



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

b_n - геом. прогрессия

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b_1 \cdot q^6$$

$$b_{13} = 5-x = b_1 \cdot q^{12}$$

ООЗ:

$$\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \\ \frac{13x-35}{(x+1)^3} \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8 = b_7 \cdot q^8$$

тогда: $b_{15} = b_7 \cdot q^8$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$(13x-35)(x+1) = \frac{(13x-35)}{(x+1)^3} \cdot q^{16}$$

1) если $x = \frac{35}{13}$, тогда: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$.

такого не бывает, т.к. $b_{13} = b_7 \cdot q^6$
 $5 = 0 \cdot q^6$

2) если $x \neq \frac{35}{13}$, тогда: $(x+1) = \frac{q^{16}}{(x+1)^3} \cdot (x+1)^3 \neq 0$

$$(x+1)^4 = q^{16}$$

$$q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

если $x < -1$, тогда q^2 равно отрицательному числу. такого не бывает.

~~$q^2 = \sqrt{x+1}$~~
 ~~$q^2 = \sqrt{x+1}$~~

~~тогда~~

тогда, $b_{15} = b_{13} \cdot q^2$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x)\sqrt{|x+1|}$$

если $x+1 > 0$, тогда $13x-35 > 0$

$$x > \frac{35}{13}$$

~~тогда~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x > \frac{35}{13} \\ -x < -\frac{35}{13} \\ 0 < 5-x < 5 - \frac{35}{13} \end{array}$$

$$(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(x+1)$$

$$13x-35 = x^2-10x+25$$

$$x^2-23x+60=0.$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{23+17}{2} = 20 > \frac{35}{13} & \text{Ⓧ} \\ x = \frac{23-17}{2} = 3 > \frac{35}{13} & \text{Ⓧ} \end{cases}$$

если $x+1 < 0$, то $13x-35 < 0$
 $x < -1$ $x < \frac{35}{13}$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &x < -1 \\ &-x > 1 \\ &5-x > 6 \end{aligned}$$

тогда, $(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(-x+1) \quad | :(-x+1) \neq 0$

$$-13x+35 = 25 - 10x+x^2$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$D = 9+40=49$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3+7}{2} = 2 > -1 & \text{не удовл. условию} \\ x = \frac{-3-7}{2} = -5 < -1 & \text{Ⓧ} \end{cases}$$

итак, $x=3, x=20, x=-5$.

Ответ: $x=-5; x=3; x=20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2)$$

рассмотрим (2): $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$
 раскроем модули: $\begin{array}{ccccccc} & & & + & & + & \\ & & & - & - & + & \\ & & & - & - & 1 & - & 12 & + & & \\ & & & & & & & & & & \end{array}$ \rightarrow 1 модуль
 у 2 модуль

1 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$

тогда, $y+1 + 3y-36 = \sqrt{169-z^2}$ ОДЗ:
 $4y-35 = \sqrt{169-z^2}$ $169-z^2 \geq 0$

так как $z^2 \geq 0$
 $-z^2 \leq 0$
 $0 \leq 169-z^2 \leq 169$
 $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$

и, $y \geq 12$
 $4y \geq 48$
 $4y-35 \geq 13$

поучаем, что левая часть больше или равна 13, а правая — меньше или равна 13. \Rightarrow
 \Rightarrow равенство достигается только при:

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ 4y-35 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases}$$

2 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq y \leq 12$

тогда, $y+1 - 3y+36 = \sqrt{169-z^2}$
 $-2y+37 = \sqrt{169-z^2}$

т.к. $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (ранее доказано)

а $-1 \leq y \leq 12$

$-12 \leq -y \leq 1$

$-24 \leq -2y \leq 2$

$13 \leq -2y+37 \leq 39$

поучаем, что левая часть ≥ 13 , а правая ≤ 13 \Rightarrow
 \Rightarrow равенство достигается только при:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ -2y+37 = 13 \end{cases} \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases} \text{ (также получим в 1 случае)}$$

3 случай: $\begin{cases} y+1 \leq 0 \\ y+12 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -1 \\ y \leq -12 \end{cases} \Rightarrow y \leq -1.$

тогда, $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (равен

тогда, $-y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$
 $-4y+35 = \sqrt{169-z^2}$

т.к. $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (равен доказано)

а $\begin{aligned} y &\leq -1 \\ -4 &> 1 \\ -4y &> 4 \\ -4y+35 &> 39 \end{aligned}$

получается, что левая часть больше или равна 39, а правая часть меньше или равна 13. тогда, решений нет.

