



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дд.

Ответ: -1; 5

Пусть коэффициент прогрессии будет равен q .

Тогда $x_{12} = \sqrt{(5x_0)(x-3)} = x_4 \cdot q^8 = \sqrt{\frac{5x_0}{(x-3)^3}} \cdot q^8$

$x \neq 3$.

$q^8 = \frac{x_{12}}{x_4} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$

1) $x > 3$:

$q^4 = x-3$

$q^2 = \sqrt{x-3}$

$x_{12} = q^2 \cdot x_0 = (x+1) \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{15x+6} \cdot \sqrt{x-3}$

$\sqrt{x-3} (x+1 - \sqrt{15x+6}) = 0$

П.к. $x \neq 3$, то $\sqrt{x-3} \neq 0$.

Тогда

$x+1 = \sqrt{15x+6}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$

П.к. $x > 3$, то $x \geq 5$.

2) $x < 3$:

$q^4 = 3-x$

$q^2 = \sqrt{3-x}$

$x_{12} = q^2 \cdot x_0 = (x+1) \sqrt{3-x} = \sqrt{(5x+6)(x-3)}$

П.к. $x < 3$, то $x-3 < 0$, а $(5x+6)(x-3) \geq 0$. Тогда $5x+6 \leq 0$

$(x+1)^2 (3-x) = (5x+6)(x-3)$. П.к. $\sqrt{3-x} > 0$, $\sqrt{(5x+6)/(x-3)} > 0$, то $x+1 \geq 0$, $x \geq -4$.

$(x^2 + 8x + 16 + 15x + 6)(3-x) \geq 0$; $3-x \neq 0$.

$x^2 + 23x + 22 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq -22 \\ x \geq -1 \end{cases}$

П.к. $x \geq -4$, то $x = -1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2z-6z^2+z}, \quad x \geq -z$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$\sqrt{225-z^2} \leq 15, \text{ т.к. } 225-z^2 \leq 225.$$

$$\text{Тогда } |y-20| + 2|y-35| \leq 15.$$

Докажем, что $|y-20| + 2|y-35| \geq 15$.

$$1) y \geq 35: y-20 + 2y-70 = 3y-90 \geq 105-90 = 15$$

$$2) 20 < y < 35: y-20 - 2y+70 = 50-y \geq 50-35 = 15$$

$$3) y < 20: \cancel{20-y} + 70 - 2y = 90 - 3y \geq 90 - 60 = 30 \geq 15$$

т.е. $15 \leq |y-20| + 2|y-35| \leq 15$. Тогда $|y-20| + 2|y-35| = 15$.

Также докажем, что $|y-20| + |y-35| \geq 15$.

$$1) y \geq 35: y-20 + y-35 = 2y-55 \geq 70-55 = 15$$

$$2) 20 < y < 35: y-20 + 35-y = 15 \geq 15$$

$$3) y < 20: 20-y + 35-y = 55-2y \geq 55-40 = 15$$

$$|y-20| + |y-35| = |y-20| + 2|y-35| - |y-35|. \text{ Т.к. } |y-35| \geq 0, \text{ то}$$

$$15 \leq |y-20| + |y-35| \leq |y-20| + 2|y-35| = 15$$

$$\text{Тогда } |y-20| + |y-35| = 15. \text{ Тогда } |y-35| = 0. y = 35.$$

$$\text{Тогда, т.к. } |y-20| + 2|y-35| = 15 = \sqrt{225-z^2}, \text{ то}$$

$$225-z^2 = 225. z = 0.$$

Тогда,

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2z-x^2}$$

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - 6$$

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - (5-x+7+x)$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 = 2 - (\sqrt{7+x} - \sqrt{5-x})^2$$

Пусть $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$.

