



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

1) Пусть n - количество вершин нашего многоугольника, тогда:

с одной стороны \sum его углов равен $180^\circ(n-2)$ (эта формула применима для любого n -угольника).

с другой стороны \sum углов арифметической прогрессии, т.е. $132^\circ + (132^\circ + (n-1) \cdot 2)$ но т.к. не указано в условии задачи возрастает прогрессия или убывает, рассмотрим оба случая.

$$2) 180^\circ(n-2) = \frac{132^\circ + (132^\circ + (n-1) \cdot 2)}{2} \cdot n$$

$$360^\circ(n-2) = 264n \pm (2n^2 - 2n) \quad \begin{cases} (2n^2 - 2n + 264n - 360n + 720 = 0 & \text{возрастает прогрессия} \\ -2n^2 + 4n + 264n - 360n + 720 = 0 & \text{убывает прогрессия} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 - 49n + 360 = 0 \\ n^2 + 47n - 360 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-9)(n-40) = 0 \\ n^2 + 47n - 360 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) D = 47^2 + 360 \cdot 4 = 3649 - \text{не полный квадрат } (60^2 = 3600 \text{ и } 61^2 = 3721)$$

если 3649 - полный квадрат, т.е. $3649 = z^2$, $z \in \mathbb{Z}$, $170 < |z| < 61$, но между 160 и 161 нет натуральных чисел (между двумя целыми - натуральное число) \Rightarrow УР-е (*) не имеет целых, а значит и рациональных решений.

3) откуда $n=9$ или $n=40$, т.к. оба варианта не удовлетворяют условию задачи, возрастает арифметическая прогрессия, то для $n=40$ наибольшее углы: $132^\circ + 2 \cdot 39 = 132^\circ + 78^\circ = 210^\circ > 180^\circ \Rightarrow$ при $n=40$ многоугольник невыпуклый.

проверим $n=9$: $132^\circ + 2 \cdot 8 = 148^\circ < 180^\circ \Rightarrow$ 9-угольник выпуклый.

и как известно проверяем: $\frac{132^\circ + 148^\circ}{2} \cdot 9 = \frac{280^\circ}{2} \cdot 9 = 140^\circ \cdot 9 = 20 \cdot 7 \cdot 9 = 180^\circ \cdot 7 = 180^\circ(n-2)$, поэтому выказано только $n=9$.

Ответ: 9.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

а) Заметим, что p и q отличаются не более, чем на 6:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\max} - \Sigma_{\min} &= ((a+6) + (a+5) + (a+4) + \dots + (a+1)) - ((a+5) + (a+4) + (a+3) + \dots + a) = \\ &= (a+6) - a = 6, \text{ где } \Sigma_{\max} - \text{макс. возможная сумма } 6 \text{ чисел из множества } M, \\ &\quad \Sigma_{\min} - \text{мин. возможная сумма } 6 \text{ чисел из множества } M \end{aligned}$$

б) Также ясно, что p и q - четные: если $p \neq q$, то $p - q \neq 0$, то есть $(p^2 - q^2) : 2$, то p и q - четные, и соответственно $(p - q), (p + q) : 2$.

доп-во
т.к. $p \neq q$, то чтобы $(p^2 - q^2)$ было четно $\frac{p^2 - q^2}{2}$ нужно, чтобы хотя бы одно из множителей $(p - q)$ или $(p + q)$ было четным 2, что означает, что p и q - четными не могут, но четных четных чисел всего одно $\Rightarrow p$ и q - четные, \therefore значит $(p - q), (p + q) : 2$

в) т.к. p, q - четные, то $p, q > 0 \Rightarrow p + q > p - q$ ($p + q > p - q$)
 $2q > 0$
 $q > 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad p^2 - q^2 &= 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \quad (a, b, c) \\ (p - q)(p + q) &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases} p - q = 2 & (3) \\ p + q = 540 & (3) \\ p - q = 4 & (2) \\ p + q = 270 & (2) \\ p - q = 6 & (1) \\ p + q = 180 & (1) \end{cases} \end{aligned}$$

других вариантов быть не может, т.к. если или $p - q > 6$, то противоречит а) или $p - q, p + q$ - четные, то противоречит б) или $p - q > p + q$, то противоречит в).

