



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB перескает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_4 = \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}$ $(75x-9)(x-6) \geq 0$ $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 $a_{15} = \sqrt{\frac{20x-9}{x-6}}$ $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 Таким образом: $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$.
 Рассмотрим $x = \frac{9}{25}$: $a_4 = 0$; $a_{15} = 0$; $a_9 = \frac{9}{25} + 3 = 0$. Тогда
 быть не может. $x \neq \frac{9}{25}$ (или все равно в том случае, или никто не равен нулю).
 $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 Пусть $a_2 = 6q^{2-1}$, где 6 - первый член прогрессии, q - знаменатель
 тогда $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9}\sqrt{x-6}}$ $x \geq 3 = 9^2 \sqrt{25x-9}\sqrt{x-6} \geq 0$; $x \geq -3$.
 $\frac{a_{15}}{a_7} = q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^2} \sqrt{x-6}} = \frac{1}{(x-6)^2}$
 $q^4 = \pm \frac{1}{(x-6)^2}$; но $q^4 > 0$; поэтому $q^4 = \frac{1}{(x-6)^2}$; $q = \pm \sqrt{\frac{1}{(x-6)^2}}$.
 $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9}\sqrt{x-6}}$; $q^4 = \frac{(x-3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{(x-6)^2}$.
 Рассмотрим случаи: $x > 6$ и $x \leq 6$.
 $x > 6$:
 $(x+3)^2 = 25x-9$; $x^2 - 19x + 18 = 0$ $\begin{cases} x=18 \\ x=1 \end{cases}$ н.к. $x > 6$, но перед тем как $x=18$.
 $x \leq 6$:
 $(x+3)^2 = -(25x-9)$; $x^2 + 31x = 0$ $\begin{cases} x=-31 \\ x=0 \end{cases}$ н.к. $x \geq -3$, но перед тем как $x=0$.
 Значит, $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$, только эти значения могут быть. Проверим на $x=18$:
 $a_4 = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$
 $a_9 = 21$
 $a_{15} = \frac{21}{24\sqrt{3}}$ Значу увеличим $q = \pm \frac{1}{\sqrt{4} \cdot 2}$ и $b = \frac{1}{a_4 \cdot q^6}$.
 $x=0$:
 $a_4 = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$ Значу увеличим $q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ и $b = \frac{a_4}{q^6}$.
 $a_9 = 3$
 $a_{15} = \sqrt{\frac{9}{6^3}} = \frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.
 Ответ: $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{y-4x^2+2} \\ 4y+4 + 4|y-5| = \sqrt{81-2^2} \end{cases}$$

Найдём минимальное значение
 $4y+4 + 4|y-5|$.

Рассмотрим 3 промежутка: $y \in (-\infty; -4]$; $y \in [-4; 5]$; $y \in [5; +\infty)$

$y \in (-\infty; -4]$:
 $4y+4 + 4|y-5| = -4-4-4y+20 = 16-5y$. С ростом y значение убывает, поэтому минимум в крайней точке $y = -4$; $\min = 16 - 5(-4) = 36$.

$y \in [-4; 5]$:
 $4y+4 + 4|y-5| = 4y+4-4y+20 = 24-3y$. С ростом y значение убывает, поэтому $y = 5$; $\min = 24 - 3 \cdot 5 = 9$.

$y \in [5; +\infty)$:
 $4y+4 + 4|y-5| = 4y+4+4y-20 = 8y-16$. С ростом y значение возрастает, поэтому $y = 5$; $\min = 5 \cdot 5 - 16 = 9$.

Получим образом: $4y+4 + 4|y-5| \geq 9$, и минимальное значение в $y=5$.

С другой стороны $\sqrt{81-2^2} \leq 9$ т.к. $2^2 > 0$, и максимальное значение в $z=0$. Можно попробовать найти равенство. Значит, $y=5$; $z=0$. Подставим эти значения в первое уравнение:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x^2+2} = 2\sqrt{(1-x)(x+5)}$$

