36 \leq 20$$

$$-3y \leq -14$$

$$y \geq \frac{14}{3}$$

тогда  $y = 18$  и  $\sqrt{400-2^2} = 20+0 = 20$   
 $\sqrt{400-2^2} = 20 \Rightarrow 2 = 0$

(1) Подставим  $y = 18, 2 = 0$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\text{Обз. } x \in [-6; 3]$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7$$

$$0 \leq \sqrt{x+6} \leq 3$$

$$0 \leq \sqrt{3-x} \leq 3$$

$$-3 \leq \sqrt{3-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} \leq 3 \Rightarrow \sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} + 7 \geq 4$$

из данного ур-я находим, что  $x = -\frac{3}{2}$

⇒ Ответ:  $(-\frac{3}{2}; 18; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если  $p < 0$ :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} + 1 \leq 1 \\ (\sqrt[3]{p-1} + 1) \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \leq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \\ p-1 \leq -8 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

Ответ: при  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

Пусть  $t = \cos x, t \in [-1; 1]$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0 \quad /:4$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

$$(t+1 + \sqrt[3]{p-1} \cdot t)(t^2 + 2t + 1 + t(t+1)\sqrt[3]{p-1} + t^2\sqrt[3]{(p-1)^2}) = 0$$

~~если  $p=1$ , то есть корни  $t=-1$~~

~~если  $p \neq 1$ , то~~

$$t = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \quad (1)$$

$$t^2(1 + \sqrt[3]{p-1} + \sqrt[3]{(p-1)^2}) + t(2 + \sqrt[3]{p-1}) + 1 = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad 0 = 4 + 4\sqrt[3]{p-1} + \sqrt[3]{(p-1)^2} - 4 - 4\sqrt[3]{p-1} - 4\sqrt[3]{(p-1)^2} =$$

$$= -3\sqrt[3]{(p-1)^2} \Rightarrow \text{реш-е есть при } \sqrt[3]{(p-1)^2} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } p=1$$

(3) реш-е есть при

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \end{cases}$$

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \quad \cancel{\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}}$$

~~$\sqrt[3]{p-1}$~~  если  $p > 0$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq -2 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{p-1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } p \geq 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда общее кол-во случаев:

$$3 \cdot C_{(250-120)}^4 - 2 C_{(250-60)}^2$$

III случай вычит 2 раза, т.к. конфигурация может повторяться ~~одн~~ при симметрии откос. верт. и гориз. ср. линии.

$$\text{Ответ: } 3 C_{(250-120)}^4 - 2 C_{(250-60)}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Поделим прямоугольник на 4 равные части по средним линиям.

2. Тогда чтобы посчитать кол-во способов, нужно

I. кол-во способов относ. горизонтальной ср. линии

$$\frac{500 \cdot 120}{2} \quad C_{\left(\frac{500 \cdot 120}{2}\right)}^4 = C_{(250 \cdot 120)}^4$$

аналогично для вертикальной:  $C_{(250 \cdot 120)}^4$

II. относительно центра:

$C_{\left(\frac{500 \cdot 120}{2}\right)}^4 = C_{(250 \cdot 120)}^4$  (Можно отмечать точки в только в одной половине и тогда <sup>каждая</sup> ~~каждая~~ одна точка симметричная им же будет во второй половине), аналогично для I случая)

III кол-во случаев, когда симметрия относительно обеих сред. линий: будем выбирать 2 точки в

каждо одной четверти и отмечать симметричные им относ. одной ср. линии, а потом <sup>другие</sup> ~~другие~~ кол-во случаев:  $C_{(250 \cdot 60)}^2$

Заметим, что в этом случае также выполняется центра симметрия относительно центра

Доказ-во: для точки  $(x; y)$ ,  $x \leq 250, y \leq 60$   
отражаем относ. верт. ср. линии: точка  $A_1(500-x; y)$   
относ. гориз. ср. линии:  $A_2(500-x; 250-y) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  выполняется симметрия относ. центра