Итак, единственное решение (2) - $z=0, y=12.$

подставим его в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$$

пусть ~~$\cos x = t$ ($t \in [-1; 1]$)~~, тогда:

$$2(2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$$

пусть $\cos x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

$$2(2t^2 - 1) \cdot t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

рассмотрим функцию $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) = 12\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$



$$f_{\max}(-1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$f_{\min}(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3,5$$

$$\text{итак, } -4 \leq 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \leq 10$$

$$-4 \leq p \leq 10$$

примем, при любом значении $p \in [-4; 10]$ t будет иметь ровно один корень (т.к. $f(t)$ — монотонно возрастающая функция)

$$\text{при } p = -3: 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = -3$$

$$t(4t^2 + 6t + 3) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{или} \quad 4t^2 + 6t + 3 = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$D = 36 - 3 \cdot 4 \cdot 4 < 0.$$

решений нет.

$$\text{при } p = -4: 4t^3 + 6t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t = -1 \quad \text{или}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = -3,5: 4t^3 + 6t^2 + 3t + 0,5 = 0.$$

$$\text{или } t = -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

т.к. p принимает значения от -4 до

10 , ~~$\cos x = (p-3)$~~ \Rightarrow функция

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

~~мысли~~

$$2(2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

мысли $\cos^2 x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

рассмотрим $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12 \left(t^2 + t + \frac{1}{4} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

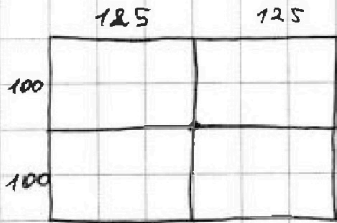


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



дан прямоугольник \Rightarrow центр \Rightarrow совпадает с точкой пересечения его "средних линий"

заметим, что изображение, полученное с помощью центральной симметрии получено как двойное отражение (т.к. расстояние от начальной картшки до центра должно равняться расстоянию от центра до картшки, симметричной центру)

т.к. симметричным должно быть множество, а всего должно быть закрашено 8 клеток \Rightarrow нужно найти варианты расположения 4 точек, т.к. остальные 4 определяются однозначно исходя из симметрии

и т.к. "средние линии" проходят по линиям клеток \Rightarrow ~~они~~ (т.к. $250 : 2$ и $200 : 2$) \Rightarrow клетки, между которыми проходит бы одна из средних линий и может быть.

итак, способ задать множество, симметричное центра: $C_{250 \cdot 100}^4 = C_{25000}^4$

способ задать множество, симметричное вертикальной средней линии: $C_{100 \cdot 125}^4 = C_{25000}^4$

способ задать множество, симметричное горизонтальной средней линии: C_{25000}^4

и т.к. центральная симметрия — есть симметричное относительно обеих средних линий \Rightarrow

\Rightarrow если намлись варианты, которое симметрично по 2 критериям, то они симметричны и

относительно 3. т.к. точек 8, а точек симметрично относительно всех 3 симметрий \Rightarrow

\Rightarrow это равносильно способам задать 2 точки из



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

образованных средними линиями прямоугольников \Rightarrow таких множеств: $C_{100}^2 \cdot 125 = C_{12500}^2$
 т.к. "известные" симметрии симметрично сразу 3 симметрии \Rightarrow также сразу 3 симметрии посчитано $\frac{3}{2}$ трижды
 итого, способов закрасить 8 клеток так, чтобы замкнутые множества обладали хотя бы 1-й из ~~двух~~ симметрий:

$$3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 = \frac{3 \cdot 25000!}{4! \cdot 24996!} - \frac{2 \cdot 12500!}{4! \cdot 12496!}$$

Ответ: $\frac{3 \cdot 25000!}{4! \cdot 24996!} - \frac{2 \cdot 12500!}{4! \cdot 12496!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a > b & (1) \\ a - b \neq 3 & (2) \\ (a - c)(b - c) = p^2, p - \text{простое} & (3) \\ a + b^2 = 560 & (4) \end{cases}$$

рассмотрим (3): $(a - c)(b - c) = p^2$, где p - простое

замечим, что раз p - простое и p^2 представлено в виде произведения двух чисел, то:

1 случай: $\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p + c \\ b = p + c \end{cases}$, но $a > b$. ~~или~~ противоречие

2 случай: $\begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -p + c \\ b = -p + c \end{cases}$, но $a > b$ противоречие