$$(1) \begin{cases} p - q = 6 \\ p + q = 180 \end{cases} \oplus \Rightarrow p = 93, q = 174 \quad \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \cdot 3 - \text{не четное} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$(2) \begin{cases} p - q = 4 \\ p + q = 270 \end{cases} \oplus \Rightarrow p = 137, q = 133; \quad \begin{matrix} 133 \\ 19 \cdot 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 137 \\ 19 \cdot 7 \end{matrix} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$(3) \begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 540 \end{cases} \oplus \Rightarrow p = 271, q = 269. \text{ не нужно проверять, т.к. это пара четных чисел.}$$

2) пусть Σ_{\max} - макс. возможная сумма 6 чисел из множества M
 Σ_{\min} - мин. возможная сумма 6 чисел из множества M , тогда a - 1-е число (самое маленькое из M), $a \in \mathbb{N}$.

$$\Sigma_{\min} = 3((a+3) + (a+2)) = 3(2a+5)$$

$$\Sigma_{\max} = 3((a+4) + (a+3)) = 3(2a+7), \text{ тогда должно быть верно}$$

$$\begin{cases} 3(2a+5) \leq 269 \\ 3(2a+7) \geq 271 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+5 \leq \frac{269}{3} \\ 2a+7 \geq \frac{271}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5 \leq 89 \\ 2a+7 \geq 91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 42 \\ a \geq 42 \end{cases} \Rightarrow a = 42$$

А значит $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

3) Проверим выполнимость условий сразу же для этого множества.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$42 + 43 + 44 + 45 + 47 + 48 = 240 + 14 + 15 = 269$$

$$42 + 43 + 45 + 46 + 47 + 48 = 240 + 10 + 21 = 271$$

$$271^2 - 269^2 = \frac{(271 - 269)}{2} (271 + 269) = 2 \cdot 540 = 1080$$

Ответ: $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$



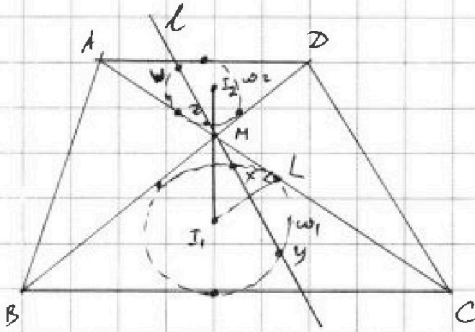
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



Дано

$ABCD$ - трап. (AD, BC - осн.); $AD:BC = 1:2$

ω_1 - вкл. в $\triangle BMC$ (I_1 - центр)

ω_2 - вкл. в $\triangle AMD$ (I_2 - центр)

W, Z, M, X, Y - на прямой l

$X, Y \in \omega_1$; $Z, W \in \omega_2$

$I_1, I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$

Найти r_1 - ?

Решение

- 1) $\triangle AMD \sim \triangle BMC$: $\angle AMD = \angle BMC$ (как вертикальные), $\angle MAD = \angle BCF$ (как соответственные при параллельных AD и BC и секущей AC) - по 2-м углам
 \Rightarrow все эл-ты будут относиться в $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$ как $AD:BC = 1:2$.
 $\Rightarrow I_2M: I_1M = 1:2$, но также по условию $M \in I_1I_2$ (т.к. I_2 - биссектриса $\angle AMD$ и I_1 - биссектриса $\angle BMC$, а биссектрисы вертикальных углов совпадают)
 $\hookrightarrow I_1I_2 = 8 \Rightarrow I_2M = \frac{16}{3}$.

2) Сделаем, что l - диаметр

$H_M^{-2}(\triangle AMD) = \triangle CMB$ (касательная с центром в I_1, M и хордой MC - 2)

$H_M^{-2}(l) = l \Rightarrow H_M^{-2}(Z) = X, H_M^{-2}(W) = Y$, а значит:

~~$\frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = 2$~~ $\frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = 2 \Rightarrow MX = 2MZ \Rightarrow$

$\Rightarrow MZ \cdot MY = 9 \Rightarrow MX \cdot MY = 2 \cdot MZ \cdot MY = 2 \cdot 9 = 18$.