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a; b; c), \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Условия:

1.  $a < b$
2.  $(b-a) \mid 3$
3.  $(a-c)(b-c) = k^2$ ,  $k$  - простое
4.  $a^2 + b = 1000$

1) из 3 ус. и т.к.  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , есть несколько исходов

I.  $\begin{cases} a-c = k \\ b-c = k \end{cases} \Rightarrow b-a = 0$ , но из 1 ус.  $b-a > 0 \nmid$

II.  $\begin{cases} a-c = -k \\ b-c = -k \end{cases} \Rightarrow b-a = 0$ , но из 1 ус.  $b-a > 0 \nmid$

III.  $\begin{cases} a-c = k^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow b-a = 1 - k^2$ , но из 1 ус.  $b-a > 0$ , а  $1 - k^2 < 0$ , т.к.  $k > 1 \nmid$

IV.  $\begin{cases} a-c = 1 - k^2 \\ b-c = -k^2 \end{cases} \Rightarrow b-a = 1 - k^2$ , но из 1 ус.  $b-a > 0$ , а  $1 - k^2 < 0$ , т.к.  $k > 1 \nmid$

~~III~~ V.  $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = k^2 \end{cases} \Rightarrow b-a = k^2 - 1$ . Заметим, что если  $k \geq 1$ , то  $k^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow$   
 $k \geq 2$ , то  $k^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = a + 8$$

из 4 ус.  $a^2 + a + 8 = 1000$

$$a^2 + a - 992 = 0$$

$$D = 3969 + 4 \cdot 992 = 3969 \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  подходит 2 пары тройки  $(a; b; c)$ :  $(31; 39; 30)$   
 $(-32; -24; -33)$

VI.  $\begin{cases} a-c = -k^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow b-a = k^2 - 1$ , аналогично II случаю  $k=3$

и тогда  $\begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases}$  и тройки чисел:  $(31; 39; 38)$  и  $(-32; -24; -25)$

Ответ:  $(31; 39; 30)$ ,  $(-32; -24; -33)$ ,  $(31; 39; 38)$ ,  $(-32; -24; -25)$



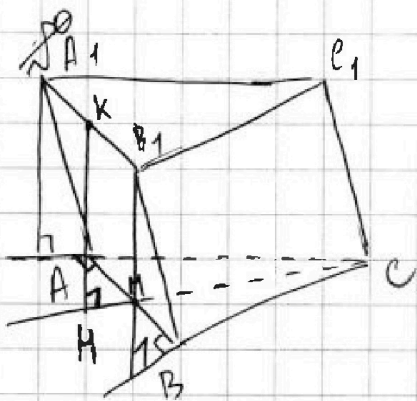
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$S_{A_1C_1CA} = S_{C_1EVB_1} = 6$$

$$S_{AA_1B_1B} = 5$$

$$S_{ABE} = 4$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = ?$$

Решение:

1) Заметим, что т.к.  $S_{A_1C_1CA} = S_{C_1EVB_1}$ ,  $\checkmark$   $ABCA_1B_1C_1$  - призма,  $ABE$  - равнобедренный  
то  $C, M, K$  лежат на одной прямой,  $CM \perp AB$

( $M$  - сер.  $AB$ ,  $K$  - сер.  $A_1B_1$ ,  $CM \perp (ABE)$ ,  $B_1B \perp AB$ ,  $AA_1 \perp AB$ )  
 $\Rightarrow A_1ABB_1$  - призма,  $AA_1 = BB_1 = KM = \frac{5}{2}$

2)  $ABE$ :

$$S_{ABE} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB^2 = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{AB \sqrt{3}}{2} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow AA_1 = BB_1 = KM = \frac{5\sqrt{3}}{16}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Относ. центра:  $\frac{500 \cdot 120!!}{2 \cdot 500 \cdot 120}$

$n!! = n(n-2)(n-4) \dots (n-2k), k \in \mathbb{Z}, n-2k > 0$   
 $n(n-2)(n-4) \dots \cdot 2$  для четных чисел.