3 случай: $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + c \\ b = p^2 + c \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow b > a$ противоречие

4 случай: $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow a > b$

тогда, $a - b = p^2 + c - 1 - c = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ следовательно:

$$p + 1 \neq 3$$

$$p - 1 \neq 3 \Rightarrow p : 3 \Rightarrow p = 3 \text{ (т.к. } p \text{ - простое)}$$

тогда, $a = 9 + c$; $b = 1 + c$

(4): $9 + c + 1 + 2c + c^2 = 560$

$$c^2 + 3c + 10 - 560 = 0$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0.$$

$$D = 9 + 4 \cdot 550 = 2209 = 47^2$$

$$\begin{cases} c = \frac{-3 + 47}{2} = 22 \Rightarrow a = 31; b = 23 \\ c = \frac{-3 - 47}{2} = -25 \Rightarrow a = -16; b = -24 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 случай:
$$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } p^2 > 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a > b \end{array}$$

тогда, (2): $a - b = c - 1 - c + p^2 = p^2 - 1 =$

$$= (p+1)(p-1)$$

$\begin{matrix} p+1 \nmid 3 \\ p-1 \nmid 3 \end{matrix} \Rightarrow p:3 \Rightarrow p=3$ (т.к. p - простое)

тогда, $\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \end{cases}$

(4): $c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560$

$$c^2 - 17c + 80 - 560 = 0$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

$$D = 17^2 + 480 \cdot 4 = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$$

$$\begin{cases} c = \frac{17+47}{2} = 32 \Rightarrow a = 31; b = 23 \\ c = \frac{17-47}{2} = -15 \Rightarrow a = -16; b = -24 \end{cases}$$

Ответ: $(a, b, c) = (31; 23; 22);$

$(a, b, c) = (-16; -24; -25);$

$(a, b, c) = (31; 23; 32);$

$(a, b, c) = (-16; -24; -15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

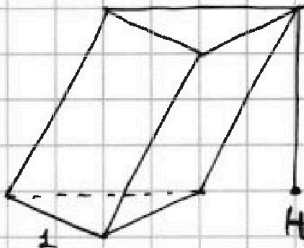
СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

1 2 3 4 5 6 7

Срок = 4; 4; 3



МНОЖ:

1 2 3 4 5 6 7
 \pm \pm \pm \pm \pm \pm \pm

~~2400~~
~~2200~~
 1209
 $\begin{array}{r} 23 \\ +17 \\ \hline 40 \cdot 10 \\ 23 \\ -17 \\ \hline 6 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 550 \\ \times 4 \\ \hline 2200 \end{array}$
 2209

№ 1

$\begin{array}{r} 31 \\ \times 31 \\ \hline 31 \\ +93 \\ \hline 961 \end{array}$

$\begin{array}{r} 105 \\ +105 \\ \hline 210 \end{array}$

$3 > \frac{35}{13}$
 $39 > 35$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 3 \\ \hline 39 \end{array}$

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^6 = b_7 \cdot q^6$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6$$

$$b_{13} = 5-x$$

$$b_{15} - b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$(13x-35)(x+1) = \frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot q^{48}$$

$$q^{48} = \frac{(13x-35)(x+1)(x+1)^3}{(13x-35)} = (x+1)^8$$

$\begin{array}{r} 10 \\ -529 \\ \hline 240 \\ 289 \\ +17 \\ \hline 17 \\ +17 \\ \hline 34 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ +46 \\ \hline 529 \end{array}$

найдем если $x = \frac{35}{13}$: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$
 и добавим.

$$q^4 = x+1 \Rightarrow q^2 = \sqrt{x+1} \quad (1. \text{ к } -\sqrt{x+1} < 0)$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35 \cdot (x+1)^2(x+1)}{(x+1)^3}}$$

$$5-x = \sqrt{13x-35}$$

$$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 299$$

$\begin{array}{r} 40 \\ \times 60 \\ \hline 240 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ +46 \\ \hline 529 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 299 \\ -539 \\ \hline 240 \\ -240 \\ \hline 0 \end{array}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos x + 3 \cos 2x + 3 \cos x = p$$

$$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 3 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \cos x = p$$

$$2 \cdot \cos x (\cos^2 x - 1 + 1) + 3(\cos^2 x - 1) + 3 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x - 3 + 3 \cos x - p = 0$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x - (p + 3) = 0$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