Пусть $\sqrt{x+5} = A$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, $1-x \geq 0$
 $\sqrt{1-x} = B$, тогда $A-B+4 = 2AB$ и $A^2+B^2 = 6$

$$\begin{cases} A-B+4 = 2AB \\ A^2+B^2 = 6 \end{cases}$$

$A^2+B^2 - 2AB = 6 - (A-B+4)$ $(A-B)^2 = 6 - (A-B) - 4$

$$(A-B)^2 + (A-B) - 2 = 0$$

Отсюда $A-B = 1$
 $A-B = -2$

подставим эти значения в первое уравнение:

$$\begin{cases} A = B + 1 \\ 1+4 = 2B(B+1) \end{cases}; \begin{cases} A = B + 1 \\ 2B^2 + 2B - 5 = 0 \end{cases}; \begin{cases} A = B + 1 \\ B = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = B - 2 \\ -2+4 = 2B(B-2) \end{cases}; \begin{cases} A = B - 2 \\ 2B^2 - 4B - 2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} A = B - 2 \\ B = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$x = A^2 - 5 = \left(\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1+1+2\sqrt{11}}{4} - 5 = \frac{\sqrt{11}}{2} - 5 = \frac{\sqrt{11}-4}{2}$$

$$x = B^2 - 1 - 5 = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1+1+2\sqrt{13}}{4} - 5 = \frac{\sqrt{13}}{2} - 5 = \frac{\sqrt{13}-4}{2}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2, y = 5, z = 0 \\ x = -2\sqrt{2} - 2, y = 5, z = 0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4) = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

~~Разложение~~

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$(1-p) \cos^3 x = (\cos x - 1)^3$$

$$(1-p) \sqrt[3]{\frac{\cos x - 1}{\cos x}}$$

$$1 - \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \quad \text{н.е.} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

~~Сделаем~~ Сделаем замену $t = \sqrt[3]{1-p}$ и выразим t

$$\begin{cases} \frac{1}{1-t} \geq -1, & \begin{cases} 1+t-t > 0, & \frac{2-t}{1+t} > 0 \\ 1-t > 0 \end{cases} \\ \frac{1}{1-t} \leq 1, & \begin{cases} 1-1+t \leq 0, & \frac{t}{1+t} \leq 0 \\ 1-t < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Максимально $t = 0$,
 $t \geq 2$

Трансформации обозначения замены:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{1-p} = 0 & \begin{cases} p = 1 \\ p \leq -7 \end{cases} \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 & \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ p \leq -7 \end{cases} \end{cases} \quad \cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}, \quad x = \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right)$$

Ответ: $\begin{cases} p = 1 \\ p \leq -7 \end{cases}; \quad x = \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим точку пересечения AD и u_2 за T . Тогда по лемме Гюсса $CT \parallel DE$ (C и T через P и A соответственно принадлежат прямой u_2 , B и D соответственно).

$\angle CAT = \angle TCD$ (углы между касательной и хордой равны по лемме Гюсса, стянутой этой хордой, как и внутренними).

$\angle TCD = \angle EDP$ (как соответственные при параллельных $CT \parallel DE$ и секущей CD через D).

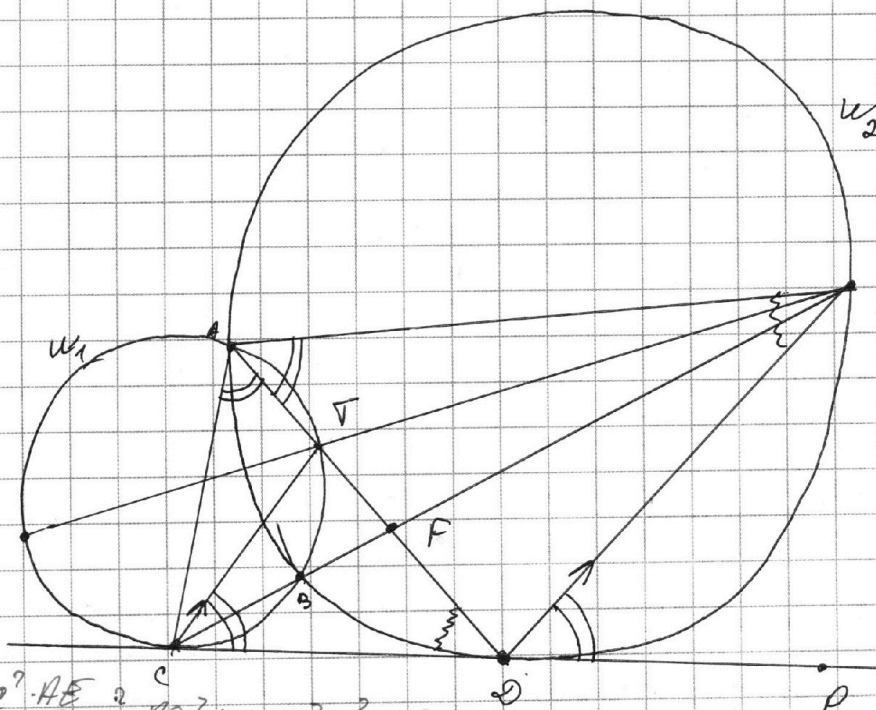
$\angle EAD = \angle EDP$ (углы между касательной и хордой равны по лемме Гюсса, стянутой этой хордой, как и внутренними).

