МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-9=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=6$, $\cos(2\angle CEM)=-\frac{3}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED+DO$, если известно, что $BE=12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$

Найдем дискриминант этого приведенного квадратного уравнения.

$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2$

т.к уравнение имеет 2 различных действительн. корня $\Rightarrow$ Дискриминант > 0

$36 - 4t^2 > 0$ т.к 4 положит. число можем

$9 - t^2 > 0$ сократить на него обе части

$t^2 < 9$ неравенства

$|t| < 3 \Rightarrow -3 < t < 3$

$$x_1 = \frac{-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$$

т.к по условию произведение корней положительно

$$\Rightarrow \frac{(-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)})(-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)})}{4} > 0$$

Знаменатель положительный $\Rightarrow$ числитель должен быть положительным

Заметим что числитель представляет из себя разность квадратов чисел $-4\sqrt{2}t$ и $\sqrt{4(9-t^2)}$

$\Rightarrow$

$(-4\sqrt{2}t)^2 - 4(9 - t^2) > 0$

$32t^2 + 4t^2 - 36 > 0$

$36t^2 > 36 \quad | : 36$

$t^2 > 1 \Rightarrow |t| > 1 \Rightarrow t > 1$ и $-1 > t$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$ или $\left[\begin{array}{l} -1 > t > -3 \\ 3 > t > 1 \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a, b \in N \qquad a - b = 12 \quad \Rightarrow a = b + 12 \quad (1)$

$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$
$= (a+b)(a+b+3) = 19p^4$

подставим в полученное уравнение (1).

$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$

Заметим что т.к b натуральное $\Rightarrow$ обе скобки больше 0 и одна из скобок четная.
А если произведение слева $\vdots 2$ то и $19p^4 \vdots 2$, но в $19p^4$ всего два различных простых множителя 19 и p. $19 \not\vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2$ а т.к p - простое $\Rightarrow p = 2$

Заметим что $2b+15$ нечетное $\Rightarrow$ оно не может быть $p \Rightarrow 2b+15$ равно 1 или 19, но т.к $b > 0 \Rightarrow 2b+15 > 15 \Rightarrow 2b+15 = 19 \quad b = 2$

$2 \cdot 2 + 12 = 16 = 2^4$ все сошлось

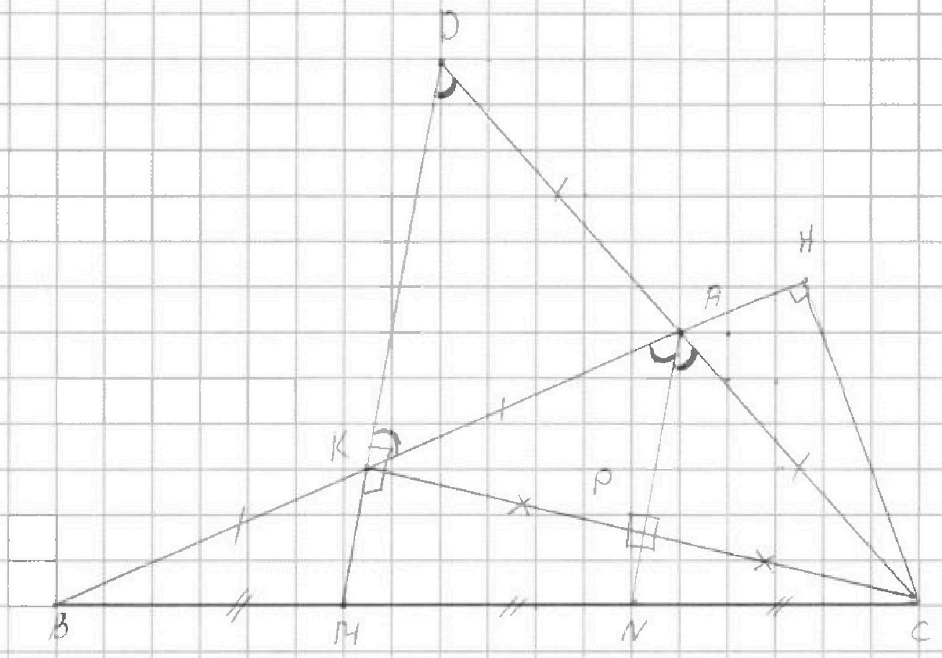
$a = b + 12 = 2 + 12 = 14$

Ответ: $a = 14 \quad b = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Обозначим $DM \cap AB = K$ и $AN \cap CK = P$

1. $AN \parallel MD$ и $BM = MN = NC$ => По Фалесу
$DA = AC$ (в $\triangle DMC$) и $BK = KA$ (в $\triangle BAN$)
По условию $AB = CD$ => $BK = KA = DA = AC$
=> $\angle CKD = 90°$