~~cos~~

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$x = \frac{x+y + x-y}{2}$$

$$y = \frac{x+y - x-y}{2}$$

№6 a, b, c ∈ Z

$$a > b$$

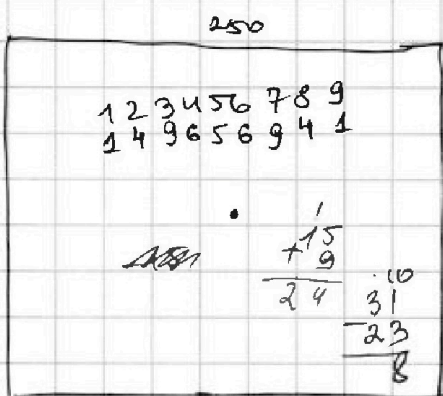
$$a - b \mid 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\begin{array}{r} 1920 \\ \times 289 \\ \hline 2209 \end{array}$$

200



$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 36 \\ \hline 81 \\ 16 \\ 25 \\ \hline 256 \\ \times 2 \\ \hline 512 \\ -4 \\ \hline 10 \\ \hline 2209 \\ \times 42 \\ \hline 44 \\ 43 \\ \hline 329 \\ +168 \\ \hline 2209 \\ -16 \\ \hline 47 \\ -3 \\ \hline 44 \end{array}$$

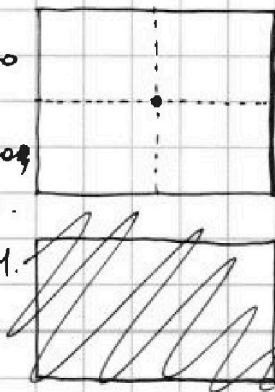
$$\frac{200}{250} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 560 \\ \hline 560 \\ 380 \\ \hline 480 \\ \times 4 \\ \hline 1920 \end{array}$$

$$-135 - 35 < 0$$

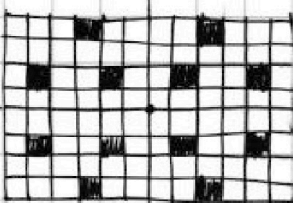
$$-5 + 1 = -4$$



1) мощностью сетки.

$$\begin{array}{r} 47 \\ -17 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ +47 \\ \hline 64 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 10 \\ -25 \\ \hline 9 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ +22 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ +9 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ +3 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2209 \\ \times 42 \\ \hline 44 \\ 43 \\ \hline 329 \\ +168 \\ \hline 2209 \\ -16 \\ \hline 47 \\ -3 \\ \hline 44 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№65

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p.$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2(2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

$$\cos x = t \quad (t \in [-1; 1]) \Rightarrow$$

$$2(2t^2 - 1)t + 3(2t^2 - 1) + 5t = p$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p.$$

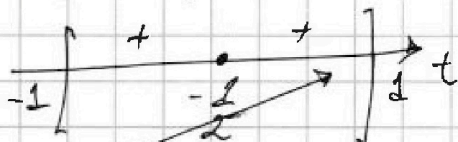
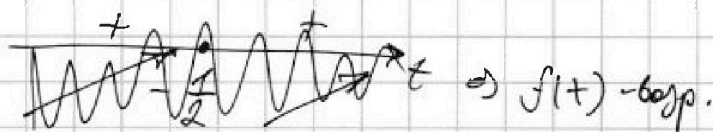
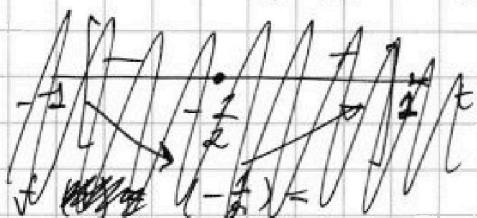
$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$D = 144 - 3 \cdot 12 \cdot 4 = 12^2 - 12^2 = 0.$$

$$t = \frac{-12}{2 \cdot 12} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 12\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 &= \\ &= 12\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) = \\ &= 12t^2 + 12t + 3 \end{aligned}$$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4.$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10. \quad \Rightarrow p \in [-4; 10].$$