Тогда: $t - 6 = -t^2$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2) = 0$$

$$-7 \leq x \leq 5$$

$$\begin{cases} t=3, \\ t=2; \end{cases}$$

1) $t=2$;

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$x+7 = 4 + 5-x + 4\sqrt{5-x}$$

$$2x-2 = 4\sqrt{5-x}$$

$$x-1 = 2\sqrt{5-x} \quad x \geq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4(5-x)$$

$$x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$D = 4 + 76 = 80$$

$$x_2 = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{5}$$

П.к. $-1 - 2\sqrt{5} < 1$, то $x_2 = -1 + 2\sqrt{5}$.

2) $t=3$;

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3$$

$$x+7 = 9 + 5-x + 6\sqrt{5-x}$$

$$2x-2 = 6\sqrt{5-x}$$

$$\begin{cases} 2x-2 \leq 0 \\ x \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$4x^2 - 20x + 4 = 36 - 36x$$

$$4x^2 + 8x - 18 = 0$$

$$D = 64 + 16 \cdot 18 = 16 \cdot 135$$

$$x_2 = \frac{-8 \pm 12\sqrt{5}}{8} = -1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

П.к. $-1 + \frac{3\sqrt{5}}{2} > \frac{7}{2}$, то $x_2 = -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x_2 = -1 + 2\sqrt{5}, y = 35, z = 0$;
 $x_2 = -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}, y = 35, z = 0.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Пусть $\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p.$$

Пусть $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

p -н её производную: $f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$.

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 12t + 3 = 3(2t-1)^2.$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t-1)^2 = 0 \quad t = \frac{1}{2}$$

$f'(t) = 3(2t-1)^2$. — значит функция монотонно возрастает

(при $t = \frac{1}{2}$ $f'(t) = 0$, при $t \neq \frac{1}{2}$, $f'(t) > 0$)

Поэтому мин. знач. $f(t)$ на промежутке $[-1; 1]$ будет в точке $t = -1$.

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10,$$

Макс. знач. будет в точке $t = 1$, $f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$.

Уравнение $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$ будет иметь ровно 1 корень при

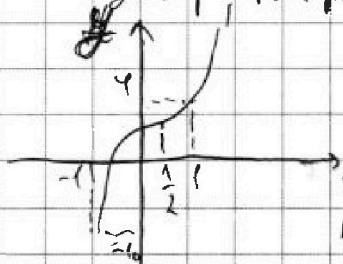
каждом p , т.к. p — это горизонт. прямая, а $f(t)$ всегда возраст.

Поэтому, если пересечь график функции $f(t)$

прямой $y = p$ при $p \in [-10; 4]$, то

решение (т. пересек.) будет лежать в

промежутке $[-1; 1]$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При этом, если $p \in [-\omega; \omega]$, то угр. пересечёт $y = f(t)$
в точке, соответствующей промежутку $[-1; 1]$.

Тогда $p \in [-\omega; \omega]$.

Пусть t_1 — единственный корень уравнения

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p \geq 0$$

Тогда, г.к. $\cos x \in [-1; 1]$,

$$\begin{cases} x = \arccos t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arccos t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решение

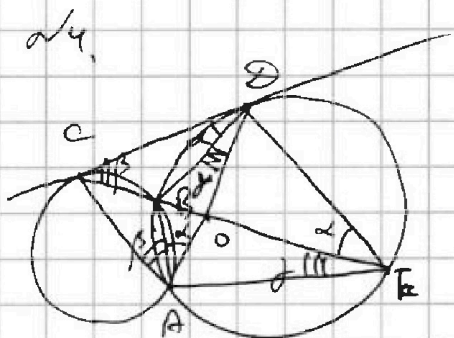
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle DBO = \alpha$

Потому $\angle BAD = \alpha$, г.к.

$\angle DEO = \angle BAD$, г.к. они опп.

на дугу $\overset{\frown}{BD}$.

$\angle CDB = \alpha$, г.к. это угол между

кас. и хордой и равен половине дуги $\overset{\frown}{BD}$.

Многу нулю.