3) Пусть L - точка касания ω_1 и MC , тогда по св-ву отрезков касательных и хорды

$ML^2 = MX \cdot MY = 18 \Rightarrow ML = \sqrt{18}$.

Также, зная, что радиус r_1 проведен в T -качестве, перпендикулярен касательной, то воспользуемся теор. Пифагора для $\triangle MI_1L$:

$r_1^2 = I_1L^2 = \sqrt{MI_1^2 - ML^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18} = \sqrt{\frac{256 - 18 \cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$.

Ответ: $r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$1) 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}}$$

$$5 - 4 \sin \frac{2\pi}{7} - 3 \sin \frac{3\pi}{7} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} \sqrt{0}$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} - 3 \cos \frac{2\pi}{7} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} \sqrt{0}$$

$$16 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 6 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 6 \cos \frac{\pi}{7} + 8 \sqrt{0}$$

$$8 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 8 \cos \frac{\pi}{7} + 4 \sqrt{0}$$

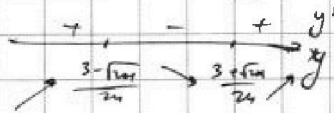
$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$



$$= \frac{5^2}{3} \left(\frac{5}{3} - 1 \right) - \frac{8}{3} = \frac{11}{3} - \frac{5^2}{3} - \frac{8}{3}$$

2) заметим, $2\pi < 5 < 3\pi$

$$\frac{5}{6} > \sqrt{\frac{3 + \sqrt{21}}{24}}$$

$$20 > 3 + \sqrt{21}$$

$$17 > \sqrt{21}$$

$$289 > 201$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3} > \frac{5}{3}$$

$$27 > 25$$

$$\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } 0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$$

3) $y\left(\frac{5}{6}\right) = 8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 8 \cdot \frac{5}{6} + 4 =$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \frac{5^2}{2 \cdot 6} - \frac{20}{3} + \frac{12}{3} = \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{4 \cdot 3} - \frac{8}{3} =$$

2) заметим, $2\pi < 41 < 3\pi$

$$\frac{41}{48} > \sqrt{\frac{3 + \sqrt{21}}{24}}$$

$$24\sqrt{3} > 41$$

$$576 \cdot 3 > 1681$$

$$1500 > 1681$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{41}{48}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } 0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$$

$$y\left(\frac{41}{48}\right) = 8 \cdot \left(\frac{41}{48}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{41}{48}\right)^2 - 8 \cdot \frac{41}{48} + 4 = \frac{41^3}{24^3} - \frac{41^2}{16 \cdot 48} - \frac{17}{6} =$$

$$= \frac{41^3}{2^3 \cdot 3^3} - \frac{41^2}{2^4 \cdot 3} - \frac{17}{6} = \frac{41^3}{36} - \frac{41^2}{24} - \frac{17}{6} = \frac{23 \cdot 41^2}{3 \cdot 2 \cdot (2^2 \cdot 3^2)} - \frac{17}{6} =$$

$$= \frac{23 \cdot 41^2}{8 \cdot 3^2} - \frac{17 \cdot 48^2}{8 \cdot 3^2} = \frac{1681 \cdot 23 - 17 \cdot 2304}{8 \cdot 3^2}$$

$$\frac{6}{7} > \sqrt{\frac{3 + \sqrt{201}}{24}}$$

$$6 \cdot 24 > 3 \cdot 7 + 7 \sqrt{201}$$

$$123 > 7 \sqrt{201}$$

$$123^2 > 49 \cdot 201$$

$$15129 > 9849$$

$$14400 > 10050$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{6}{7}$$

$$7\sqrt{3} > 12$$

$$49 \cdot 3 > 144$$

$$147 > 144$$

$$\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } 0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$$

$$y\left(\frac{6}{7}\right) = 8 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 - 8 \cdot \frac{6}{7} + 4 =$$

$$= \left(\frac{12}{7}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{20}{7} = \left(\frac{6}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7} - 8 \right) =$$

$$= \frac{27}{7} - \frac{20}{7} = \frac{7}{7} = 1 > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

506

Заметим, что если любые 4 точки $\in (\beta)$, то $\beta = \alpha$.

Пусть $A, B, C, D \rightarrow T$, не лежащие в плоскости (α) , тогда $\exists (\beta) : A, B, C, D \in \beta$.