~~cos 3x~~

~~cos 2x~~

$$p = 3 : t(4t^2 + 6t + 3)$$

$$36 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0.$$

$$\cos x = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{x+3}{a}} - \sqrt{\frac{4-x}{b}} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$4-x=a$$

$$x=a+4$$

$$x+3=a+4+3=a+7$$

$$\sqrt{a+7} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a+7} + 5 = 2\sqrt{ab} + \sqrt{4-x}$$

$$a+7+10\sqrt{a+7}+25 = 4ab + 4\sqrt{4-x} + 4$$

$$\sqrt{a+7} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{a(a+7)}$$

$$\sqrt{a+7} + 5 = 2\sqrt{a(a+7)} + \sqrt{4-x}$$

$$a+7+10\sqrt{a+7}+25 = 4(a+7) \cdot a + a + 4 \cdot a \cdot \sqrt{a+7}$$

$$a^2 + 32 + 10\sqrt{a+7} = 4a^2 + 28a + a + 4a\sqrt{a+7}$$

$$(4-4a)\sqrt{a+7} = 4a^2 + 28a - 12$$

$$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2a^2 + 14a - 16$$

$$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2(a^2 + 7a - 8)$$

$$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2(a-1)(a+8)$$

$$(7-2a)^2(a+7) = 4(a-1)^2(a+8)^2$$

$$f(a) = (7-2a)^2 \cdot (a+7)$$

$$f'(a) = 2(7-2a) \cdot (-2) \cdot (a+7) + (7-2a)^2 =$$

$$= -2(7-2a)(a+7) + (7-2a)^2 = (7-2a)(7-2a-4a-28) =$$

$$= (7-2a)(-6a-21) = (7-2a)(7-2a-4(a+7)) =$$

$$= (7-2a)(-6a-21) = (7-2a) \cdot (-3) \cdot (2a+7)$$

a =



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \neq 0$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

~~$$a - b = 2ab = 5$$~~

~~$$2a - 2b + 10 = 4ab$$~~

$$\begin{aligned} a+b &\geq \sqrt{4ab} \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ (a+b)^2 &\geq 4ab \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ a^2 + b^2 &\geq a - b + 5 \end{aligned}$$

$$x+3 = a$$

$$x = a - 3$$

$$4 - x = 4 - a + 3 = 7 - a$$

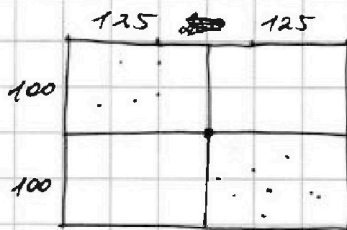
$$\begin{array}{r|l} x+3 & 4-x \\ a & \end{array}$$

$$a - x + 3 = 4 - x - a$$

$$2a = 1$$

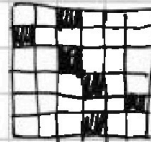
$$a = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{4-a} + 5 \in 2\sqrt{a(7-a)}$$



Для центральной симметрии:
выбираются 4 ~~клетки~~ из $250 \cdot 100$,
остальное и выбираются
однозначно.

Для верт. симметрии: 4 клетки из $125 \cdot 200 = 250 \cdot 100$



остальное - однозначно

Для гориз. симметрии:

заметим, что если существуют совместно
любые 2 из симметрий, то какие
существуют 4, 3 \Rightarrow общие симметрии
исчислять 3 раза: для всех симметрий:
итог: $C_{25000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 = 2 \cdot 2$ клетки из $125 \cdot 100$
остальное - однознач.

$$\text{итог: } 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

$$\frac{25000!}{4! \cdot (25000-4)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} - z + 5 = 2\sqrt{y+x-xz+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

~~3~~ (2): $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$
 раскроем модули:

1 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$

тогда, $y+1 + 3y - 36 = \sqrt{169-z^2}$
 $4y - 35 = \sqrt{169-z^2}$ ОДЗ: $169-z^2 \geq 0$

так как ~~$z^2 \geq 0 \Rightarrow 169-z^2 \leq 169$~~
 $z^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 169-z^2 \leq 169$
 $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$

а $y \geq 12$
 $4y \geq 48$
 $4y - 35 \geq 13 \Rightarrow$ правая часть уравнения

~~меньше 13, а левая - не боль~~
~~или равна~~

меньше или равна 13, а левая - больше или равна

13 \Rightarrow равенство достигнётся только при

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ 4y - 35 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 12 \end{cases}$$

подставим полученные значения в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 12+x-x^2 \geq 0 \end{cases}$



$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

$$x+3 + 10\sqrt{x+3} + 25 = 2(12+x-x^2) + 4-x + 4\sqrt{(4-x)(12+x-x^2)}$$

$$(x+3)(4-x) = 4x - x^2 + 12 - 3x = -x^2 + x + 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