Пусть $\angle BAE = \beta$, тогда $\angle BCD = \beta = \angle BAE$, г.к. это

угол между кас. и хордой и он равен половине дуги,

г.к.к. Многу нулю.

$\angle DBE = \alpha + \beta$, г.к. это внеш. угол $\triangle CBD$ и он равен сумме

$\alpha + \beta$ не смеж. с ним $\angle DBE = \angle DBK = \alpha + \beta$, г.к. они внутр. и

опп. на одну дугу.

Пусть $\angle BDE = \gamma$, тогда $\angle BEA = \angle BDE = \gamma$ (г.к. они внутр. и

опп. на одну дугу)

Потому $\triangle CDA \sim \triangle DEB$ по 2 углам ($\angle CDA = \angle DEB$;

$$\angle CAD = \angle DBE) \Rightarrow \frac{CD}{ED} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{BE}$$

г.к. $\angle CAD = \alpha + \beta = \angle DEB$, по доп. условию. Из $\triangle CAE = \triangle DEB$ $\frac{CE}{DE} = \frac{CA}{BE} = \frac{9}{25}$.

$$AC = 9x, BE = 25x, \frac{CA}{AD} = \frac{9x}{AD} = \frac{DA}{BE} = \frac{DA}{25x}$$

$$AD = \sqrt{225x^2} = 15x.$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{15x}{9x} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

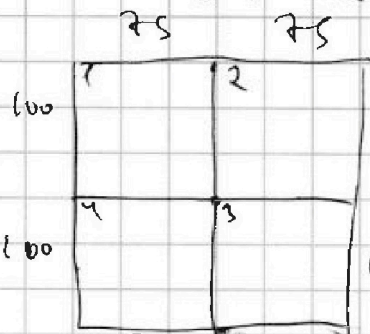
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

д/с.

Р-м. Закрытие с симметр. относ углам.



Всего для каждого набора ~~2~~ закрыт
клеток в 1 четверти все соответств. ему
набор закрыт клеток в 3-й.

То же самое год 2-й и 4-й четверти,
Тогда кол-во в 1-й и 2-й четверти совпад
считается 4, т.к. в 3-й и 4-й, а в 4-й и 2-й.

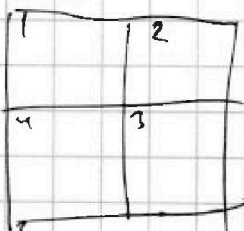
1	2
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

- 1) 4-0; C_{7500}^4
- 2) 3-1; $C_{7500}^3 + C_{7500}^1$
- 3) 2-2; $C_{7500}^2 + C_{7500}^2$
- 4) 1-3; $C_{7500}^3 + C_{7500}^1$
- 5) 0-4; C_{7500}^4

$$2 \cdot C_{7500}^7 + 2 \cdot C_{7500}^3 \cdot 7500 + C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 =$$

$$\frac{2 \cdot 7500!}{2496!4!} + \frac{2 \cdot 7500! \cdot 7500}{2497!3!} + \frac{7500!^2}{7498!2!^2}$$

Р-м. Закрытие отн. средней линии (2 сред. линии угла, т.к. отлик. только поворотом на 90°):



Раскрытие в 1-й равно раскрытие во 2-й,
раскр. в 4-й равно раскр. в 3-й;

Тогда сумма зак. клеток в 1-й и 4-й равно
4, т.к. в 1-й и 4-й сумма 4, сколько 1

2-й и 3-й. При раскр. 1-й отложит. закрыется
раскр. 2-й, при раскр.
4-й отложит. закрыется
раскр. 3-й;

1	2
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

- 1) 4-0; C_{7500}^4
- 2) 3-1; $C_{7500}^3 + C_{7500}^1$
- 3) 2-2; $C_{7500}^2 + C_{7500}^2$
- 4) 1-3; $C_{7500}^3 + C_{7500}^1$
- 5) 0-4; C_{7500}^4

