



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  перескает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_4 = \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}$      $(25x-9)(x-6) \geq 0$      $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$   
 $a_{15} = \sqrt{\frac{20x-9}{x-6}}$      $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$   
 Таким образом:  $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$ .  
 Рассмотрим  $x = \frac{3}{25}$ :  $a_4 = 0$ ;  $a_{15} = 0$ ;  $a_9 = \frac{3}{25} + 3 = 3\frac{3}{25}$ .  
 Это не макс.  $x \neq \frac{3}{25}$  (или все равно в том случае, или никто не равен нулю).  
 $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$   
 Пусть  $a_2 = 6q^{2-1}$ , где  $6$  - первый член прогрессии,  $q$  - знаменатель  
 тогда  $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9}\sqrt{x-6}}$      $x \geq 3 = 9^2 \sqrt{25x-9}\sqrt{x-6} \geq 0$ ;  $x \geq -3$ .  
 $\frac{a_{15}}{a_7} = q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^2}} = \frac{1}{|x-6|}$   
 $q^4 = \frac{1}{|x-6|^2}$ ; но  $q^2 > 0$ ; поэтому  $q^2 = \frac{1}{|x-6|}$ ;  $q = \pm \sqrt{\frac{1}{|x-6|}}$ .  
 $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9}\sqrt{x-6}}$ ;  $q^4 = \frac{(x-3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{|x-6|}$ .  
 Рассмотрим случаи:  $x > 6$  и  $x \leq 6$ .  
 $x > 6$ :  
 $(x+3)^2 = 25x-9$ ;  $x^2 - 19x + 18 = 0$      $\begin{cases} x=18 \\ x=1 \end{cases}$  н.к.  $x \geq 6$ , но перед тем как  $x=18$ .  
 $x \leq 6$ :  
 $(x+3)^2 = -(25x-9)$ ;  $x^2 + 31x = 0$      $\begin{cases} x=-31 \\ x=0 \end{cases}$  н.к.  $x \geq -3$ , но перед тем как  $x=0$ .  
 Итак,  $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$ , только эти значения могут быть. Проверим на  $x=18$ :  
 $a_4 = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$   
 $a_9 = 21$   
 $a_{15} = \frac{21}{24\sqrt{3}}$     Имеем прогрессию  $q = \pm \frac{1}{\sqrt{42}}$  и  $b = \frac{a_4}{q^6}$ .  
 $x=0$ :  
 $a_4 = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$     Имеем прогрессию  $q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$  и  $b = \frac{a_4}{q^6}$ .  
 $a_9 = 3$   
 $a_{15} = \sqrt{\frac{9}{6^3}} = \frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ .  
 Ответ:  $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{y-4x^2+2} \\ 4y+4 + 4|y-5| = \sqrt{81-2^2} \end{cases}$$

Найдём минимальное значение  
 $4y+4 + 4|y-5|$ .

Рассмотрим 3 промежутка:  $y \in (-\infty; -4]$ ;  $y \in [-4; 5]$ ;  $y \in [5; +\infty)$

$y \in (-\infty; -4]$ :  
 $4y+4 + 4|y-5| = -4-4-4y+20 = 16-5y$ . При  $y$  с ростом  $y$  значение убывает, поэтому минимум в крайней точке  $y = -4$ ;  $\min = 16 - 5(-4) = 36$ .

$y \in [-4; 5]$ :  
 $4y+4 + 4|y-5| = 4y+4-4y+20 = 24-3y$ . С ростом  $y$  значение убывает, поэтому  $y = 5$ ;  $\min = 24 - 3 \cdot 5 = 9$ .

$y \in [5; +\infty)$ :  
 $4y+4 + 4|y-5| = 4y+4+4y-20 = 8y-16$ . С ростом  $y$  значение возрастает, поэтому  $y = 5$ ;  $\min = 5 \cdot 5 - 16 = 9$ .

Получим образом:  $4y+4 + 4|y-5| \geq 9$ , и минимальное значение в  $y=5$ .