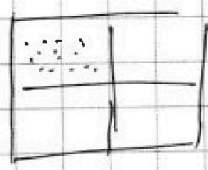
Относ. ср. линии  $\frac{500 \cdot 120!!}{250 \cdot 120!! (250 \cdot 150)!}$

Относ. и центра и ср. линии  $\frac{(25 \cdot 120)!}{15}$

Центр:  $\frac{500 \cdot 120}{2} \cdot \frac{500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \dots (50 \cdot 120 - 6)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$

$500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \dots (500 \cdot 120 - 6)$

$\frac{(500 \cdot 120)!}{8! (500 \cdot 120 - 8)!} \cdot \frac{(500 \cdot 120)}{(500 \cdot 120 - 7) \dots (500 \cdot 120)}$   
 $8!$   
 $500 \cdot 12$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Относительно центра. Будем <sup>красить</sup> ставить 1 произвольную точку и сразу же одну симметричную ей относ. центра  
Тогда способов:

$$\frac{500 \cdot 120}{2} \cdot \frac{500 \cdot 120 - 2}{2} \cdot \frac{500 \cdot 120 - 4}{2} \cdot \frac{(500 \cdot 120 - 6)}{2} \dots$$

$$= \frac{(500 \cdot 120)!!}{16 C_{(500 \cdot 120)}^4 (500 \cdot 120 - 8)!!}$$

для четных  $n!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$

2. Относительно сред. линии. Будем красить 4 произвольные ~~клетки~~ по одну сторону от ср. линии и сразу отмечать симметричные им относительно ср. линии, тогда всего способов (учитывая, что есть 2 сред. линии)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $a < b$
2.  $b - a < 3$
3.  $(a - c)(b - c) = k^2$ ,  $k$  - простое
4.  $a^2 + b = 1000$

I.  $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = k^2 \end{cases}$

$b - a = k^2 - 1$ , но заметим, если  $k \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow k^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$   
 $k \equiv 2 \pmod{2} \Rightarrow k^2 - 1 \equiv 1 \pmod{2}$   
 $b - a = 1 \Rightarrow k = 3$  ~~или~~

$b - a = 8$

$b = a + 8$

$a^2 + a + 8 = 1000$

$a^2 + a - 992 = 0$

$D = 1 + 4000 - 32 = 3969 = (63)^2$

$\sqrt{a} = \frac{-1 \pm 63}{2} = 31 \Rightarrow b = 39, c = 30$

$\sqrt{a} = \frac{-1 - 63}{2} = -32 \Rightarrow b = -24, c = -33$

где ~~ранг~~  $\begin{cases} (31 - c)(39 - c) = 8 \\ (32 + c)(24 + c) = 8 \end{cases}$

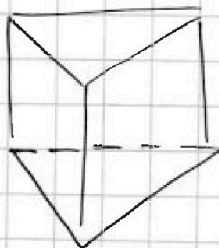
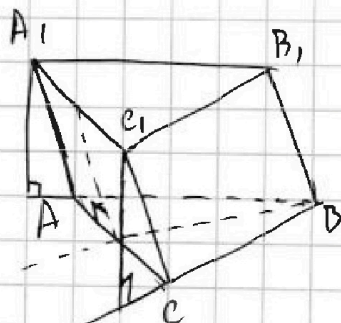
II.  $\begin{cases} a - c = k^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$