Тогда из равенств $\angle CAT = \angle EAD$. $\Rightarrow AT$ — биссектриса $\angle A$ в $\triangle ABE$.

Обозначим за F т. пересечения CE и AD . Тогда по лемме Гюсса $\frac{CF}{FE} = \frac{2}{5}$. По свойству биссектрисы в $\triangle ABE$ $\frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE}$.

$$\frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$



$\angle AED = \angle ADC$
(углы между касательной и хордой).

$\triangle ACD \sim \triangle ABE$
по 2 углам
 $\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{DE}$

$$AC \cdot AE = AD^2$$

$\frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$. Умножим
2 уравнения.

$$\frac{AC \cdot AE}{AE^2} = \frac{2}{5} AD^2; \quad AC^2 = \frac{2}{5} AD^2$$

$$\frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

по теореме $\frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Ответ: $\sqrt{\frac{2}{5}}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

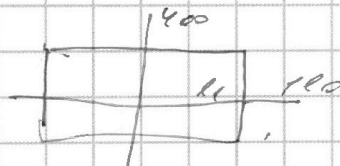
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти количество способов расстановки с сумметрией относительно первой и второй линии и взаимно перпендикулярно относительно каждой из них.

- 1) Симметрия относительно l_1 - первой горизонтальной линии
- 2) Симметрия относительно l_2 - второй горизонтальной линии
- 3) Пересекающаяся, перпендикулярные диаметры - симметрия относительно l_1 и l_2 .

Симметрия относительно l_1 и l_2 одновременно - это симметрия относительно их точки пересечения, то есть относительно центра. Значит, искомым числом будет сумма всех способов с симметрией относительно l_1 , способов с симметрией относительно l_2 , и вместе способов с симметрией относительно центра (т.е. это внутреннее кольцо).

Пусть l_1 параллельна стороне 400, l_2 параллельна стороне 100.



Количество способов расстановки с симметрией относительно l_1 - это число точек на отрезке l_1 и точек на отрезке l_2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

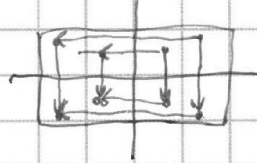
прямоугольнике (т.е. внутри и вокруг по линии диаметра
задачи). Относительно \square равно диаметра же.

и оно равно C_{20000}^4



Количество способов выбрать точки с симметрией
относительно диаметра равно числу выборов 2 точек
на четверти прямоугольника (составные 3 четверти
будут ортогонально диаметру)

и оно равно C_{10000}^2



Площа симметрично число пересечений диаметра
равно

$$2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$$

$$\text{Ответ: } 2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

из равенства $(a - c)(b - c) = p^2$ следует лишь следующие возможности (н.с. p — простое).

$a - c = p^2$	$a - c = -p^2$	$a - c = p$	$a - c = -p$	$a - c = 1$	$a - c = -1$
$b - c = 1$	$b - c = -1$	$b - c = p$	$b - c = -p$	$b - c = p^2$	$b - c = -p^2$

$b - a = 1 - p^2 < 0$	$b - a = p^2 - 1$	$b - a = 0$	$b - a = 0$	$b - a = p^2 - 1$	$b - a = 1 - p^2 < 0$
не $b > a$ по условию	$= (p - 1)(p + 1)$	\emptyset	\emptyset		не $b > a$ по условию
		не $b > a$ по условию			

Получаем $b - a = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Если $b - a \neq 3$, то $p - 1 \neq 3$ и $p + 1 \neq 3$. Значит, $p \not\equiv 1 \pmod{3}$, $p \not\equiv 2 \pmod{3}$.