С другой стороны  $\sqrt{81-2^2} \leq 9$  т.к.  $2^2 > 0$ , и максимальное значение в  $z=0$ . Можно попробовать найти равенство. Значит,  $y=5$ ;  $z=0$ . Подставим эти значения в первое уравнение:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x^2+2} = 2\sqrt{(1-x)(x+5)} \quad \begin{matrix} x+5 \geq 0 & x \in [-5; +\infty) \\ 1-x \geq 0 & x \leq 1 \end{matrix}$$

Пусть  $\sqrt{x+5} = A$ ,  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$   
 $\sqrt{1-x} = B$ , тогда  $A-B+4 = 2AB$  и  $A^2+B^2 = 6$

$$\begin{cases} A-B+4 = 2AB \\ A^2+B^2 = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} A^2+B^2-2AB = 6 - (A-B+4) \\ (A-B)^2 = 6 - (A-B) - 4 \end{matrix}$$

$$(A-B)^2 + (A-B) - 2 = 0$$

$$\begin{matrix} \text{Отсюда } A-B = 1 \\ A-B = -2 \end{matrix}$$

подставим эти значения в первое уравнение:

$$\begin{cases} A = B + 1 \\ 1+4 = 2B(B+1) \end{cases} \quad \begin{cases} A = B + 1 \\ 2B^2 + 2B - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = B + 1 \\ B = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = B - 2 \\ -2+4 = 2B(B-2) \end{cases} \quad \begin{cases} A = B - 2 \\ 2B^2 - 4B - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = B - 2 \\ B = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$x = A^2 - 5 = \left(\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1+1+2\sqrt{11}}{4} - 5 = \frac{\sqrt{11}}{2} - 5 = \frac{\sqrt{11}-4}{2}$$

$$x = B^2 - 1 - 5 = 3\sqrt{13} - 5 = -2 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2, y = 5, z = 0 \\ x = -2 - 2\sqrt{2}, y = 5, z = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + (2p+4) \cos x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

~~Разделим на cos x~~

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$(1-p) \cos^3 x = (\cos x - 1)^3$$

$$(1-p) \sqrt[3]{\frac{\cos x - 1}{\cos x}}$$

$$1 - \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \quad \text{н.е.} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

~~Сделаем замену~~ Сделаем замену  $t = \sqrt[3]{1-p}$  и выразим  $t$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-t} \geq -1, & \begin{cases} 1+t-t \geq 0, & \frac{2-t}{1-t} \geq 0 \end{cases} \\ \frac{1}{1-t} \leq 1, & \begin{cases} 1-1+t \leq 0, & \frac{t}{1-t} \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Максимально образам  $\begin{cases} t=0, \\ t=2; \end{cases}$

Трансформации образам замены:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{1-p} = 0 \\ \sqrt[3]{1-p} = 2 \end{cases} \begin{cases} p=1, \\ p=8; \end{cases} \begin{cases} p=1, \\ p=-7; \end{cases} \cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}, x = \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right)$$

Ответ:  $\begin{cases} p=1, \\ p=-7; \end{cases} x = \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим точку пересечения  $AD$  и  $u_2$  за  $T$ . Тогда по лемме Гюсса  $CT \parallel DE$  ( $C$  и  $T$  через  $P$  и  $A$  соответственно принадлежат прямой  $u_2$ ,  $B$  и  $D$  соответственно).

$\angle CAT = \angle TCD$  (углы между касательной и хордой равны по лемме Гюсса, стягиваемой этой хордой, как и в окружности).

$\angle TCD = \angle EDP$  (как соответственные при параллельных  $CT \parallel DE$  и секущей  $CD$  через  $D$ ).