1. 1-ая тетраэдра - $ABCD$. (точка A, B, C, D)

2. Верно, что для каждой из них можно построить инт. на прямую с вершинами только α (α), т.е. A, B, C или D - одна вершина, а ост. вершин α тогда, тогда тетраэдр α .

$$4 \cdot \left(\frac{8! \cdot 7! \cdot 6!}{3!} + \frac{8! \cdot 7! \cdot 6! \cdot 5!}{4!} + \frac{8! \cdot 7! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 4!}{5!} \right)$$

$$AB, CD \quad \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7!} +$$

выбрана 3 α 4 α 5 α 6 α 7 α

$$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8!} = 4 \cdot (56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1) = 219 \cdot 4 = 876$$

8 α

если 2 вершин α



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

522

$$1) x \lg_{25} + y \lg_{75} + z \lg_{125} = \lg_{45} \quad (1) \quad \lg_5(20)$$

$$x \lg_5 25 + y \lg_5 75 + z \lg_5 125 = \lg_5 45$$

$$2x + y(2 + \lg_5 3) + 3z = 1 + \lg_5 9 = 1 + 2\lg_5 3$$

$$2x + 2y + 3z - 1 = \lg_5 3 \cdot (2 - y)$$

т.к. $x, y, z \in \mathbb{Z}$, то $2x + 2y + 3z - 1$, $2 - y \in \mathbb{Z}$ и $\lg_5 3 \cdot (2 - y) \in \mathbb{Z}$, то

возможно только при $2 - y = 0$, т.к. $\lg_5 3 \notin \mathbb{Z}$. $\Rightarrow y = 2$.

2) подставим $y = 2$, получаем:

$$2x + 2 \cdot 2 + 3z - 1 = 0$$

$$3 + 3z + 2x = 0$$

т.к. $3, 3z, 0 \div 3$, то $2x \div 3$, т.е. $x \div 3$.

$$A = x^2 + y^2 + z^2 = 4 + (x^2 + z^2)$$

Заметим, что A минимально, когда $(x^2 + z^2)$ минимально (т.к. мы фиксируем y).

при $|x| \geq 3$, $x^2 + z^2 \geq 9$.

поэтому проверим $|x| \leq 3$ и $x \div 3$, и $x \in \mathbb{Z}$, т.е. $x = 0$:

$$3 + 3z + 2 \cdot 0 = 0, \text{ и получим } x^2 + z^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1 < 9$$

$$z = -1 \quad (\text{для остальных } x, |x| \geq 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{минимальный ответ } (x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = 0^2 + 2^2 + (-1)^2 = 5$$

Ответ: 5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

откуда:

$$y(\cos \frac{\pi}{8}) > (\cos \frac{\pi}{8}) = y(\frac{\sqrt{5}}{2}) > y(\frac{\pi}{8}) > 0 \text{ (т.к. на } [\frac{\pi}{8}; \infty) - y \text{ - возрастает)}$$

$$\Rightarrow \text{отвеч: } 5 - 4 \sin \frac{2\pi}{14} > 3 \sin \frac{2\pi}{14} - 4 \cos \frac{2\pi}{7}$$

Отвеч: $5 - 4 \sin \frac{2\pi}{14}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

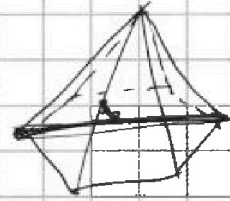
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$5 - 4 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$\sqrt{3} \sin \frac{3\pi}{14} - 9 \cos \frac{3\pi}{7}$$



$$5 - 4 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \left(\frac{3\pi}{14} \cdot 2 \right) =$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} = \frac{2\pi}{7}$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7}$$

$$\sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{7} \cdot 1.5 \right) - 9 \cos \frac{2\pi}{7}$$