Всего:

$$C_{7500}^7 + 2 \cdot C_{7500}^3 \cdot 7500 + C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 =$$

$$\frac{2 \cdot 7500!}{2496!4!} + \frac{2 \cdot 7500! \cdot 7500}{2497!3!} + \frac{7500!^2}{7498!2!^2}$$

Кол-во при каждой раскр. отн. верг. сколько
перел. на 90° по часовой стрелке раскрытия, по раскр.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

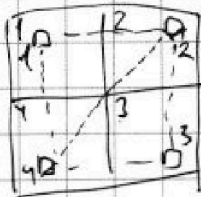
Будет симметрична относительно. Гориз. сред линии и вертикал,
где раскрыва, симметр. отк. Гориз. линии все раскрыва, поверн.
на 90° против часовой стрелки и она будет симметрична отк.

верт. линии (пока будем считать, что)

Чтобы где раскр., симметр. отк. с. линии способов:

$$2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 750!}{7496!4!} + \frac{2 \cdot 7500 \cdot 7500!}{7492!3!} + \frac{7500!^2}{7498!2!} \right)$$

Остаток посчитать кол-во раскрывок, которые симметр.
отк. с. по 2 линии, как линии и средине;



Если раскр. симметр. отк. 2-й линии, то

1-й четверть равна 2-й четверти и равна 4-й
четверти, а отн. влево от центра, равна 3-й;

Тогда 1-й четверть равна 3-й, а значит

все симметрично и в отн. центра, (под "равностью четвертей"
подразумевается симметричность, 1-й и 3-й симметр. отк.
центра, так 3-й поверн. на 1-й вокруг симметрично отн. центра
вертикаль, провед. через центр.)

Аналогично 2-й и 4-й. Тогда все 4 четверти равны,

Если все симметр. отк. центра и линии, то здесь эта линия будет
вертикальной, тогда 1 симметр. 2-й и симметр. 3-й, 3-й симметр.

4-й от горизонт. Вертикаль 1 поверн. вправо на 2, 2 поверн. вл., через
центр симметр., тогда раскрыв. в.к. симметр. отк. центра

Относительно композиции симметрично отк. 2-й линии, то, если
вот так симметрично отн. центра и 1 линии, то в отн. центра, симм. и отн.
горизонт. Тогда если совпадет. линии - то 2 симм., то совпадают все

?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, раскрыв 1-ю четверть, мы сразу знаем 2-ю, 3-ю и 4-ю (через симметрию). В 1-й четверти кон в клеток, равно кон-бу клеток во 2-й, 3-й и 4-й.

Всего в 1-й четверти 2 клетки;

вариантов сумм раскрыв 1-й четверти;

C_{750}^2 . Также раскрыв мы считали трижды

(год каждый из симметрии), а потому внесем их выделенными:

$$3 \cdot \left(\frac{2 \cdot 750!}{749! \cdot 4!} + \frac{2 \cdot 750 \cdot 750!}{749! \cdot 3!} + \frac{750!^2}{749! \cdot 2!^2} \right) = \frac{2 \cdot 750!}{749! \cdot 2!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \left(\frac{6 \cdot 750!}{749! \cdot 4!} + \frac{6 \cdot 750 \cdot 750!}{749! \cdot 3!} + \frac{3 \cdot 750!^2}{749! \cdot 2!^2} \right) = \frac{750!}{749!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \left(\frac{750!}{749! \cdot 4} + \frac{750 \cdot 750!}{749!} + \frac{3 \cdot 750!^2}{749! \cdot 2!^2} \right) = \frac{750!}{749!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \frac{750 \cdot 749 \cdot 749 \cdot 749}{4} + \frac{750 \cdot 750 \cdot 749 \cdot 749}{4} + \frac{3 \cdot 750 \cdot 749 \cdot 750 \cdot 749}{4}$$

$$= 750 \cdot 749 \cdot 2 \cdot 750 \cdot 749 = 3 \cdot \left(C_{750}^4 \cdot 2 + 2 C_{750}^3 \cdot C_{750}^1 + C_{750}^2 \right) =$$

