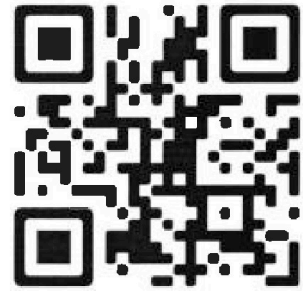




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

Найдем дискриминант этого приведенного квадратного уравнения.

$$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2$$

т.к. уравнение имеет 2 различных действительных корня  $\Rightarrow$  Дискриминант  $> 0$

$36 - 4t^2 > 0$  т.к. 4 положит. число можем сократить на него обе части неравенства

$$9 - t^2 > 0$$

$$t^2 < 9$$

$$|t| < 3 \Rightarrow -3 < t < 3$$

$$\frac{-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$$

т.к. по условию произведение корней положительное

$$\Rightarrow (-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)}) \cdot (-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)}) > 0$$

Знаменатель положительный  $\Rightarrow$  числитель должен быть положительным

Заметим что числитель представляет из себя разность квадратов чисел  $-4\sqrt{2}t$  и  $\sqrt{4(9-t^2)}$

$$\Rightarrow (-4\sqrt{2}t)^2 - 4(9-t^2) > 0$$

$$32t^2 + 4t^2 - 36 > 0$$

$$36t^2 > 36 \quad / : 36$$

$$t^2 > 1 \Rightarrow |t| > 1 \Rightarrow t > 1 \text{ и } -1 > t$$

Ответ:  $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$  или  $\begin{cases} -1 > t > -3 \\ 3 > t > 1 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N} \quad a - b = 12 \Rightarrow a = b + 12 \quad (1)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = \\ = (a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

подставим в полученное уравнение (1)

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

Заметим что т.к.  $b$  натуральное  $\Rightarrow$  обе скобки больше 0 и одна из скобок четная.

Если произведение слева  $:2$  то и  $19p^4 :2$ , но в  $19p^4$  всего два различных простых множителя

$$19 \text{ и } p. \quad 19 \nmid 2 \Rightarrow p \nmid 2 \text{ а т.к. } p - \text{простое} \Rightarrow p = 2$$

Заметим что  $2b+15$  нечетное  $\Rightarrow$  оно не может

быть  $p \Rightarrow 2b+15$  равно 1 или 19, но

$$\text{т.к. } b > 0 \Rightarrow 2b+15 > 15 \Rightarrow 2b+15 = 19 \quad b = 2$$

$$2 \cdot 2 + 12 = 16 = 2^4 \text{ все верно}$$

$$a = b + 12 = 2 + 12 = 14$$

Ответ:  $a = 14 \quad b = 2$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим  $KM$  за  $y$  тогда  $PN = \frac{KM}{2} = \frac{y}{2}$   
т.к.  $PN$  средн. линия в  $\triangle CMK$   
 $AN = 2MK = 2y$  т.к.  $KM$  средн. линия в  $\triangle BNA$   
 $\Rightarrow 2y = \frac{1}{2} + x\sqrt{2}$   
 $1,5y = x\sqrt{2}$   
 $y = \frac{x\sqrt{2} \cdot 2}{3} = KM$

По теореме Пифагора для  $\triangle CMK$ :

$$MC = \sqrt{KM^2 + KC^2} = \sqrt{56x^2 + x^2 \cdot 8} = x\sqrt{29} = \frac{16x\sqrt{2}}{3} = \frac{2BC}{3}$$
$$x = \frac{2BC}{8\sqrt{2}} = \frac{BC}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow AB = CD = 8x = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Ответ:  $AB = 3\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что если мы выберем 3 ребенка которых мы посадим на один ряд то они смогут быть единственным образом 7 к каждой следующим от двери выше предыдущего. Поэтапно количество способов выбрать из 11 людей троих на один ряд (с из 11 по 3) умножим на количество способов выбрать из оставшихся троих на другой ряд (с из 8 по 3) умножим на количество способов выбрать из оставшихся трех на другой ряд (с из 5 по 3) умножим на количество способов разместим оставшихся двух на оставшиеся ряду, а потом умножим на 4 потому что единствен-ная возможная пара может находиться в 4 разных рядах.

$$11 \cdot 10 \cdot 9$$

$$C_{11}^3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

Количество способов разместить двух человек на ряду = 4 (т.к. если они сидят подряд то их положение определяем однозначно, = 2 варианта если между ними пустая пара то 2 варианта)

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2!}{2!} = \frac{11!}{2!} = 439200$$

Ответ: количество способов равно  $\frac{11!}{2!}$  или 439200





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте обозначим дерево за вершинами графа, а дороги между ними за ребра.  
Т.к. из каждой деревни можно добраться в каждую  $\Rightarrow$  граф связен. Т.к. между всеми деревнями единственными маршрутом по которому можно добраться  $\Rightarrow$  в графе нет краевых ребер и циклов. Граф без циклов - дерево. В дереве ребер на 1 меньше чем вершин. Обозначим количество вершин за  $n$ . Тогда посчитаем количество ребер 2 способами:

1)  $n - 1$

2) сумма количества дорог исходящих из каждой деревни делен на 2 (т.к. каждая дорога принадлежит двум деревням)

$$5 + 6 + 7 + 9 + n - 4$$

$$n - 1 = 2$$

$$n - 1 = \frac{n}{2} + 11,5$$

$$\frac{n}{2} = 12,5$$

$$n = 25$$

Ответ: 25 деревень







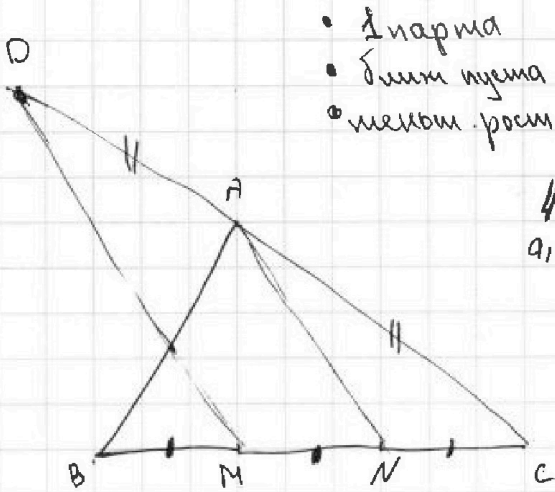


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 2 нармта
- 3 линии пуста
- 1 метком. рост

12

$4 \cdot 4 \cdot 4$   
 $a_1 a_2 a_3$

$4 \cdot 3 + 15 \cdot 4 \cdot 4$   
 $a_4$

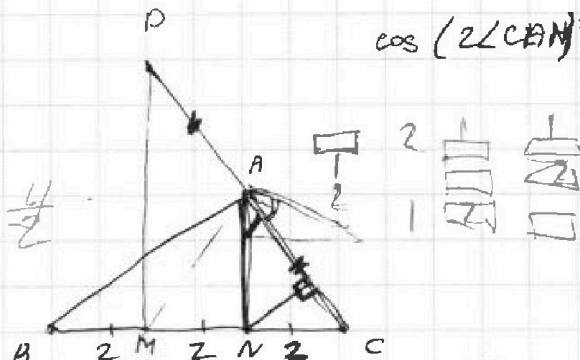
$\frac{10 \cdot 10 \cdot 9}{3!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$

$\cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 3 \cdot 4$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

$\frac{11 \cdot 90 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}$

$2y = \frac{4}{2}$



$\frac{11!}{12}$

$\sin d = \sqrt{1 - \sin^2 d} = -\frac{3}{4}$

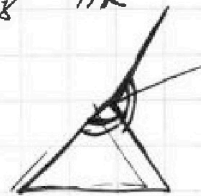
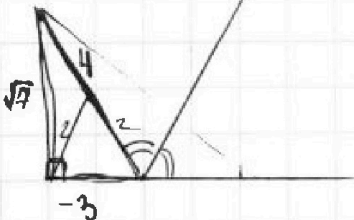
$\cos 2d = \sqrt{(\sin d - \cos d)^2}$   
 $\cos 2d = \sin d - \cos d = -\frac{3}{4}$   
 $\sin d \cdot \cos d = \frac{\sqrt{7}}{8}$  AK

$49 + 9 = 56$   
 $2\sqrt{4}$

$16 - 9 = 7$

$\frac{\sqrt{7}}{4}$

$64 \rightarrow 56 = 8$



$4 = \frac{4}{2} + \sqrt{2}x$

$\frac{4}{2} = \sqrt{2}x$

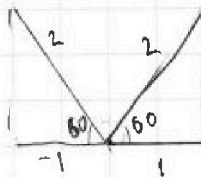
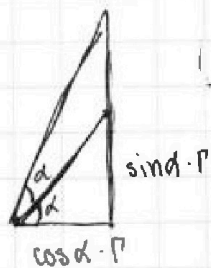
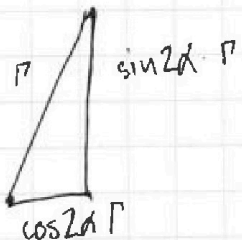
$4 = 2\sqrt{2}x$

$\cos 2d = \sqrt{\sin^2 d + \cos^2 d - 2\sin d \cos d}$

$\cos 2d = \sqrt{1 - \sin^2 2d}$

$\cos 2d$

$\frac{r}{r} = \cos$



$\sin 2d = \sin d \cdot \cos d \cdot 2$

$\frac{16}{4} \cdot \frac{32}{4} \cdot \frac{64}{4} \cdot \frac{128}{4} \cdot \frac{256}{4} \cdot \frac{512}{4}$   
 $(\sin d \cdot \cos d \cdot 2)^2 + (\cos 2d)^2 = 1$

$\times 56$   
 $\frac{56}{9}$   
 $\frac{504}{9}$

$\cos 2d = \cos d - \sin d$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик

①  $x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9t^2 - 9 = 0$

$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(9t^2 - 9) > 0$

$32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0$

$-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)}$   $9 - t^2 > 0$

$x_1 = \frac{-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$   $9 > t^2$

$x_2 = \frac{-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)}}{2}$   $3 > t > -3$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-4\sqrt{2}t + \sqrt{4(9-t^2)})(-4\sqrt{2}t - \sqrt{4(9-t^2)})}{4} > 0$

20 · 10 · 11 = 220  
 · 336  
 × 56  
 6  
 ---  
 336  
 × 336  
 11  
 ---  
 336  
 336  
 ---  
 3696  
 336  
 ---  
 739200

$(-4\sqrt{2}t)^2 - 4(9-t^2) > 0$

$32t^2 + 4t^2 - 36 > 0$

$36t^2 - 36 > 0$

$36t^2 \geq 36$

$t^2 \geq 1$

$3 > t \geq 1 \rightarrow t > -3$

②  $a, b \in \mathbb{N}$   
 $a - b = 12$   $a = b + 12$

$(b+12)^2 +$

$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b)$

$= (a+b+3)(a+b)$

$(2b+15)(2b+12)$

$19 > 0$   
 $b=2$   $4+12=16=2^4$   $p=2$   
 $a=14$