$$3 \cos \frac{2\pi}{7} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

3; 4
112
182
190
28
218

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \left(\frac{\cos 2\alpha}{2\cos^2 \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha} \right) = \frac{2\cos^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1} - \frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha (4\cos^2 \alpha - 3) = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} = 3 \cos \left(\frac{\pi}{7} \cdot 2 \right) - 4 \cos \frac{\pi}{7} \cdot 3 \quad \checkmark \checkmark \checkmark$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{7} \cdot 2 \right) = 2\cos^2 \frac{\pi}{7} - 1$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} = 3(2\cos^2 \frac{\pi}{7} - 1) - 4 \left(4\cos^3 \frac{\pi}{7} - 3\cos \frac{\pi}{7} \right) \quad \checkmark \checkmark$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} = 6\cos^2 \frac{\pi}{7} + 3 + 16\cos^3 \frac{\pi}{7} - 12\cos \frac{\pi}{7} \quad \checkmark \checkmark$$

$$-16\cos^3 \frac{\pi}{7} - 6\cos^2 \frac{\pi}{7} + 8\cos \frac{\pi}{7} + 8 \quad \checkmark \checkmark$$

$$-8\cos^3 \frac{\pi}{7} - 3\cos^2 \frac{\pi}{7} + 4\cos \frac{\pi}{7} + 9 \quad \checkmark \checkmark$$

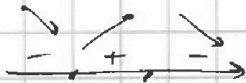
$$y = -8x^3 - 3x^2 + 4x + 9$$

$$y' = -24x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$-12x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$12x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 12 \cdot (-2)}}{2 \cdot 12} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{24}$$



$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{24}$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$(p-q)(p+q) = 1080$$

32 32

17-лет

$$\begin{array}{r} 1080 \div 2 \\ 540 \div 2 \\ 270 \div 2 \\ 135 \div 5 \\ 27 \end{array}$$

$$264h + 2h^2 - 2h = 360h - 720 \Rightarrow$$

2. Алгоритм

2.1. Алгоритм

2.2. Алгоритм

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n =$$

$$= 180(n-2)$$

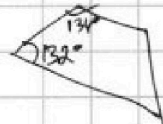
$$(2a_1 + d(n-1))n = 360(n-2)$$

$$(2 \cdot 64 + 2(n-1))n = 360(n-2)$$

$$2n^2 - 98n + 720 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0 \quad n = 9, n = 45$$

$$1 > \cos \frac{\pi}{7} > 0$$



$$\frac{282}{-360}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125$$

$$\ln 5(x+y+z) + (\ln 5^x + \ln 15^y + \ln 25^z) = \ln 45$$

$$x \log_{45} 25 + y \log_{45} 75 + z \log_{45} 125 = 1$$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad | : \ln 5 :$$

$$x \log_5 25 + y \log_5 75 + z \cdot 3 = \log_5 45$$

$$(2 + \log_5 3)$$

$$2x + 2y + y \log_5 3 + z \cdot 3 = 1 + 2 \log_5 3$$

$$2x + 2y + z \cdot 3 - 1 = \log_5 3(2 - y) \Rightarrow (2 - y) \log_5 3 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 189 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$4 + 2x + 3z = 1$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ + 72 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$3 + 2x + 3z = 0$$

$$3 + 20 + 3z = 0$$

$$3 + 2x + 3z = 0$$

$$x^2 + z^2 \rightarrow n^2$$

$$-2n^2 - 94n +$$

$$2x \Rightarrow 13$$

$$x \geq 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 \geq 9$$

$$n \mid 4 \Rightarrow 3 + 3z = 0$$

$$180^\circ(n-2) = \frac{360^\circ + (132^\circ \pm 2^\circ(n-1))}{n}$$

$$360(n-2) = (264 \pm 2(n-1))n$$

$$360n - 720 = 264n \pm (2n^2 - 2n) \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 - 2n + 264n = 360n - 720 \Rightarrow \\ -2n^2 + 2n + 264n = 360n - 720 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 262n - 360n + 720 = 0 \Rightarrow n^2 - 49n + 360 = 0 \\ -2n^2 + 266n - 360n + 720 = 0 \end{cases}$$

$$-2n^2 + 266n - 360n + 720 = 0 \Rightarrow (n-9)(n-40) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \\ n=40 \end{cases} \quad n \neq 1$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 7 \\ \hline 90 \\ 72 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$256 \quad 146$$

$$154 \quad 146$$

$$60 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$94 \quad 146$$

$$p - 2 \leq 6$$

$$132^\circ + 2^\circ \cdot 99$$

$$132^\circ + 2^\circ$$

$$n - 4 = 9$$

$$n + 4 = 9$$

$$\begin{array}{r} 1080 / 2 \\ 540 / 2 \\ 270 / 2 \\ 135 / 3 \\ 45 / 3 \\ 15 / 3 \\ 5 / 5 \\ 1 \end{array}$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$(p-2)(p+2) = 1080$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$p-2 < p+2 \Rightarrow 1 \cdot 9 > 0$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$p=2 \quad q=1$$

$$\begin{array}{r} 271 \\ - 269 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ - 133 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$137$$

$$133$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper, including a diagram of a pyramid and various calculations.