$$= 2 C_{750}^4 + 6 C_{750}^3 + 6 C_{750}^3 \cdot C_{750}^1 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2) =$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot C_{750}^4 + 45000 C_{750}^3 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2)$$

$$\text{Ответ: } 6 \cdot C_{750}^4 + 45000 \cdot C_{750}^3 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26

$$(a-c)(b-c) = p^2. \text{ Если } p \neq 3, \text{ то } p \nmid 3, \text{ т.е. } p - \text{нечетное.}$$

$$\text{Если } p \neq 3, \text{ то } p^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

$$(a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod{3}.$$

$$\text{т.к. } a, b \nmid 3, \text{ то } a \not\equiv b \pmod{3}.$$

$$\text{Если } a - c \equiv b - c \pmod{3}, \text{ то } a - b \equiv c - c \equiv 0 \pmod{3}. \text{ Противоречие.}$$

$$\text{Тогда } a, \text{ т.е. } a - c \equiv 0 \pmod{3}, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod{3} !!!$$

$$\text{Если } a - c \equiv 1 \pmod{3}, \text{ то } b - c \equiv 0 \text{ или } 2, \text{ тогда } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Не подходит.

$$\text{Если } a - c \equiv 2 \pmod{3}, \text{ то } b - c \equiv 0 \text{ или } 1. \text{ Если } b - c \equiv 0, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\text{а если } b - c \equiv 1, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod{3}.$$

Тогда нет такого $p \nmid 3$.

Значит $p = 3$.

$$(a-c)(b-c) = 9.$$

$$\text{т.к. } a - c \text{ и } b - c - \text{целые числа, } a - c > 0, a - b = (a-c) - (b-c),$$

т.е. $a - c > b - c$, то есть варианты:

$$\begin{cases} a-c=9, \\ b-c=1; \\ a-c=3, \\ b-c=3; \end{cases} \begin{cases} a=3c+9, \\ b=c+1; \\ a=c+3, \\ b=c-3; \end{cases} \begin{cases} b=2c+9, \\ a=2b; \\ a=2b+9, \\ b=c-9; \end{cases} \quad a \geq b$$

$$a + b^2 \geq 20, \quad b^2 + b + 312 \geq 20$$

$$b \geq 2249$$

$$b \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 312}}{2}$$

$$\begin{cases} b \geq 23, \\ b \geq 24; \end{cases} \begin{cases} a \geq 36, \\ b \geq 21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \geq 21, \\ a \geq 2b, \\ b \geq 23; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 27, \\ a \geq 36, \\ b \geq 23. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \geq 9, \\ a \geq 2b, \\ b \geq 24; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 20, \\ a \geq 21, \\ b \geq 23. \end{cases}$$