Значит, $b - a = 3^2 - 1 = 8$.

и для этой пары a, b два случая: $a - c = 1$ и $a - c = -1$.

либо $p \equiv 0 \pmod{3}$, $p = 3$,
либо $p = 3$ (единственное простое, делящееся на 3, $\pmod{3}$).

решив $a = b - 8$ в равенстве $a^2 + b = 710$.

$$(b - 8)^2 + b - 710 = 0; \quad b^2 - 15b - 646 = 0; \quad (b - 34)(b + 18) = 0.$$

$$\begin{cases} b = 34 \\ b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -18 \\ a = -18 - 8 = -27 \\ \begin{cases} c = a - 1 = -28 \\ c = b + 1 = -18 \end{cases} \\ b = 34 \\ a = 34 - 8 = 26 \\ \begin{cases} c = a - 1 = 25 \\ c = b + 1 = 35 \end{cases} \end{cases}$$

найдем и проверим ответ.

Ответ: $a = -27, b = -18, c = -28$
 $a = -27, b = -18, c = -18$
 $a = 26, b = 34, c = 25$
 $a = 26, b = 34, c = 35$.

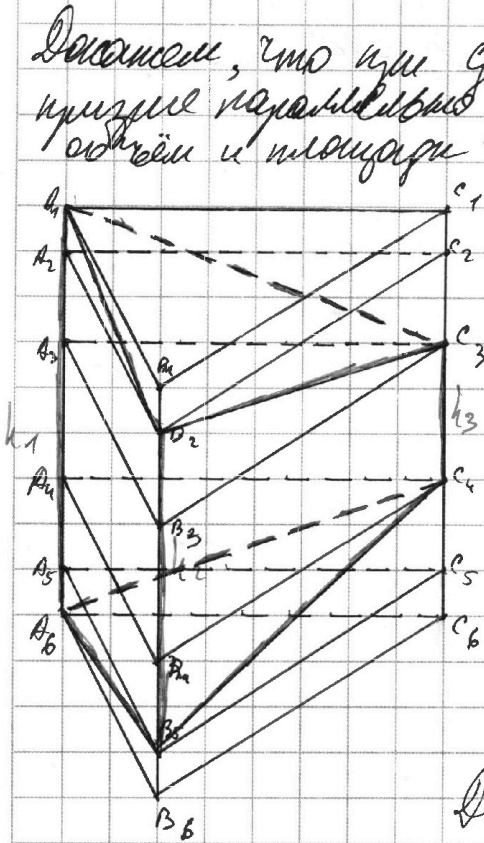


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Докажем, что при срезе любой плоскостью в призме параллельные грани делятся отрезками в равном отношении и площади граней сходятся к площади грани основания $A_1B_1C_1$. Определим высоту призмы $A_1B_1C_1$ и $A_6B_6C_6$. Тогда при срезе B_2B_5 у нас $A_1C_3A_6C_4$ и B_2B_5 — это средняя линия B_1B_6 .

А в утраве $A_1B_1C_1$ и $A_6B_6C_6$ — это площади $A_1B_1C_1$ и $A_6B_6C_6$ соответственно.

$$S = \frac{A_1B_1C_1 + A_6B_6C_6}{2} \cdot h, \text{ где } h \text{ — высота, и}$$

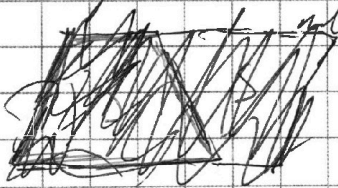
площади сходятся к площади основания.

Докажем непрерывность сечения.

~~Сечение призмы плоскостью, параллельной основанию, делит ее на две части: меньшую призму и большую усеченную призму.~~

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{основания}} \cdot h$. Длина боковой грани не меняется, поэтому V не меняется.

Значит, при срезе боковой грани параллельно друг другу S и V не меняются. Высота призмы h постоянна, следовательно, площадь сечения S постоянна. Это можно доказать по формуле: площадь сечения S равна $S_{\text{основания}} + S_{\text{верхней грани}} + S_{\text{боковой поверхности}}$.



Площадь сечения S постоянна, следовательно, высота призмы не меняется.