Diagram: A pyramid with apex S and base ABCDE. A point U is marked on the base. A right-angled triangle is shown with legs 3 and 4, and hypotenuse 5. Another right-angled triangle has legs 3 and 4, and hypotenuse 5. A third right-angled triangle has legs 3 and 4, and hypotenuse 5.

Calculations:

$$41 \times 41 = 1681$$

$$\frac{48}{48} \times 4 = 2000$$

$$2000 - 280 = 1720$$

$$1720 + 2304 = 4024$$

$$27 - \frac{20 \cdot 42}{36} = 900$$

$$\frac{27 \cdot 36}{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4} = 1$$

$$\frac{81 \cdot 12}{110} = 1092$$

$$5 - 4 \sin \frac{30}{14}$$

$$5 - 7 \cos \frac{11}{7} \quad \sqrt{3} \cos \frac{29}{7} - 4 \cos \frac{24}{7}$$

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 9 \quad \forall 0$$

$$y' = 6x^2 - 6x - 8$$

$$\frac{7}{8} > \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$$

$$\frac{144}{-21} = \frac{17}{24} \quad \cos \frac{7}{7}$$

$$\cos 60^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1 = 2(4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ) - 1$$

$$8 \cdot \frac{17^3}{24^3} - 3 \cdot \frac{17^2}{24^2} - 8 \cdot \frac{17}{24} + 4 \quad \forall 0$$

$$\left(\frac{3 + \sqrt{201}}{24} \right)^2 = \frac{210 + 6\sqrt{201}}{24^2}$$

$$\frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 24}$$

$$\left(\frac{3 + \sqrt{201}}{24} \right)^3 = \frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 24} \cdot \frac{3 + \sqrt{201}}{24}$$

$$\frac{153 + 19\sqrt{201}}{2 \cdot 24^2}$$

$$\frac{153 + 19\sqrt{201}}{2 \cdot 24^2} - 8 \cdot \frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 24} - 8 \cdot \frac{3 + \sqrt{201}}{24} + 4 \quad \forall 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{153 + 19\sqrt{201}}{6 \cdot 24} - \frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 8} - \frac{3 + \sqrt{201}}{3} + 4 \sqrt{0}$$

$$(153 + 19\sqrt{201}) \cdot 2 - (35 + \sqrt{201}) \cdot 9 - (3 + \sqrt{201}) \cdot 32 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 2 \sqrt{0}$$

$$\frac{306 + 38\sqrt{201} - 35 \cdot 9 - 9\sqrt{201} - 9 \cdot 32 - 32 \cdot 3\sqrt{201} + 9(7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2) \sqrt{0}}{9 \cdot 34 - 35 - 32 + 128}$$

$$\frac{231}{41} \cdot \frac{17}{48}$$

$$9 \cdot 95 + \sqrt{201} \left(\frac{38 - 9 - 32 \cdot 3}{29 - 96} \right) \sqrt{0}$$

$$- 67$$

$$\frac{94}{30} = \frac{47}{15}$$

$$9 \cdot 2 = 18$$

$$\frac{41 - 18}{18} = \frac{9 \cdot 95 \sqrt{201}}{18 \cdot 67}$$

$$\frac{67}{67} = 1$$

$$31 - 8 = 23$$

$$(26^2 = 1)$$

$$81 \cdot 25 \cdot 361 \sqrt{201} \cdot 67^2$$

$$(60 + 7)^3 = 260^3 = 216000 + 343 +$$

$$\frac{26}{26} = 1$$

$$27 \cdot 25 \cdot 361 \sqrt{201} \cdot 67^2$$

$$216393 + 3 \cdot 420 \cdot 67 + 3 \cdot 60 \cdot 7 \left(\frac{60+7}{67} \right)$$

$$\cos \frac{\pi}{8} < \cos \frac{\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{296793}$$