Ответ: $a \geq 36, b \geq 23, c \geq 27;$
 $a \geq 21, b \geq 24, c \geq 20.$

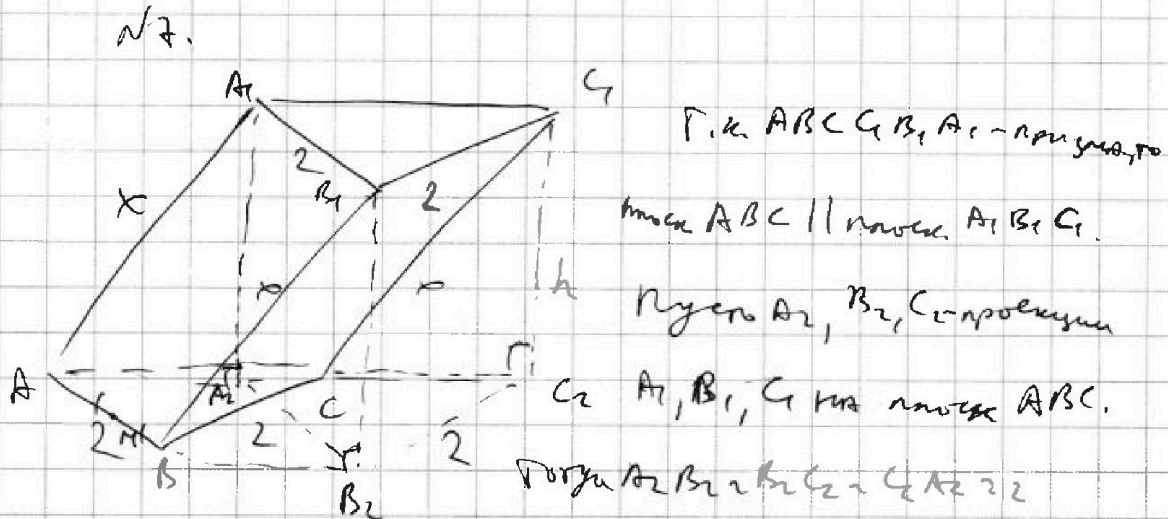
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Пусть~~ Г.к. $C_1 C_2 A_1 B_2, A_1 A_2$ - высота призм. ABC , то

$$\angle B_2 C_2 C_1 = \angle B_2 C_2 A_2 = \angle A_2 B_2 C_2 = \angle A_2 B_2 C_1 = \angle A_2 B_2 C_2$$

$$\angle A_1 A_2 C_2 = \angle A_2 C_2 C_1$$

$$\text{Тогда } S_{A_1 C_1 C_2} = 2 \cdot h = S_{A_1 B_1 B_2} = S_{B_1 C_1 C_2}$$

Пусть, считаем единичными, $S_{A_1 B_1 A_2} = 1$ и площадь ост. - 5

Г.к. $A_1 C_1 C_2 A_2$ - проекция $A_1 C_1 A_2$ на плоск. $A_1 C_1 C_2$, то $S_{A_1 C_1 C_2 A_2}$

$$S_{A_1 C_1 C_2 A_2} = S_{A_1 C_1 A_2} \cdot \sin \alpha_1, \text{ где } \alpha_1 - \text{углом. угол, между}$$

плоск. $A_1 C_1 A_2$ и плоск. $A_1 C_1 C_2$ ABC

$$S_{A_1 B_1 B_2 C_1} = S_{B_1 C_1 B_2} \cdot \sin \alpha_2, \text{ где } \alpha_2 - \text{углом}$$

угол между плоск. $B_1 C_1 B_2$ и плоск. $B_1 C_1 C_2$ ABC

$$\text{Г.к. } S_{B_1 C_1 B_2} = S_{A_1 C_1 A_2} = 1, \text{ то } \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2, \text{ Г.к.}$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2, \text{ то } S_{A_1 B_1 B_2 C_1} = S_{A_1 C_1 C_2 A_2} = 2 \cdot h, \text{ Тогда } \alpha_1 = \alpha_2, \text{ Г.к.}$$

угол $\alpha_1 = \alpha_2$, то тогда плоск. $A_1 C_1 A_2$ и плоск. $B_1 C_1 B_2$,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

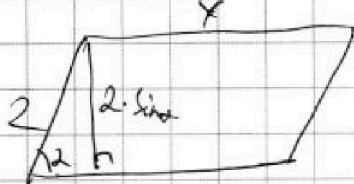
Что известно по условию, что это грани треугольного призма,

Знаем $AA_1 \perp BC$, $AA_1 \perp BB_1$, так это 2 противополож.

Стор. параллелограмм AA_1B_1B $AA_1 \perp BB_1 \perp CC_1$, так BB_1 и CC_1

это 2 противополож. стороны параллел. BB_1CC_1 .