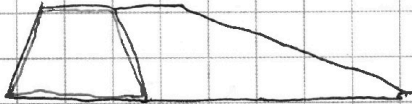
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Площадь среза для 2-ух граней с высотой 3, а
высотой "уходим" без сдвигания.



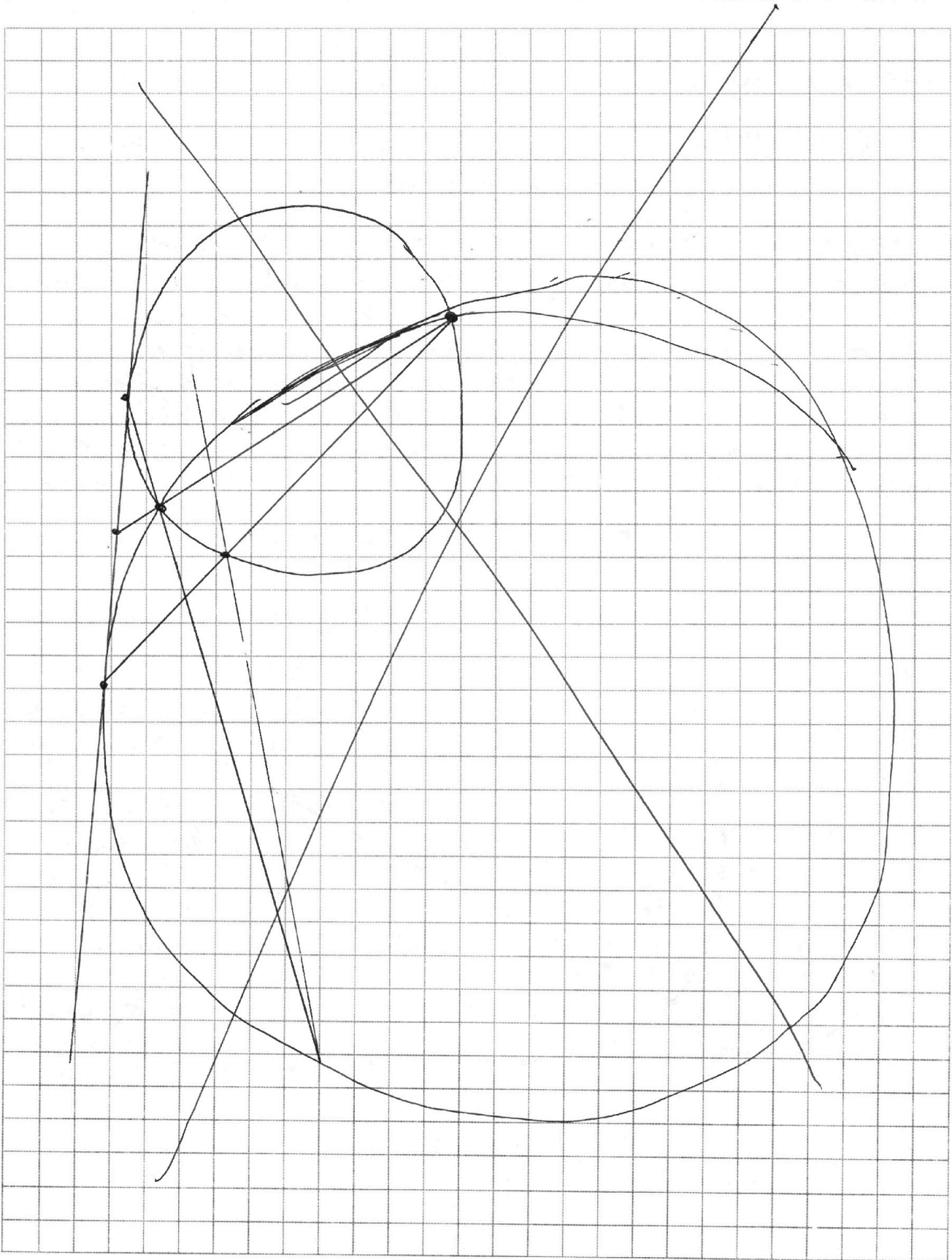


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



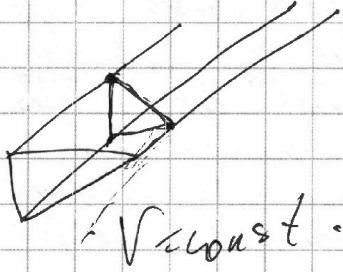


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

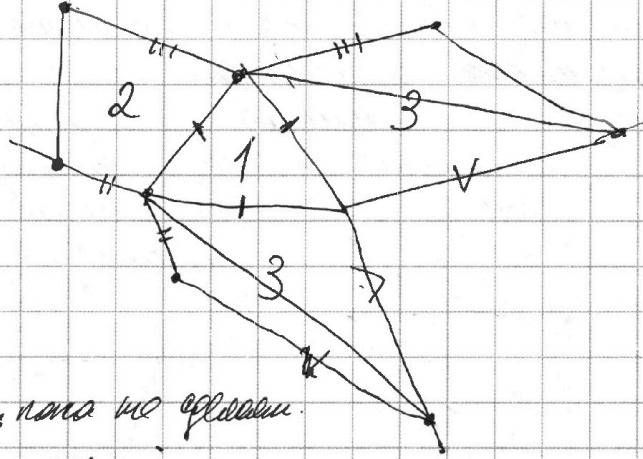
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



V_{const} .

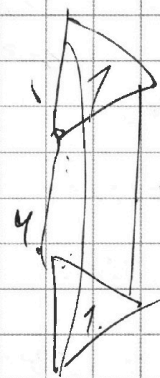
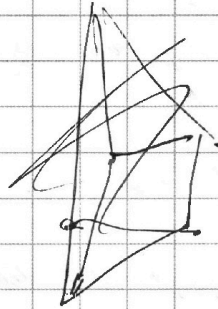
S_{const} .

*Значит, пока не будем
упрощать.*



3 3 2
3 3 2
6 6 4

3 3 2
3 2 3
6 5 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R$
 $\frac{PN}{\sin \angle PN}$
 $\frac{KN}{\sin \angle KN}$
 $\frac{AM}{\sin \angle AM}$
 $\frac{AN}{\sin \angle AN}$
 $\frac{2}{\sqrt{3}} = 3$
 $1 + \frac{a}{\sqrt{3}} = 3$
 $a = 2\sqrt{3}$
 $2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$
 $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 +$
 $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \sqrt{3} =$
 $\frac{4 \cdot 3}{9} = \frac{4}{3}$
 $\frac{4}{3} = \frac{4}{\sqrt{27}}$
 $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 1$
 $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $\frac{4}{3}$
 $\frac{4}{3} = \frac{4}{\sqrt{27}}$
 $\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$
 $\frac{2}{\sqrt{3}} = 3$
 $1 + \frac{a}{\sqrt{3}} = 3$
 $a = 2\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

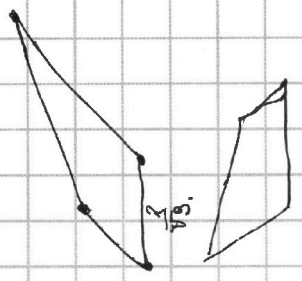
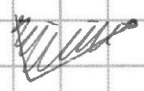
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