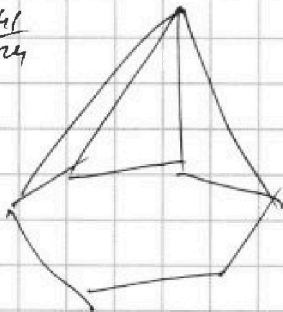
$$\frac{41}{24}$$

$$\frac{5}{3} \frac{11}{36} = \frac{8}{3} \sqrt{0}$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 67 \\ \hline 409 \\ 402 \\ \hline 4429 \\ \times 67 \\ \hline 31003 \\ 26574 \\ \hline 296743 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 27 \\ \hline 2527 \\ 722 \\ \hline 9747 \\ \times 25 \\ \hline 48735 \\ 19494 \end{array}$$

$$24$$



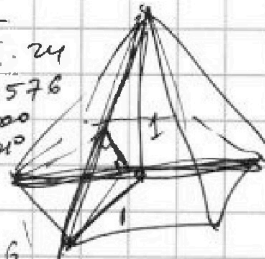
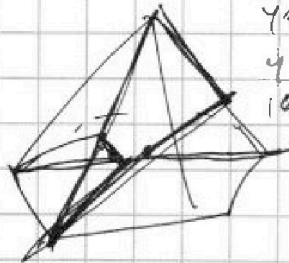
$$\frac{5}{125} \frac{11}{128} \sqrt{8 \cdot 36}$$

$$\frac{41}{48} \sqrt{3}$$

$$\frac{41}{48} \sqrt{3} \cdot 24$$

$$168 \sqrt{3} = 576$$

$$1500 + 20$$



$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \\ 1440 \\ \hline 3649 \end{array}$$

$$11 \cdot 25 \sqrt{8 \cdot 36}$$

$$\frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{36}{8} = 4.5$$

$$-\frac{41}{6} + \frac{24}{6} = \frac{288}{6}$$

$$8 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{41}{48} \sqrt{3}$$

$$\frac{360}{1440} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{61}{61} = 1$$

$$3600$$

$$8^2 - 3$$

$$8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{41}{3}$$

$$\frac{41}{48} \sqrt{3} \cdot 24 = 49 \cdot 3 \sqrt{3}$$

$$\frac{366}{3721}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{7} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{7}} - 4 \cos \frac{3\pi}{7} \quad \text{ж.} \quad \frac{5^3}{3} - 3 \cdot \frac{5^2}{2 \cdot 6} - 4 \frac{5}{3} + 4 \sqrt{3}$$

$$5 - 4 \cos \frac{\pi}{7} \sqrt{3 \cos \frac{2\pi}{7}} - 4 \cos \frac{3\pi}{7} \quad \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2 \cdot 6} - \frac{20}{3} \cdot \frac{12}{3} - \frac{20}{3}$$

$$5 - 4x \sqrt{3(2x^2 - 1)} - 4(4x^3 - 3x) \quad \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2 \cdot 6} - \frac{1}{3}$$

$$5 - 4x \sqrt{6x^2 - 3} - 16x^3 + 12x$$

$$16x^3 - 6x^2 - 16x + 8 \sqrt{0} \quad \frac{5^3}{3} \parallel \frac{17}{36} - \frac{1}{3}$$

$$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4 \sqrt{0} \quad \frac{5^2}{3} \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{4} \right)$$

$$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0 \quad \frac{17}{36} - \frac{1}{3}$$

$$12x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \frac{17}{36} - \frac{1}{3}$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 201$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$$

$$y = 8 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 8 \cos x + 4 \cos \frac{\pi}{2} \approx \cos \frac{\pi}{7} \quad \frac{\sqrt{2+52}}{2} \approx \frac{12}{19}$$

$$y' = 24 \cos^2 x (-\sin x) - 6 \cos^2 x (-\sin x) - 8(-\sin x) = 0 \quad x \in [0; \pi]$$