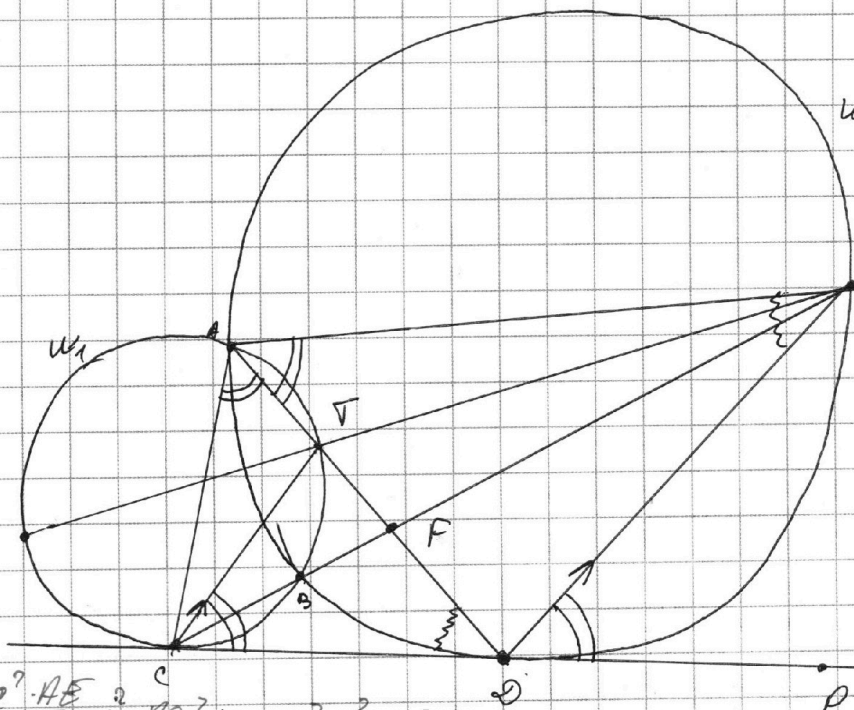
$\angle EAD = \angle EDP$  (углы между касательной и хордой равны по лемме Гюсса, стягиваемой этой хордой, как и в окружности).

Тогда мы имеем  $\angle CAT = \angle EAD \Rightarrow AT \parallel BE$  (как соответственные).

Обозначим за  $F$  т. пересечения  $CE$  и  $AD$ . Тогда по лемме Гюсса

$$\frac{CF}{FE} = \frac{2}{5}. \text{ По свойству биссектрисы } \angle ACF \Rightarrow \frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$



$\angle AED = \angle ADC$   
(углы между касательной и хордой).

$\triangle ACD \sim \triangle ADE$   
по 2 углам  
 $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$

$$AC \cdot AE = AD^2$$

$\frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$ . Умножим  
2 углами.

$$\frac{AC \cdot AE}{AE^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{AD^2}{AE^2}; \quad AC^2 = \frac{2}{5} AD^2$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

по теореме  $\frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ . Ответ:  $\sqrt{\frac{2}{5}}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

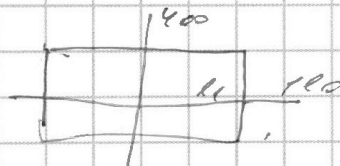
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти количество способов расстановки с сумметрией относительно первой и второй линии и взаимно перпендикулярно относительно каждой из них.

- 1) Симметрия относительно  $l_1$  - первой горизонтальной линии
- 2) Симметрия относительно  $l_2$  - второй горизонтальной линии
- 3) Пересекающаяся, перпендикулярные диаметры - симметрия относительно  $l_1$  и  $l_2$ .

Симметрия относительно  $l_1$  и  $l_2$  одновременно - это симметрия относительно их точки пересечения, то есть относительно центра. Значит, искомым числом будет сумма всех способов с симметрией относительно  $l_1$ , способов с симметрией относительно  $l_2$ , и вместе способов с симметрией относительно центра (т.е. это внутреннее кольцо).

Пусть  $l_1$  параллельна стороне 400,  $l_2$  параллельна стороне 100.



Количество способов расстановки с симметрией относительно  $l_1$  - это число точек на отрезке  $l_1$  и точек на отрезке  $l_2$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

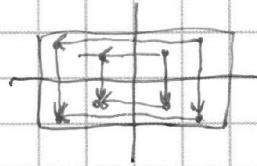
прямоугольнике (т.е. вогнуте и вогнут по ширине горизонтально закрашено). Симметрично к ребро симметрично же.

и оно равно  $C_{20000}^4$



Количество способов выбрать точки с симметрией симметрично диагональ равно числу выборов 2 точек на четверти прямоугольника (симметричные 2 четверти будут ортогонально диагональ)

и оно равно  $C_{10000}^2$



Площа симметрично число пересечений закрашенных равно

$$2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$$

Ответ:  $2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

из равенства  $(a - c)(b - c) = p^2$  следует или следующие варианты или н.к.р-цислы.