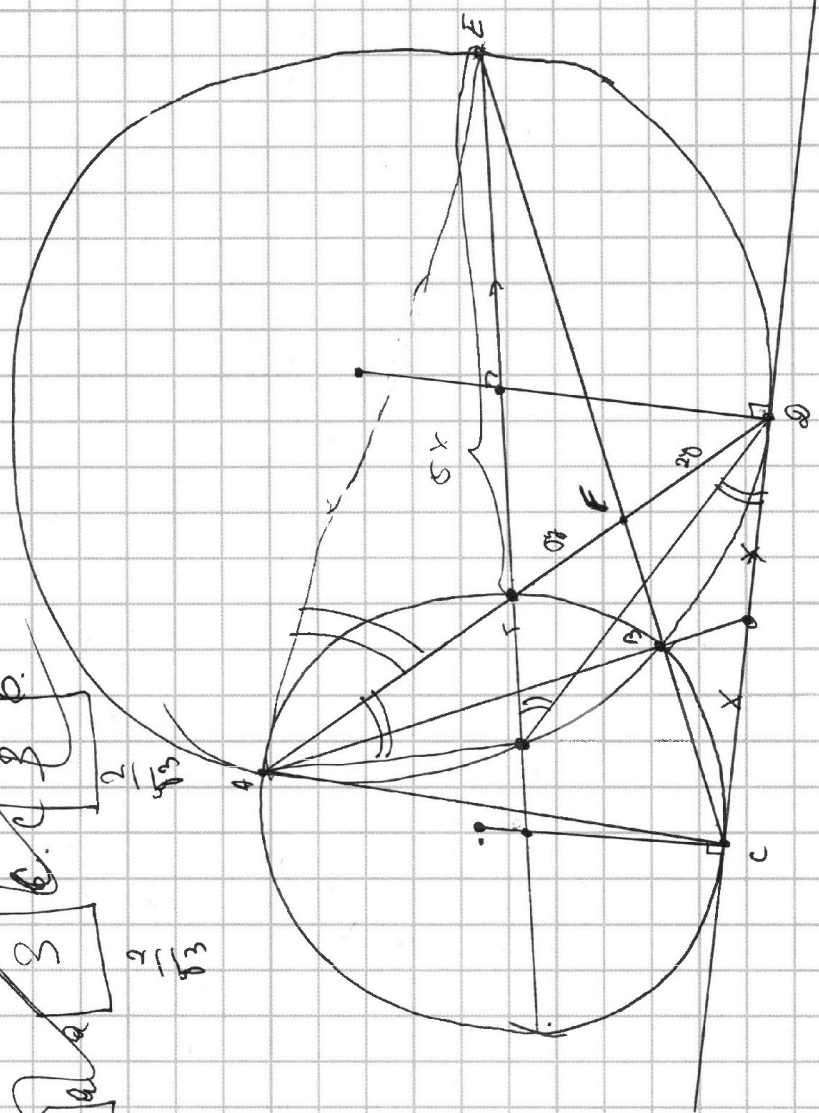
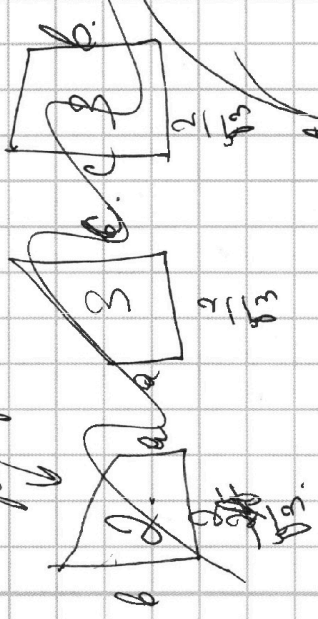
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

100 100 100 100 100

$CF = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $FE = \frac{2}{\sqrt{3}}$



$a = b$



$a \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2, \quad a = \sqrt{3}$
 $\frac{a+c}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a+c}{\sqrt{3}} = 2$
 $\frac{\sqrt{3}+c}{\sqrt{3}} = 2$
 $\frac{c}{\sqrt{3}} = 2$
 $c = 2\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x+4z} + 4 = 2\sqrt{4z-4x-x^2}$$

$$14 + 4 + 4 + 4 - 5 = \sqrt{81 - 2^2}$$

$$p(\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos^2 x + 10$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 2(12\cos^3 x - 6 + 10)$$

$$4p\cos^3 x - 3p\cos x + 3p\cos x + 12\cos x - 12\cos^3 x - 4 = 0$$

$$4p\cos^3 x - 12\cos^3 x + (12\cos x - 4) = 0$$

$$p\cos^3 x - 3\cos^3 x + 3\cos x - 1 = 0$$

$p - 1 = 0$ *константа*

$$p = 1 \Rightarrow (1-1)^3 = 8$$

$$p = 1 \Rightarrow (p-1) \cdot -1 = 8$$

$$p = 1 \Rightarrow p - 1 = -8$$

$$p = -7$$

$$x = 4$$

$$(1-p)x^3 = (x-1)^3$$

$$1-p = \left(\frac{x-1}{x}\right)^3$$

$$1 - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 - x + 4z \geq 0 \Rightarrow 4z \geq x - 1$$

$$1 - x \leq 8 \Rightarrow 6 + 4z \geq 0 \Rightarrow z \geq -\frac{3}{2}$$

$$\cos(x+2x) =$$

$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$px^3 - 3x^3 + 3x - 1 = 0$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$(p-1)x^3 + (x-1)^3 = 0$$