2. $MD \parallel AN$ и $CK \perp DM$ => $CK \perp AN$ а т к $KA = AC$
=> AP - высота, биссектриса и медиана в равнобед $\triangle$ => $\angle PAK = \angle CAN$ => $\angle CAK = 2\angle CAN$
Проведем высоту из C к AK, обозначим точку H и поскольку по условию $\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$
то если $AH = 3x$ то $AC = 4x$

3. По теореме Пифагора для $\triangle CAH$:
$CH = \sqrt{-AH^2 + AC^2} = \sqrt{16x^2 - 9x^2} = x\sqrt{7}$
По теореме Пифагора для $\triangle CHK$:
$CK = \sqrt{CH^2 + KH^2} = \sqrt{7x^2 + (4x+3x)^2} = \sqrt{56x^2} = 2x\sqrt{14}$
По теореме Пифагора для $\triangle CKD$:
$DK = \sqrt{DC^2 - KC^2} = \sqrt{64x^2 - 56x^2} = 2x\sqrt{2}$
т к PA сред линия $\triangle CKD$
=> $PA = \frac{DK}{2} = x\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Обозначим KM за y тогда $PN = \frac{KM}{2} = \frac{y}{2}$

т.к. PN сред линия в $\triangle CMK$

$AN = 2MK = 2y$ т.к. KM сред линия в $\triangle BNA$

$\Rightarrow 2y = \frac{y}{2} + x\sqrt{2}$

$1{,}5y = x\sqrt{2}$

$y = \frac{x\sqrt{2}\,2}{3} = KM$

По теореме Пифагора для $\triangle CMK$:

$MC = \sqrt{KM^2 + KC^2} = \sqrt{56x^2 + \frac{x^2 8}{9}} = \frac{x}{3}\sqrt{2^9} = \frac{16x\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{6}BC$

$x = \frac{2BC}{\cancel{16}\sqrt{2}} = \frac{\cancel{8}\,3}{\cancel{8}\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AB = CD = 8x = \frac{\cancel{8}\cdot 3}{\cancel{4}\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим что если мы выберем 3 ребенка которых мы посадим на один ряд то они стоят есть единственным образом т.к. каждый следующий от доски выше предыдущего. Посчитаем количество способов выбрать из 11 людей троих на один ряд (C из 11 по 3) умножим на количество способов выбрать из оставшихся троих на другой ряд (C из 8 по 3) умножим на количество способов выбрать из оставшихся трех на другой ряд (C из 5 по 3) умножим на количество способов разместить оставшихся двух на оставшемся ряду, а потом умножим на 4 потому что единственная пустая парта может находиться в 4 разных рядах.

C из 11 по 3 $= \frac{11\cdot10\cdot9}{3!}$

C из 8 по 3 $= \frac{8\cdot7\cdot6}{3!}$

C из 5 по 3 $= \frac{5\cdot4\cdot3}{3!}$

Количество способов разместить двух учеников на ряду = 4 (т.к. если они сидят подряд то их положение определяется однозначно, = 2 варианта если между ними пустая парта то 2 варианта)

$$\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{4}}{3\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot\cancel{2}} = \frac{11!}{27} = 739200$$

Ответ: количество способов равно $\frac{11!}{27}$ или 739200

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Давайте обозначим деревню за вершину графа, а дороги между ними за ребра. Т.к. из каждой деревни можно добраться в каждую => граф связен. Т.к между всеми деревнями единственный маршрут по которому можно добраться => в графе нет кратных ребер и циклов. Граф без циклов – дерево. В дереве ребер на 1 меньше чем вершин. Обозначим количество вершин за n. Тогда посчитаем количество ребер 2 способами:

1) $n-1$
2) сумма количества дорог исходящих из каждой деревни делим на 2 (т.к каждая дорога принадлежит двум деревням)