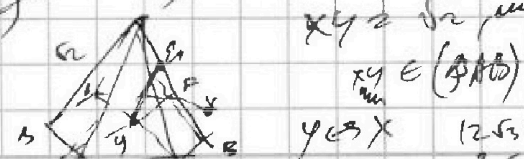
$$-8 \sin x (24 \cos^2 x - 6 \cos^2 x - 8) = 0$$

$$\frac{17}{24} < \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{289}{144} \cdot 2 + \frac{1}{144} \sqrt{2+6}$$

$$8 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{201}}{24} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{201}}{24} \right)^2 + 8 \cdot \frac{3 + \sqrt{201}}{24} + 4 \sqrt{0}$$

$$\frac{3 \cdot 24^2}{8 \cdot 24} - \frac{3 \cdot 24^2}{8 \cdot 24} + \frac{3 \cdot 24^2}{8 \cdot 24} + 4 \sqrt{0}$$



$$xy \in (A, B) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{20} = \frac{12\sqrt{3}}{20} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 271 \\ 269 \end{array} \text{ (✓)}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 133 \end{array} \text{ (✗)}$$

$$\begin{array}{r} 271; 269 \\ \sim \quad \sim \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ + & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & 269 \end{array}$$

$$42; 43; 44; 45; 46; 47; 48$$

$$\begin{array}{r} 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \\ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31; 29 \\ 19; 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x \leq 269 \\ x \leq \frac{269}{3} = 89 \\ abcdefg \geq 271 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d+e \geq 9 \quad y \geq \frac{271}{3} = 90 \\ y > 91 \end{array}$$

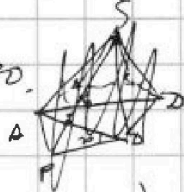
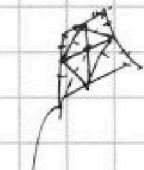
$$\begin{array}{l} 0; 1; 2; 3; 5; 6 \\ 0; 1; 3; 4; 5; 6 \end{array} \begin{array}{l} = 13 \\ = 19 \end{array}$$

$$\begin{cases} x \leq 89 \\ y > 91 \\ y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 89 \\ y = 91 \end{cases}$$

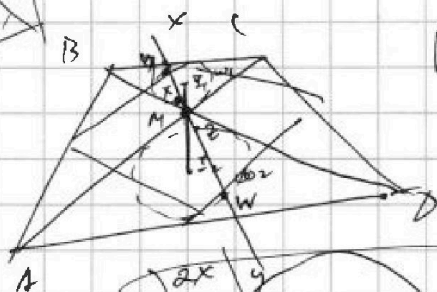
$$42 + 43 + 44 + 45 + 47 + 48 = 269$$

$$42 + 43 + 45 + 46 + 47 + 48 = 271$$

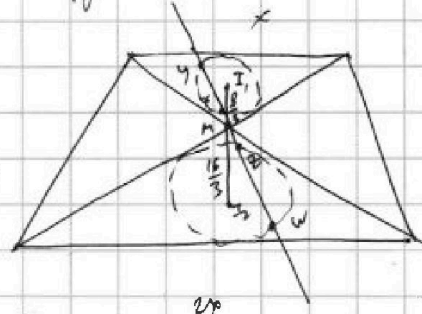
$$271^2 - 269^2 = (271+269)(271-269) = 540 \cdot 2 = 1080$$



MZ.MY



$\sqrt{w_1} = ?$
 $I_1, I_2 = 8$
 $MZ \cdot MY = 9$



$$\frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = \frac{1}{2}$$

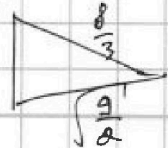
$$MZ \cdot MY = MX \cdot MW = 9 \sqrt{18}$$

$$\frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{MZ \cdot MY}{\frac{MX}{2}} = \frac{MZ}{MX} \cdot (MX \cdot MY)$$

$$\begin{array}{l} \frac{8}{3} \\ \sqrt{\frac{9}{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{9}{2} \\ \frac{64 \cdot 2 - 9 \cdot 3}{9 \cdot 2} \\ \frac{128 - 81}{18} \end{array}$$

$$\frac{128 - 81}{18} = \sqrt{\frac{47}{18}}$$



$$\begin{array}{l} \frac{64}{9} - \frac{9}{2} \\ \frac{128 - 81}{18} = \sqrt{\frac{47}{18}} \end{array}$$