$$a - c = p^2$$

$$a - c = -p^2$$

$$a - c = p$$

$$a - c = -p$$

$$a - c = 1$$

$$a - c = -1$$

$$b - c = 1$$

$$b - c = -1$$

$$b - c = p$$

$$b - c = -p$$

$$b - c = p^2$$

$$b - c = -p^2$$

$$b - a = 1 - p^2 < 0$$

$$b - a = p^2 - 1$$

$$b - a = 0$$

$$b - a = 0$$

$$b - a = p^2 - 1$$

$$b - a = 1 - p^2 < 0$$

и)  $b > a$  по условию

$$= (p - 1)(p + 1)$$

0

0

то получаем н.к.р.  $b > 0$

менее нуля

$$\text{Получаем } b - a = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

Если  $b - a \neq 3$ , то  $p - 1 \neq 3$  и  $p + 1 \neq 3$ . Значит,  $p \not\equiv 1 \pmod{3}$   
 $p \not\equiv 2 \pmod{3}$ .

$$\text{Значит, } b - a = 3^2 - 1 = 8$$

либо  $p \equiv 0 \pmod{3}$   $p = 3$ ,

либо  $p = 3$  (единственная простое, делящаяся на 3, это 3).

и для этой пары  $a, b$   $b - c = \pm 1$   
два случая.  $a - c = \pm 1$

решив  $a = b - 8$  в равенстве  $a^2 + b = 710$

$$(b - 8)^2 + b - 710 = 0; \quad b^2 - 15b - 646 = 0; \quad (b - 34)(b + 18) = 0$$

$$\begin{cases} b = 34 \\ b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -18 \\ a = -18 - 8 = -27 \\ c = a - 1 = -28 \\ c = b + 1 = -18 \end{cases}$$

найдем и проверим ответ.

$$\text{Ответ: } a = -27; b = -18; c = -28$$

$$a = -27; b = -18; c = -18$$

$$a = 26; b = 34; c = 25$$

$$a = 26; b = 34; c = 35$$

$$\begin{cases} b = 34 \\ a = 34 - 8 = 26 \\ c = a - 1 = 25 \\ c = b + 1 = 35 \end{cases}$$



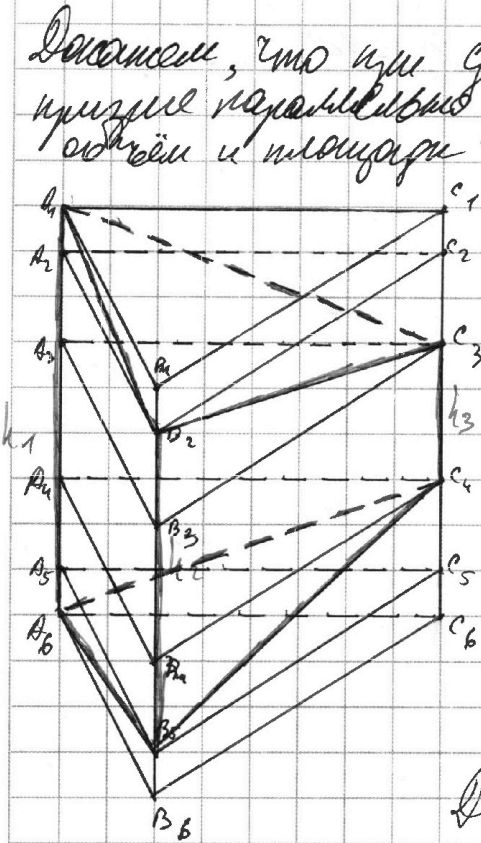


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Докажем, что при срезе любой плоскостью в призме параллельные грани дадут равные отрезки и площади граней. Пусть вставим плоскость  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ . Тогда при срезе  $B_2 B_3$  у нас  $A_1 A_3 A_4 B_4$  и  $B_1 B_2 B_3$  — это параллелограммы.

А в у нас  $A_1 A_2 B_1 B_2$  и  $A_3 A_4 B_3 B_4$  — это параллелограммы и т.д.

$$S = \frac{A_1 A_2 + A_3 A_4}{2} \cdot h, \text{ где } h \text{ — высота, а}$$

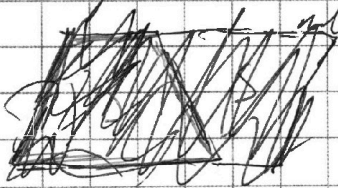
длины ребер не меняются.

Докажем непосредственно обратное.