$b - a = 1 - k^2$ , но  $k > 1 \Rightarrow 1 - k^2 < 0$ , но  $b > a$

III.  $\begin{cases} a - c = k \\ b - c = k \end{cases}$

$b - a = 0$ , но  $b > a$

$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -k^2 \end{cases} \quad b - a =$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1}}$$

$$t^3 + a + 1 + k(t^2 + t)\sqrt[3]{p-1} + t^2\sqrt[3]{(p-1)^2} = 0$$

$$p > 1$$

$$t^2(k + \sqrt[3]{p-1} + \sqrt[3]{(p-1)^2}) + t(2 + \sqrt[3]{p-1}) + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4\sqrt[3]{p-1} + \sqrt[3]{(p-1)^2} - 4 - 4\sqrt[3]{p-1} - 4\sqrt[3]{(p-1)^2} =$$

$$= -3\sqrt[3]{(p-1)^2} \Rightarrow \sqrt[3]{(p-1)^2} \leq 0 \Rightarrow p$$

$(a, b, c) \in \mathbb{Z}$

1.  $a < b$

2.  $(b-a) \neq 3$

3.  $(a-c)(b-c) = k^2$ ,  $k$  - простое

4.  $a^2 + b = 1000$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b-c=t \\ a-c=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-a=k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = a - b - a = k-1 \\ b-a = t-k \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a = k-1 \\ a-c = 1 \\ b-c = k \end{cases} \Rightarrow$$

t. k.  $b > a$ , но  $b-a = k-1$   
t. k.  $1-k < 0 \Rightarrow a > b$

999 делит 1... 3

$$b^2 = e + k(k-1+a)^2 \quad a = b-k+1 \quad a = c+1$$

$$b = c+k$$

$$(k-1)(k-1+a)^2 + b - k + 1 =$$

$$c^2 + 2ke + k^2 + c^2 + 1 = 1000$$

$$(c+k)^2 + c + 1 = 1000$$

$$(c+k)^2 + c = 999$$

$$k^2 + 2ke + c^2 + c + 999 = 0$$

$$\Delta = c^2 - e^2 - e + 999 = -e + 999$$

$$k = \frac{-2e \pm \sqrt{999 - e}}{2}$$

+



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+6-3-x+4+9 + 14\sqrt{x+6}$$

$$\sqrt{\frac{8}{2}} - \sqrt{\frac{8}{2}} + 7 =$$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{\dots}$$

$$-1.5 \quad 7$$

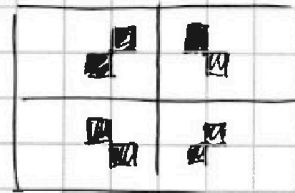
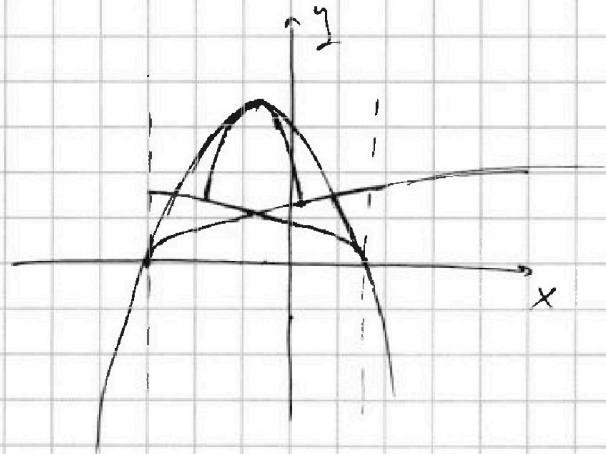


$$x = -\frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} + \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+6}}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+6}}$$

$$g'(x) = \frac{-2x-3}{2\sqrt{(3-x)(x+6)}} \quad \begin{matrix} 9 & 3 \end{matrix}$$

$$4 \leq a \leq 4 \\ 0 \leq b \leq 7$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{3-x-22} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-2^2} \end{cases}$$

1) ОДЗ:  $x \geq -6$   
 $2 \in [-20, 20]$

если  $x \uparrow$ , то  $\sqrt{x+6} \uparrow$   
 $-\sqrt{3-x-22} \uparrow$   
если  $2 \uparrow$ , то  $\sqrt{3-x-22} \uparrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ 2 \in [-20, 20] \end{cases}$

$$\sqrt{x+6} \geq 0$$

$$\sqrt{3-x-22} \leq \sqrt{3+6+40} = 7 \Rightarrow -\sqrt{3-x-22} \geq -7$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-22} + 7 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+6} + \sqrt{3-x-22} + 7 \geq 0$$