$$n-1 = \frac{5+6+7+9+n-4}{2}$$

$$n-1 = \frac{n}{2} + 11{,}5$$

$$\frac{n}{2} = 12{,}5$$

$$n = 25$$

Ответ: 25 деревень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

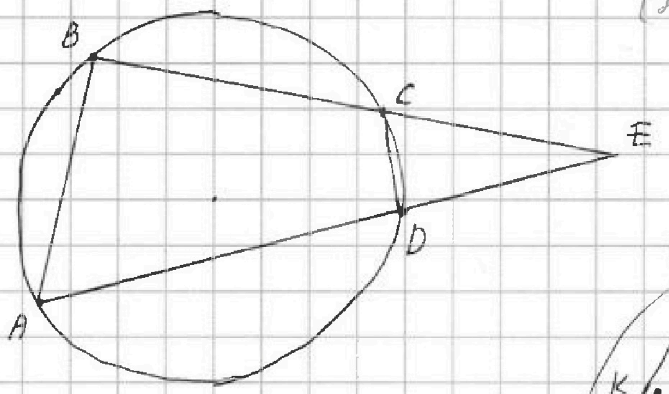
СТРАНИЦА __ ИЗ __

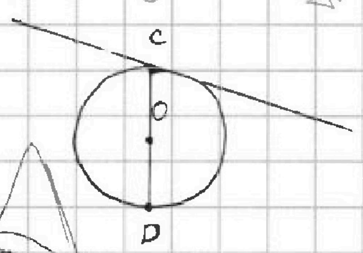
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

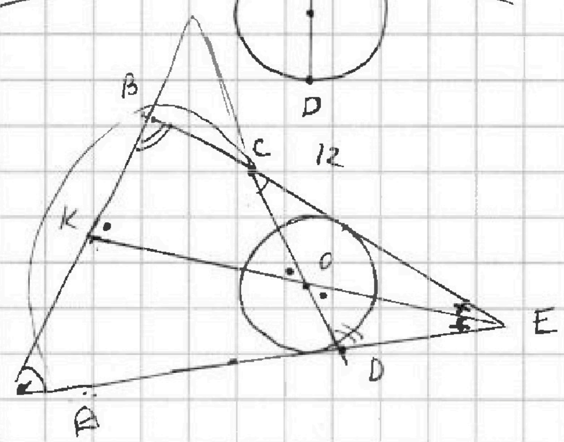
черновик

$x^2-2x^2+y^2+2x-2y$

$(x-y)(x+y)+2(x-y)-2x^2$



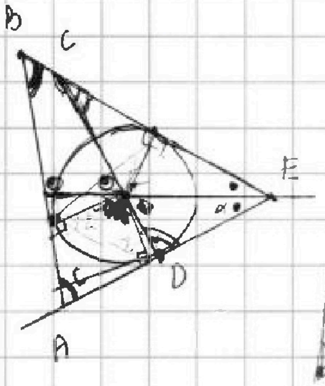


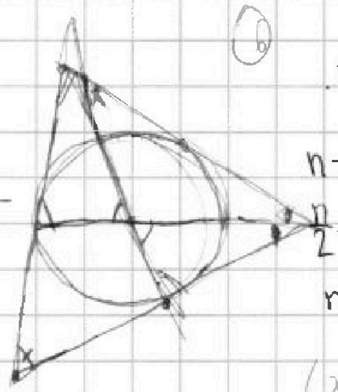


$\Delta BEA \sim \Delta DEC$

$\Delta BEK \sim \Delta DEO$

$\frac{AE}{DE}\cdot\frac{\cancel{DO}}{\cancel{OF}}\cdot\frac{\cancel{EK}}{KA}=1 \quad \frac{DO}{DE}=\frac{KA}{AE}=\frac{BK}{BE}=\frac{CO}{CE}$





$n-1=\frac{n-4+5+6+7+9}{2}$

$n-1=\frac{n}{2}+11{,}5$

$\frac{n}{2}=12{,}5$

$n=25$

$(x-y-1)^2=x^2-2xy+2x$
y^2+2y+1

$\beta+\alpha+\alpha+\gamma+\gamma=\beta+2\alpha+2\alpha=180+\cancel{\alpha}$

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-(x-y-1)}=2$

$-2xy+2xy$

$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{3}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$20x^2 + 80x^2 = 100x^2 = 16$