~~Если две параллельные грани дадут равные отрезки и площади, то плоскость сечения параллельна этим граням.~~

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{основания}} \cdot h$ . Длина ребер у нас не меняется, поэтому  $V$  не меняется.

Значит, при срезе любой плоскостью параллельно двум граням  $S_{\text{и } V}$  не меняется. Если же ребра не параллельны, то площадь сечения будет меньше, чем площадь  $S$ , следовательно, в сечении площадь сечения будет меньше, чем площадь  $S$ . Это можно доказать по формуле: площадь сечения  $S_{\text{сечения}} = S \cdot \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между плоскостью сечения и плоскостью грани.



Если же ребра не параллельны, то площадь сечения будет меньше, чем площадь  $S$ .



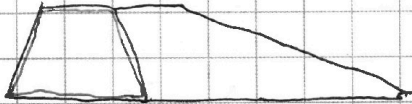
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Площадь среза для 2 уранов с диаметром 3, а  
высотой "ураганов" без сечения.



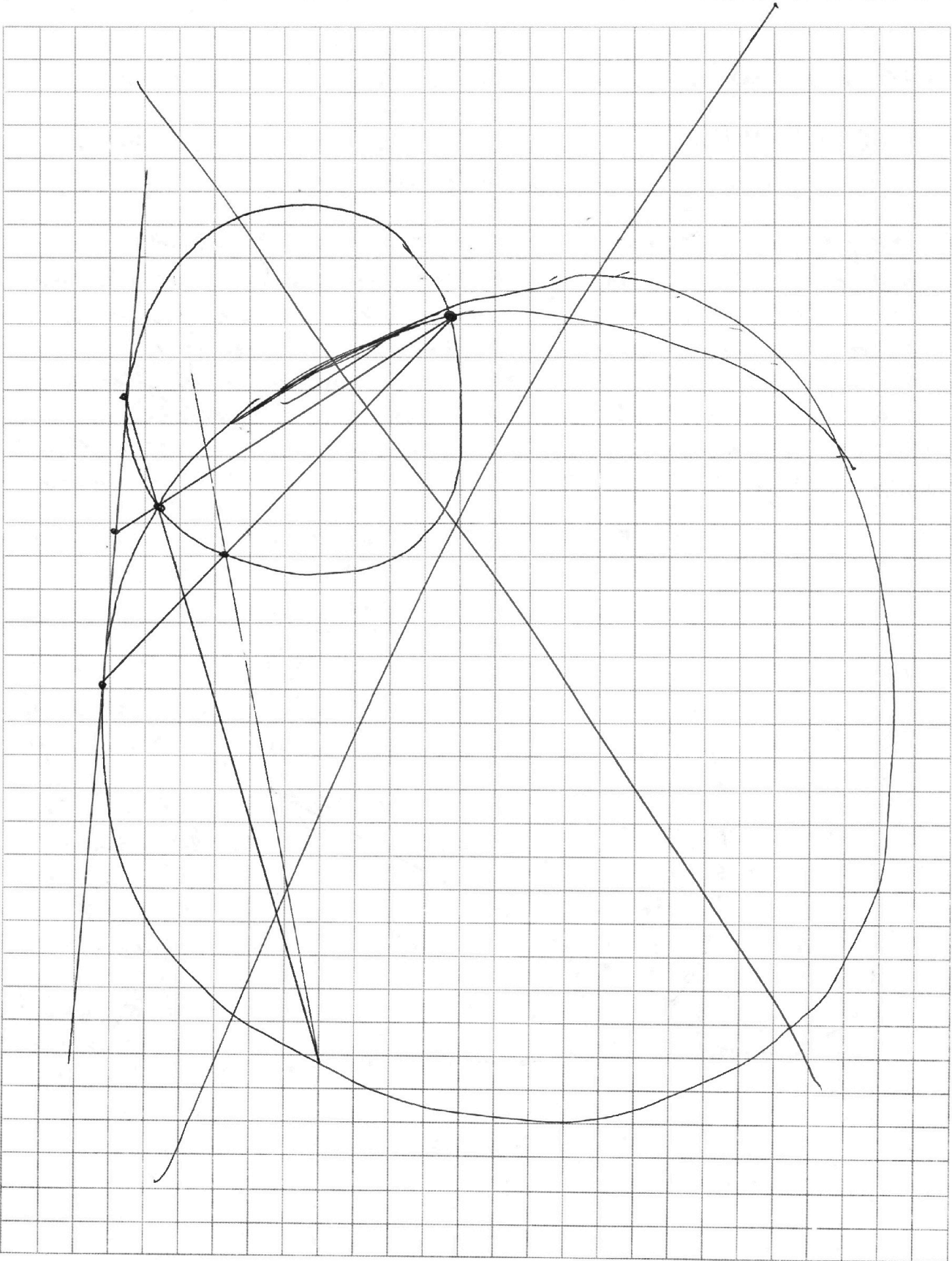


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



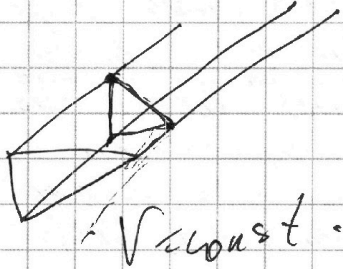


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

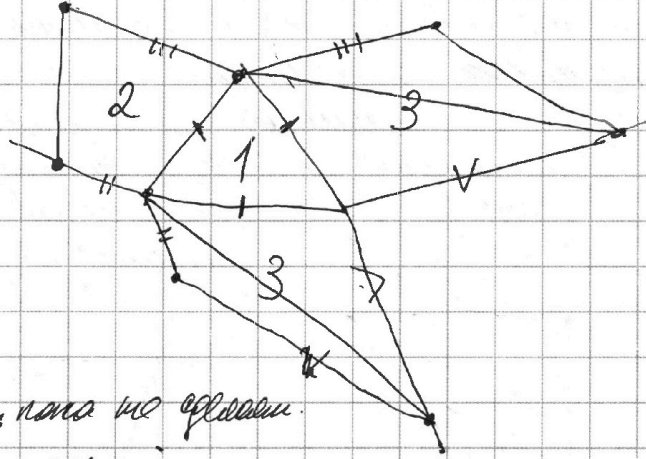
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



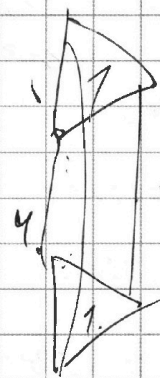
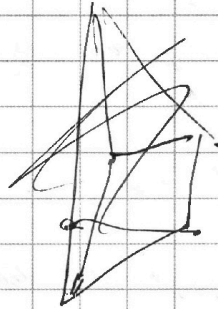
$V_{const}$   
 $S_{const}$

*Значения, пока не определены  
у прямоугольника.*



3 3 2  
3 3 2  
6 6 4

3 3 2  
3 2 3  
6 5 5







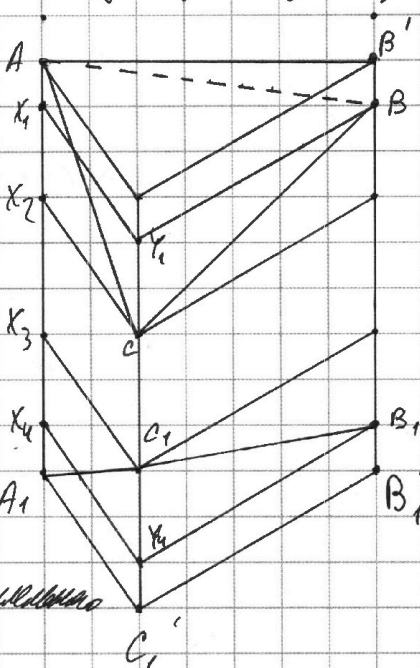
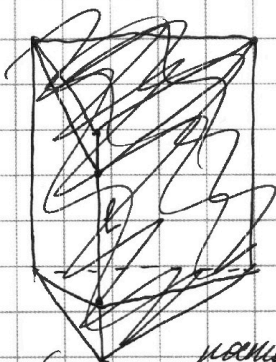
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  
☒
- 2  
☒
- 3  
☒
- 4  
☒
- 5  
☒
- 6  
☒
- 7  
☒

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что мы можем свести задачу к задаче на поиск минимума функции  $f(x,y,z)$  на симплексе  $\Delta$ . Пусть  $V_0$  - объем тетраэдра  $ABCA_1B_1C_1$ . Пусть  $S_{ABCA_1B_1C_1}$  - площадь поверхности тетраэдра.