Параллелограмм AA_1C_1C и BB_1C_1C равны, так:



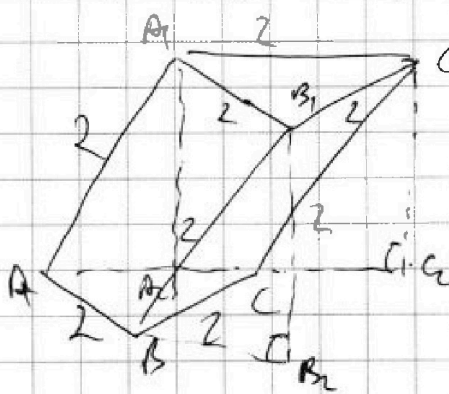
$S = 2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$. Г.к. α и 2 одинаковы
равны, α и 2 равны, а углы и стороны
равны

Поряд AA_1C_1C симметр. BB_1C_1C относительно CC_1 , проходя через

C_1, C и середину AB . Порядок AA_1B_1B симетр. относительно AA_1 , через A_1, A и B_1, B , г.к. B_1, B симетр. A_1 относительно CC_1, M и

A симетр. B относительно CC_1, M . Порядок $AB \perp CC_1, M$ и $AA_1B_1B \perp CC_1, M$.

Поряд $AA_1B_1B \perp CC_1, M \Rightarrow AA_1M, B_1B$ - симетр. относительно CC_1, M . Порядок,
г.к. AA_1, B_1B - это параллелограмм, то это прямоугол. (г.к. AA_1 и B_1B симетр. относительно CC_1, M) $\Rightarrow S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



указано в ответе $AA_1B_1C_1C$ $S = 8$
следовательно, что AA_1B_1B и AA_1C_1C

Ответ: 8

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos x = 23 \cos 2x + P$$

$$\cos 3x = 2 \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x = P$$

$$\cos x = t$$

$$4t^3 - 3t = P$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = P$$

$$4t^3 - 3t - 1 = 0$$

$$4t^3 - 12t^2 + 12t - 3 = 0$$



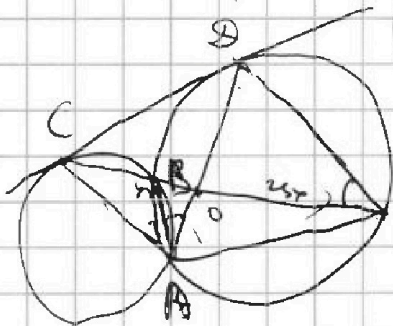
$$4t^3 - 12t^2 + 12t - 3 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \quad P = 3.5$$

мин. функция: $t = -1; -4 - 6 - 3 + 3 = -10$

макс. функция: $t = 1; 4 - 6 + 3 + 3 = 4$

$P \in [-10; 4]$



$$P \in [-10; 4]$$

$$P_{\text{min}} = -10; P_{\text{max}} = 4$$

$$P \in [-10; 4]$$

$$P \in [-10; 4]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$x_4 = x+4$$

$$x_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{15x+6} \cdot \sqrt{x-3}$$

$$x_4 = \sqrt{15x+6}$$

$$x_4^2 = 15x+6 \Rightarrow x^2 - 15x - 6 = 0$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225+24}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{249}}{2}$$

$$x_{12} = x_4 \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{15x+6} \cdot \sqrt{x-3}$$

$$\sqrt{x-3} \cdot (x+4 - \sqrt{15x+6}) = 0$$

$$x+4 = \sqrt{15x+6}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 15x+6 \geq 0 \\ x^2 - 10x + 10 = 15x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \\ x_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$x_4 = \sqrt{15x+6} \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x \geq 3$$

2) $x < 3$:

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \geq 0 \Rightarrow 15x+6 \geq 0$$

$$x_2 = (x+4) \cdot \sqrt{3-x} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$(x^2 + 8x + 6)(3-x) = (15x+6)(x-3) \Rightarrow -(3-x)(15x+6)$$

$$(3-x)(6^2 + 15x + 6) = 0$$

$$x_2 = 22 \Rightarrow x = -1$$

$$x_2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{235-2x+x^2}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2z}$$

$$\sqrt{z-20x^2+2z} = \sqrt{y^2+1-x^2}$$

$$5-x \leq 12$$

$$3z > 12$$

$$\sqrt{225-2z} \leq 15$$

$$|y-20| + 2|y-35| \leq 15$$

$$15 \leq |y-20| + |y-35| \leq 15$$

$$y \geq 35$$

$$y-20 + y-35 + 2y-35 \geq 15$$

$$y \geq 20$$

$$20 - y + 35 - 2y - 35 - 2y \geq 15$$

$$z \geq 0$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{235-2x+x^2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$x+7 - 5 + x = 4(x+7)(5-x) + 36 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$2x+2 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 140 - 20x - 4x^2 + 36 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$-15 \leq z \leq 4$$

$$x \geq -7$$

$$5-x \leq 12$$

$$-3z > 12$$

$$-3z \geq -12$$

$$z \leq 4$$

$$5 \geq x \geq -7$$

$$20 \leq y \leq 35$$

$$y-20 - y + 35 = 15$$

$$15 \geq 15$$

$$|y-20| + |y-35| = 15$$

$$y-35 = 20$$

$$y = 55$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 174 - 10x - 4x^2$$

$$4x^2 + 10x - 174 \leq 0$$

$$2x^2 + 5x - 87 \leq 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 174$$

$$x = 25 \pm 721$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6 =$$

$$2\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{(x+2)(5-x)} = \sqrt{(5-x)(7+x)} + 10 - 2\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$12 - 2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 10 - 8x - 4x^2 - 2\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 164 - 8x - 4x^2$$

$$4x^2 + 8x - 164 \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 41 \leq 0$$

$$484(35 - 2x - x^2) = (64 - 2x - 4x^2) \cdot (4 + 164 + 168 + (2\sqrt{42})^2)$$

$$484 \cdot 35 - 484 \cdot 2x - 484x^2 = 252 - 8x - 4x^2 \cdot (2 + 2\sqrt{42})$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35 - 2x - x^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} - 2\sqrt{35 - 2x - x^2} = -6$$

$$x = -1$$

$$-12$$

$$35 - 2x - x^2$$

$$\sqrt{35 - 2x - x^2} = 2x - 2$$

$$35 + 2 - 12 = 26$$

$$\sqrt{0} - \sqrt{6} = 2 \cdot 6 - 6$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + \frac{7+x}{4} + \frac{5-x}{4} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + \frac{5-x+7+x}{2} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + 6$$

$$\left(\frac{5-x}{2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{5-x}{2} - 1\right)^2} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$x+7 = t$ $12 \geq t \geq 0$

$$5-x = 5-(x+7) + 7 = 12-t$$

$a=b$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 6$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + \frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + a+b = 4\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{12-t} + 6 = 2\sqrt{t(12-t)}$$

$$t - 2\sqrt{12t-t^2} + 12-t = 4\sqrt{t(12-t)} - 24\sqrt{t(12-t)} + 36$$

$$12 - 2\sqrt{12t-t^2} = 48t - 4t^2 - 24\sqrt{t(12-t)} + 36$$

$$24 - 22\sqrt{t(12-t)} + 48t - 4t^2 = 0$$

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} + 4$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = 0$$

$$8t^2 + 32t + 100 = 9 \cdot 20 \sqrt{36-t}$$

$$t = \frac{4 \pm 6\sqrt{5}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{5}$$

$$4t^2 - 24t - 12 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$(2\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2 = 4a - 4b + 4\sqrt{ab} = 0$$

$$(2\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}+1) = 2\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 1 = 4\sqrt{a} - 1$$

$$(2t-12)^2 = 168 - 22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 96t + 528 = 168 - 22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 96t + 360 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 96t + 360 = 0$$

$$4t^2 - 96t + 360 = 0$$

$$4 \cdot 16 - 96 \cdot 3 + 360 = 64 - 288 + 360 = 40$$

$$2 \cdot 64 - 720 + 2520 = 352 + 360 = 712$$