$10x = 4$

$y \cdot 2 = \frac{y}{2} + 3x\sqrt{5}$

$1{,}5y = 3x\sqrt{5}$

$y = 2x\sqrt{5}$

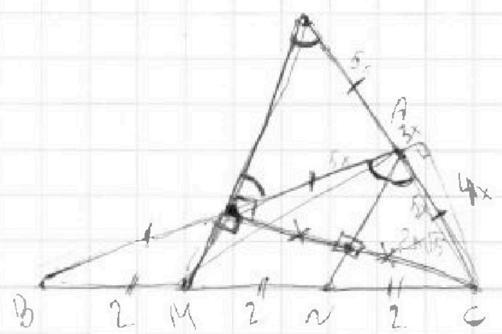
$64x^2 + 16x^2$

$= 80x^2$

$4x\sqrt{5}$

$180x^2$

$6\sqrt{5}$

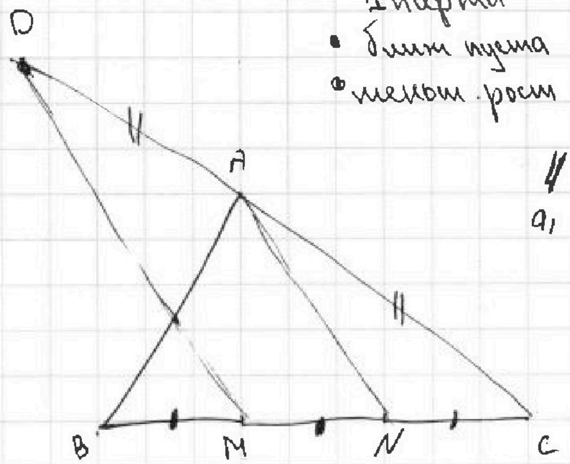


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

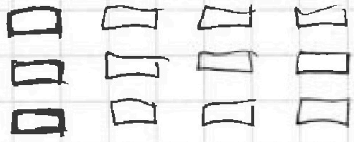
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



- 1 парта
- были пуста
- меньш. рост



12

$4 \cdot 4 \cdot 4$

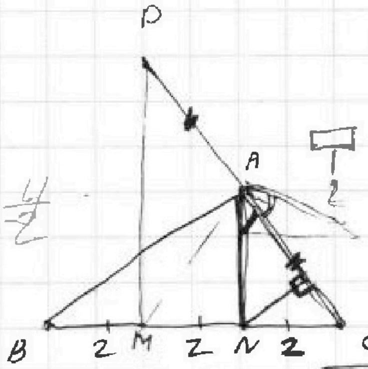
$a_1 \; a_2 \; a_3$

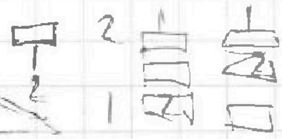
$4 \cdot \cancel{3} + \cancel{A}15 \cdot 4 \cdot 4$

a_4

$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 3 \cdot 4$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$





$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}$

$2y = \frac{4}{2}$

$\frac{11!}{12}$

$\sin\alpha - \sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{3}{4}$

$\cos 2\alpha = \sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}$

$\cos 2\alpha = \sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{3}{4}$

$49 + 7 = 56$

$2\sqrt{14}$

$16 - 9 = 7$

$\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$ AK

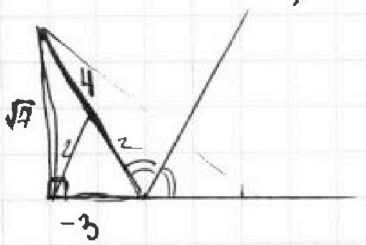
$64 - 56 < 8$

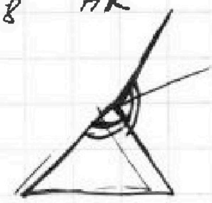
$2\sqrt{2}$

$y = \frac{4}{2} + \sqrt{2}x$

$\frac{4}{2} = \sqrt{2}x$

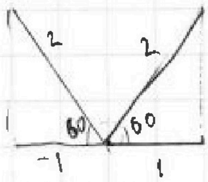
$y = 2\sqrt{2}x$





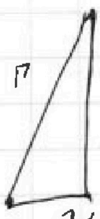
$\cos 2\alpha = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}$

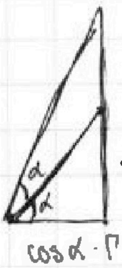
$\frac{c}{r} = \cos$



$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin 2\alpha}$

$\cos 2\alpha$





$\sin 2\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 2$

2 4 8 16 32 64 128 256 512

$(\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 2)^2 + (\cos 2\alpha)^2 = 1$

4

$56 \times 9 = 504$

512

$\cos 2\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

черновик

20 · 10 · 11 · 6

336

$\times$ 56
6
336

$\times$ 336
11
336
336
3696
200
739200

①

$x^2 + 4\sqrt{2}t\,x + 9t^2 - 9 = 0$

$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(9t^2 - 9) > 0$

$32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0$

$x_1 = \dfrac{-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$ $\quad 9 - t^2 > 0$

$x_2 = \dfrac{-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$ $\quad 9 > t^2$

$3 > t > -3$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{(-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)})(-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)})}{4} > 0$

$(-4\sqrt{2}t)^2 - 4(9 - t^2) > 0$

$32t^2 + 4t^2 - 36 > 0$

$36t^2 - 36 > 0$

$36t^2 > 36$

$t^2 > 1$

$3 > t > 1 \quad -1 > t > -3$

②

$a, b \in N$

$a - b = 12 \qquad a = b + 12$

$(b+12)^2 +$

$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b)$

$= (a+b+3)(a+b)$

н ч

$(2b+15)(2b+12)$

19 $\quad > 0$

$b = 2 \qquad 4 + 12 = 16 = 2^4 \quad P = 2$

$a = 14$