пусть  $S_{ABCA_1B_1C_1}$  - площадь поверхности тетраэдра  $ABCA_1B_1C_1$ , а  $S_{ABCA_1B_1C_1}$  - площадь поверхности тетраэдра  $A_1B_1C_1A$ .

пусть  $S_{ABCA_1B_1C_1}$  - площадь поверхности тетраэдра  $ABCA_1B_1C_1$ , а  $S_{ABCA_1B_1C_1}$  - площадь поверхности тетраэдра  $A_1B_1C_1A$ .

$S_{ABCA_1B_1C_1}$  - площадь поверхности тетраэдра  $ABCA_1B_1C_1$ , а  $S_{ABCA_1B_1C_1}$  - площадь поверхности тетраэдра  $A_1B_1C_1A$ .

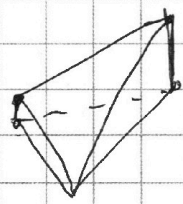
а  $S_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2} (S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1})$ .

Аналогично  $S_{A_1B_1C_1A}$  - площадь поверхности тетраэдра  $A_1B_1C_1A$ .

$S_{h_{mix}}$

Докажем справедливость утверждения

$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_0$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ \_  
ИЗ  
\_ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten notes and calculations:

- Top left:  $ED = 2R \cdot \sin \alpha$ ,  $u_2$
- Right side:  $\frac{PQ^2}{BN}$ ,  $\frac{u_1}{AM}$ ,  $\frac{u_2}{AM}$ ,  $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2R}$ ,  $2 \cdot \frac{1}{AM}$
- Bottom left:  $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 +$ ,  $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \sqrt{3}$ ,  $\frac{4 \cdot 3}{9} = \frac{4}{3}$ ,  $\frac{4}{3 \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{27}}$
- Bottom center:  $2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$
- Bottom right:  $\frac{(\sqrt{3} + 2)}{2}$ ,  $\frac{2}{\sqrt{3}} = 3$ ,  $1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 3$ ,  $a = 2\sqrt{3}$
- Small diagram on the left shows a cube-like structure with edges of length 2 and  $2\sqrt{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

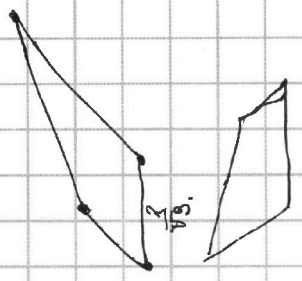
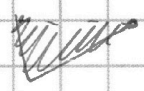
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