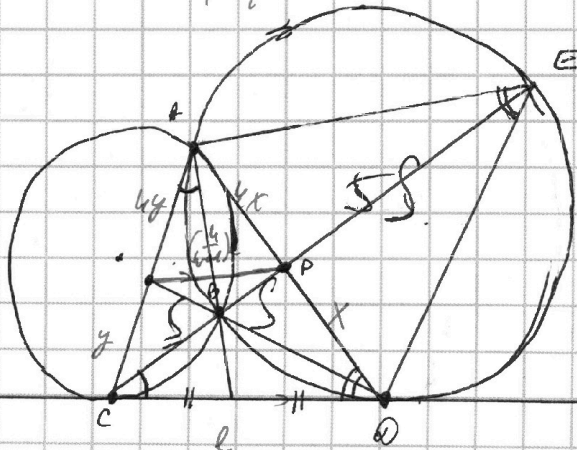
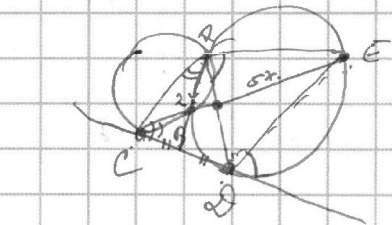
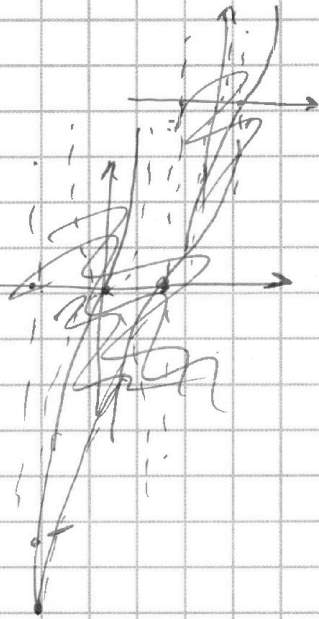
$$(p-1)x^3 - (x-1)^3 = 0$$

или p-1 > 0 график

всегда имеет корни

или p-1 < 0 график

всегда имеет корни



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$ $b - a = 3$ $(a-c)(b-c) = p^2$ $a^2 + b^2 = 710$

1	+	✓
2	+	✓
3	+	✓
4	+	✓
5	+	✓
6	+	✓
7	+	✓

$a-c = p^1$ $b-c = p^2$ $a-c = 1$ $b-c = -1$
 $b-a = p^2 - p^1 = (p-1)p^1$ $p=3$

$b-a = 8$ $a-b = -8$ $b^2 - 15b + 64 = 0$ $(b-34)(b-19) = 0$

$b=34$	$b=19$
$a=28$	$a=15$
$c=25$	$c=19$

$a_7 = b \cdot q^6$ $a_8 = b \cdot q^8 = x \cdot 3$ $a_{15} = b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-8)^3}}$

$\frac{a_{15}}{a_7} = q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-8)^3}} = \frac{1}{(x-8)^2}$

$q^4 = \sqrt[4]{\frac{1}{(x-8)^2}}$ $q^8 = \sqrt{\frac{1}{(x-8)^2}}$

$q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9}(x-6)} = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^2}} = \sqrt{\frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)}}$

$(x+3)^2 = 25x-9$ $x^2 - 19x + 18 = 0$ $x=18$ $x=1$

$x=18$ $a_7 = \sqrt{450 \cdot 12} = 21 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{150} \cdot 3 = 18 \sqrt{50} = 90 \sqrt{2}$

$a_8 = 21$ $a_{15} = \sqrt{\frac{450}{12^3}} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{450}{72}} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{150}{4}} = \frac{1}{24} \sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{24}$

$800(4; 5)$ $y+1 + 4y-5 = 4+40=44$ $2 \pm 2\sqrt{11} = 4$

$80(20; 4)$ $y+1 + 4y-5 = 4y-4y+1 = 1$ $z=0$ $y=5$ $16+16=32$

$80(5; 40)$ $y+1 + 4y-5 = 4y-4y-20 = -20$ $z=0$ $y=5$ $16+16=32$

$a_3 = 42 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}$ $a_1 = 42 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 42 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 42 \cdot 18 \sqrt{2}$

$\frac{21}{\sqrt{12^3}} = \frac{21}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7}{4\sqrt{3}}$