то  $\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x-22} + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ 2 = -20 \end{cases}$

$$2|y+18| - 400$$

$$2\sqrt{y+18} - 36 + 20 = 0$$

$$2\sqrt{y-38} = 0 \Rightarrow y = 38$$

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-22} + 7 = 0$$~~

~~$$y - 3x - x^2 + 2 = 0$$~~

~~$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-2^2}$$~~

~~$$|t+2| + 2|t-20| = \sqrt{400-2^2}$$~~

$$(x+6)(3-x-22) = 3x - x^2 - 22x + 18 - 6x - 122 =$$

$$|y+2| + 2|y-18| \leq 20$$

$$y \geq 18: 3y \leq 18 \Rightarrow y = 18$$

$$-25 \leq y < 18: -y \leq -18 \Rightarrow y \geq 18 \text{ реш. нет.}$$

$$y \leq -2: -3y \leq -14$$

$$y \geq \frac{14}{3} \Rightarrow \text{реш. нет.} \Rightarrow y = 18$$

$$= y - 3x - x^2 + 2 - 132 - 22x + 18 - y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

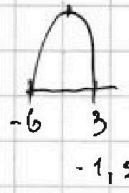
№ 2)

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-2^2}$$

$$18 - 4,5 - 2,25 = 11,25 = \frac{45}{4}$$

OD3:  $x^2 = -6$   
 $2 \in [-20; 20]$



$$y = 18$$

$$y+2 + 2y-36 = \sqrt{400-2^2}$$

$$3y-34 = \sqrt{400-2^2}$$

$$|y+2| + |2y-36| \leq 20$$

$$|y+2| + 2|y-18| = 20$$

$$y+2-34=20$$

$$y=18$$

$$y+2-2y+36=20$$

$$y=18$$

$$-y-2-2y+36=20$$

$$+3y = 14$$

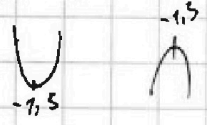
$$y = \frac{14}{3}$$

$$\begin{cases} y=18 \\ y= \end{cases}$$

$$\frac{3-6}{2} = -1,5$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$(x+6)(x-3) = 0$$



$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 \cos(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned} x+6 &= -x+3 \\ 2x &= 4,5 \\ x &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \\ \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

$$p e^{3xi} + p e^{-3xi} + 6 e^{2xi} + 6 e^{-2xi} + 3(p+4) e^{xi} + 3(p+4) e^{-xi} + 10 = 0$$

pe





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. ~~a, b~~  $a_1 b^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$$a_1 b'' = 2-x$$

$$a_1 b^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

~~a, b~~  $b^{22} = \frac{(2-x)}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$

~~b~~

$$b^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}}$$

$$b^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

~~a, b~~

$$a_1 b^{44} = (a_1 b^{17}) (a_1 b^{27})$$

$$(2-x)^4 = \sqrt{\frac{(25x+34)(25x+34)^2 (3x+2)^{31}}{(3x+2)^8}}$$

$$x \neq -\frac{2}{3} \quad (2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$\sqrt{25x+34} = (2-x)^2$$

$$x < -\frac{34}{25}$$

$$x \geq -\frac{34}{25}:$$

$$-25x-34 = 4-4x+x^2$$

$$25x+34 = 4-4x+x^2$$

$$x^2+21x+38=0$$

$$x^2-29x+30=0$$

$$D = 441-152 = 289$$

$$(x+1)(x-30)=0$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{-21+17}{2} = -2 \\ x = \frac{-21-17}{2} = -19 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 30 \end{array} \right.$$