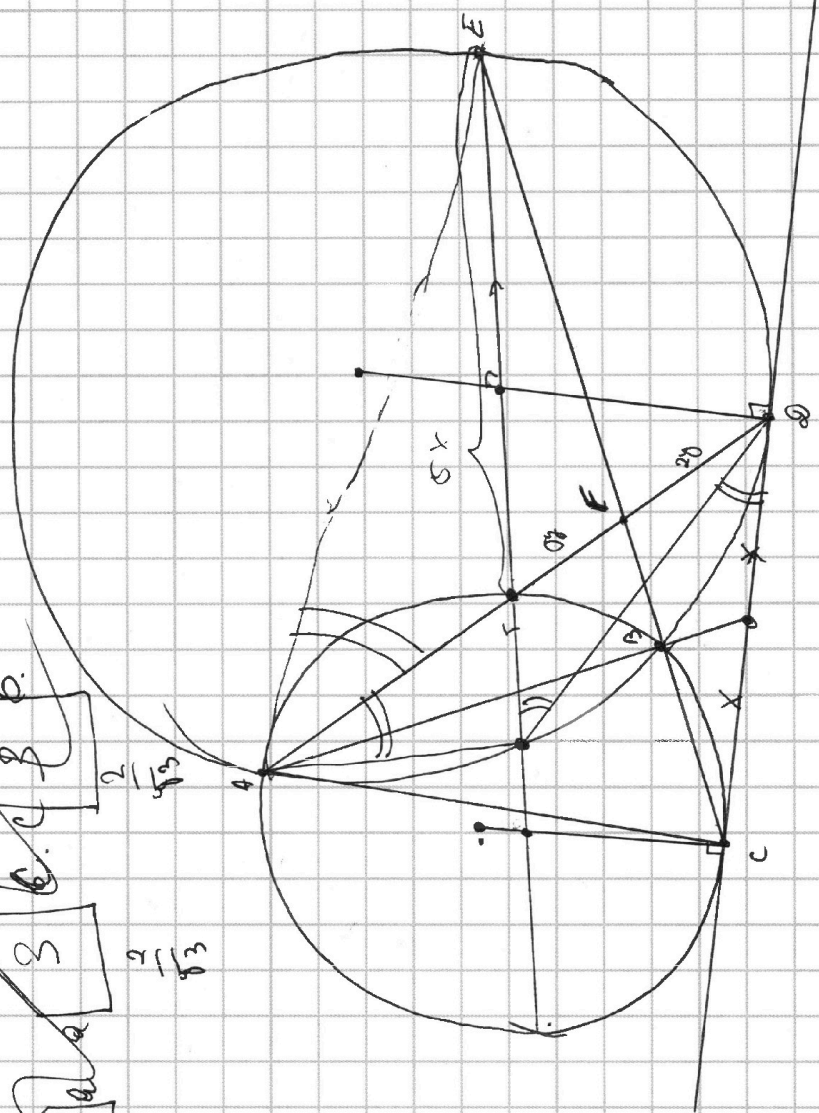
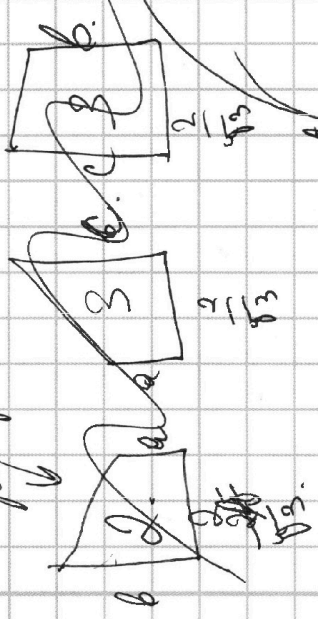
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

100 100 100 100 100

$CF = \frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $FE = \frac{2}{\sqrt{3}}$



$a = b$



$a \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2, a = \sqrt{3}$   
 $\frac{a+c}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a+c}{\sqrt{3}} = 2$   
 $\frac{\sqrt{3}+c}{\sqrt{3}} = 2$   
 $\frac{c}{\sqrt{3}} = 2$   
 $c = 2\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x+4z} + 4 = 2\sqrt{4z-4x-x^2}$   
 $14 + 4 + 4 + 4 - 5 = \sqrt{61-2^2}$   
 $p(\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos^2 x + 10$   
 $p(4\cos^3 x - 3\cos x) = 3(p+4)\cos x =$   
 $= 12\cos^3 x - 6 + 10.$

$4p\cos^3 x - 3p\cos x + 3p\cos^2 x + 12\cos x - 12\cos^2 x - 4 = 0$   
 $4p\cos^3 x - 12\cos^2 x + (12\cos x - 4) = 0$   
 $p\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0.$

$p-1=0$  *константа*  
 $p=1$   
 $p \in \mathbb{R}$   
 $p-1 \in \mathbb{R}$   
 $p-1 = 1$   
 $p = 2$   
 $p-1 = -2$   
 $p = -1$   
 $x = -1$   
 $(1-p)x^2 = (x-1)^3$   
 $1-p = \left(\frac{x-1}{x}\right)^3$

$1 - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{1-p}$   
 $x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}$   $\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}$

$-1 \leq \frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}} \leq 1$   
 $\frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}} \leq 1$   
 $-1 \leq \frac{1}{1-t} \leq 1$

$\cos(x+2x) =$   
 $= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$   
 $= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x =$   
 $= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x =$   
 $= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1-\cos^2 x) =$   
 $= 4\cos^3 x - 3\cos x.$

$x \in \mathbb{R}$   
 $1-x \in \mathbb{R}$   
 $6 \cdot 4z = 0$   
 $z = \frac{3}{5}$

$px^2 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$   
 $x \in (-1; 1)$   
 $(p-1)x^2 + (x-1)^3 = 0$   
 $(p-1)x^2 = -(x-1)^3$   
 $\text{или } p-1 = 0$  *бесполезно*  
 $\text{или } p-1 = \frac{-(x-1)^3}{x^2}$