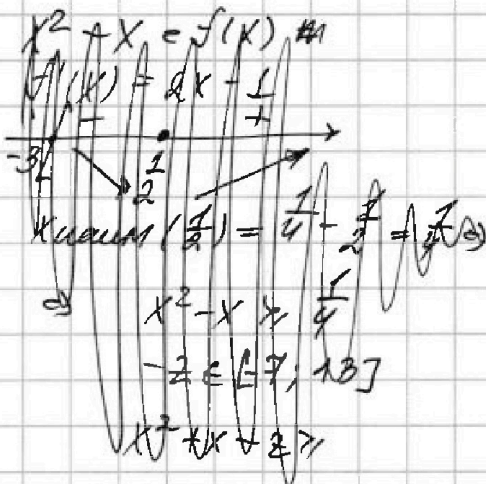
№ 2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-z \geq 0 \\ y+x-x^2+z \geq 0 \\ 169-z^2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -3 \\ 4-z \geq x-3 \Rightarrow z \leq 7 \\ z^2 \leq 169 \Rightarrow z \in [-13; 13] \\ y+x-x^2+z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z \in [-13; 7]$$



$$\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$$

$$y+1 + 3y - 36 = 4y - 35$$

$$4y \geq 48$$

$$4y - 35 \geq 13, \text{ при этом}$$

$$\sqrt{169-z^2} \leq 13$$

тогда, $4y - 35 = 13 \Rightarrow y = 12$

$z = 0$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

1) $x = -3: 5 = \sqrt{4+3}$

$$5 = \sqrt{7}$$

$x = 4: \sqrt{7} + 5 = 0 + 0$

$$\sqrt{7} + 5 \neq 0$$

решения нет.

ОДЗ:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 12 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$



$x = 3$

$x = 4$

$$\begin{matrix} 37 \\ -24 \\ \hline 13 \end{matrix}$$

2) $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases}$

$$y \in [-1; 12]$$

$$-1 \leq y \leq 12$$

$$-24 \leq -2y \leq 2 \Rightarrow 13 \leq -2y + 37 \leq 39$$

$$y+1 - 3y + 36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-2y + 37 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -2y + 3z = 13 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 24 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ранее рассмотрено.}$$

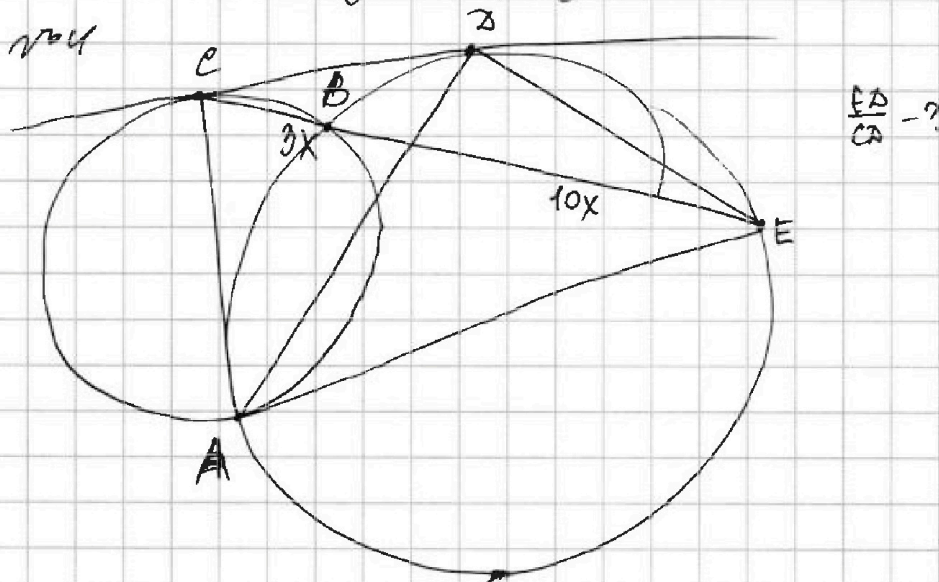
$$3) \begin{cases} y \leq -1 \\ y \leq 12 \end{cases} \Rightarrow y \leq -1.$$

$$-y - 1 - 3y + 36 = \sqrt{169 - z^2}$$

$$-4y + 35 = \sqrt{169 - z^2}$$

$$\begin{aligned} y &\leq -1 \\ -y &\geq 1 \\ -4y &\geq 4 \\ -4y + 35 &\geq 39 \end{aligned}$$

Итак, $\sqrt{169 - z^2} \leq 13$ *решения нет.*
 $-4y + 35 \geq 39$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