Ответ: -19; -2; -1; 30



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos(2x+x) &= \cos^2 2x \cos x - \sin^2 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos^2 x = \\ &= \cancel{2\cos^2 x} \quad 2\cos^2 x - \cos x - 2\sin x \cos^2 x \\ & \quad 4. \quad 2\sin^2 x \cos x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x = \\ & \quad 4\cos^3 x + \\ & = \cos^3 x + \sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} 4\cos^3 x + 3\sin x \quad \cos(2x+x) &= \cos^2 2x \cos x - \sin^2 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos^2 x = \\ &= \cos^3 x - \cos x - 2\sin x \cos^2 x = \\ & \quad 4\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^3 x = \\ & \quad = 4\cos^3 x - \cos x(3\sin^2 x + 3\cos^2 x) = \\ & \quad = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4p \cos^3 x - 3p \cos x + 6\cos^2 x - 6\sin^2 x + 3p \cos x + 12\cos^3 x + 10 = 0 \\ \therefore 4p \cos^3 x + 12\cos^3 x - 6 + 12\cos x + 10 = 0 \\ 4p \cos^3 x + 12\cos^3 x + 12\cos x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$p \cos^3 x + 3\cos^3 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Пусть  $t = \cos x$ ,  $t \in [-1; 1]$

$$p t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad (0; 1)$$

$$p(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

$$f'(x) = 3pt^2 + 6t + 3 = 3(pt^2 + 2t + 1)$$

$$k^2 = p$$

$$\begin{aligned} p t^2 + 2t + 1 &= 0 \\ k^2 t^2 + 2t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - p, \quad p \leq 1$$

при  $p > 0$ , реш. при  $t = 0$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

$$(t+1 + \sqrt{p-1}t)(t^2 + 1 + t(t+1)^2(p-1) + t^2) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$pe^{6xi} + 6e^{5xi} + 3(p+4)e^{4xi} + 10e^{3xi} + 3(p+4)e^{2xi} + 6e^{xi} + p = 0$$

Пусть  $t = e^{xi}$ ,  $\frac{t+t^{-1}}{2} \in [-1; 1]$   ~~$\frac{t-t^{-1}}{2} \in [-1; 1]$~~

$$pt^6 + 6t^5 + 3(p+4)t^4 + 10t^3 + 3(p+4)t^2 + 6t + p = 0$$

если  $t=0$ , ~~тогда~~ то реш. есть при  $p=0$

если  $t \neq 0$ :

$$pt^3 + \frac{p}{t^3} + 6t^2 + \frac{6}{t^2} + 3(p+4)\left(t + \frac{1}{t}\right) + 10 = 0$$

$$a = t + \frac{1}{t} \quad a^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} \quad a^3 = t^3 + 3t + 3\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in [-2; 2] \quad \Rightarrow t^3 + \frac{1}{t^3} = a^3 - 3a$$

$$p(a^3 - 3a) + 6(a^2 - 2) + 3(p+4)a + 10 = 0$$

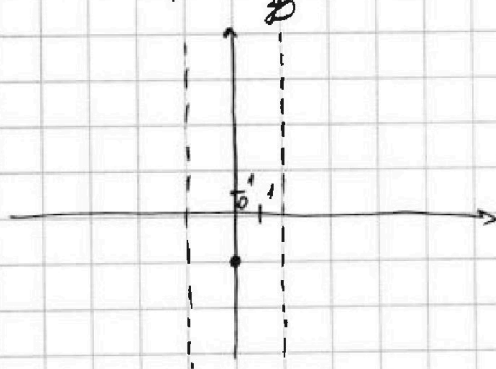
$$pa^3 - 3pa + 6a^2 - 12 + 3pa + 12a + 10 = 0$$

$$pa^3 + 6a^2 + 12a - 2 = 0$$

$$\begin{matrix} -8+24-12 \\ 8+24-12 \end{matrix}$$

$$a^2(p+6) + 2x \quad f(x) = pa^3 + 6a^2 + 12a - 2$$

$$f'(x) = 3pa^2 + 12a + 12 = 3(pa^2 + 4a + 4) = 3(a+2)^2$$



$$a^3 + 6a^2 + 12a - 2 =$$

$$(a+2)^3 - 10$$

$$a^2$$