МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q - две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

Для начала найдём, чему равна сумма углов n-угольника, данного в задаче: $143+(143+2)+(143+2\cdot 2)+\ldots+(143+2\cdot(n-1))$ $=143n+2(1+2+3+\ldots+(n-1))=143n+n(n-1)$. Здесь n – количество углов в фигуре из задачи. Эта сумма должна быть равна, по известной формуле, $(n-2)\cdot 180$. Приравняв эти формулы, получаем уравнение: $143n+n(n-1)=180(n-2) \Leftrightarrow n^2-38n+360=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Виета $n=\left[\begin{array}{l}18\\20\end{array}\right.$. Стоит заметить, что

угол выпуклого многоугольника не может быть

больше 180, можем записать этот факт в виде неравенства: $143+2\cdot(n-1)<180 \Rightarrow n<19{,}5$, т.е. (т.к. $n\in Z$) $n\leq 19$. Поэтому наибольшее количество вершин у данного многоугольника – 18.

Ответ: 18.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Зад~~ №2

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln(16^x\cdot 8^y\cdot 24^z) =$

$= \ln 6 \Rightarrow 16^x\cdot 8^y\cdot 24^z = 6 \Leftrightarrow 2^{4x}\cdot 2^{3y}\cdot 2^{3z}\cdot 3^z = 2^1\cdot 3^1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ т.к. числа целые: $\begin{cases} z=1, \\ 4x+3y+3=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ 4x+3y=-2; \end{cases}$

Второе равенство задаёт прямую $y=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ если $|x|\nearrow$, то $|y|\nearrow$. Нам нужно найти минимальное значение для $|x|+|y|$. Оно будет достигаться при $x=1$, $y=-2$, ведь меньшим, чем 1 модулем у целого числа может быть только 0, но при $x=0$ $y\notin\mathbb{Z}$, а при $|x|>1$ $|y|>2$ (~~как но~~ из того, что написано выше). Значит, $x^2+y^2+z^2=1+4+1=6$ и это наименьшее значение.

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3.

Имеем 7 подряд идущих натуральных чисел: $n, n+1, n+2, \ldots, n+6$ (n — наименьшее из них). ~~Пол~~ По условию $p = 6n+k$ и $q = 6n+l$, где k и $l \in \mathbb{Z}$ и $15 \le k \le 21$, $15 \le l \le 21$ (т.к. если взять первые 6 ~~подряд идущих~~ данных чисел, то их сумма будет равна $6n+15$, а если взять крайние 6, то $6n+21$).

Также заметим, что т.к. p и q — простые и равны тому, что было написано выше, то $k \not\vdots\, 3$, $k \not\vdots\, 2$, $l \not\vdots\, 3$, $l \not\vdots\, 2$. Получаем, что $k \in \{17, 19\}$ и $l \in \{17, 19\}$. Из данного в условии равенства следует, что $k > l$, а значит $k = 19$, а $l = 17$.

Подставляем наши p и q в равенство из условия и получаем уравнение для n:

$$(6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 792 \Leftrightarrow 24n + 72 = 792 \Rightarrow n = 30.$$

Ответ: $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

~~$5-4\sin\frac{3\pi}{14} \vee 4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14} \Leftrightarrow 5\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{14}\right) \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 4\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right)+\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{14}\right)$~~. Пусть $\frac{\pi}{14}=\alpha$, тогда $5-4\sin 3\alpha \vee 4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha \Leftrightarrow 5(1+\sin\alpha) \vee$

$\vee\ 4(\cos 2\alpha+\sin 3\alpha)$, $\cos 2\alpha+\sin 3\alpha = \cancel{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha+}$

$\cancel{+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha} = 1-2\sin^2\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha =$

$=(1+\sin\alpha)(1-4\sin^2\alpha+2\sin\alpha) \Rightarrow 5 \vee 1-4\sin^2\alpha+2\sin\alpha$

(сократили на $1+\sin\alpha$, зная, что $\sin\alpha \neq -1$ и т.к. $1+\sin\alpha>0$ – знак неравенства не изменится)

$2\sin^2\alpha-\sin\alpha+2 \vee 0$. Рассмотрим левую часть как квадратный трёхчлен относительно $\sin\alpha$.

$D=1-16=-15$, $D<0 \Rightarrow 2\sin^2\alpha-\sin\alpha+2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5-4\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$.

Ответ: $5-4\sin\frac{3\pi}{14}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что у пирамиды не более 8 вершин, т.к. если их больше, то в одной плоскости должны лежать более 7 точек, а по условию в одной плоскости у нас максимум 7 точек (это α).

Далее рассмотрим 2 случае: I) у пирамиды 4 вершины; II) у пирамиды 5, 6, 7 или 8 вершин.

I: количество пирамид в данном случае равно $\frac{12!}{4!8!} - \frac{8!}{4!4!} = \frac{12\cdot 11\cdot \overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9}{\cancel{24}} - 70 = 4\overset{2}{\cancel{9}}5$. (нам просто нужно выбрать любые 4 точки из 12 и вычесть случаи, когда эти все лежат в α)

II: если ~~5 вершин~~: $\frac{\overset{7}{\cancel{12}}!}{\cancel{4}!\cdot 3!}\cdot 5 = 7\cdot 25 = 155$,

если 6 вершин: $\frac{7!}{5!\,2!}\cdot 5 = 105$,

если 7 вершин: $\frac{7!}{6!}\cdot 5 = 35$,

если 8 вершин: 5 ~~вариантов~~ пирамид.

(выбираем 4, 5, 6 или 7 вершин соответственно в α и одну из 5 точек $\notin \alpha$)

Значит существует $4\overset{2}{\cancel{9}}5 + 155 + 105 + 35 + 5 = 7\overset{2}{\cancel{9}}5$ пирамид, удовлетворяющих условию.

Ответ: $7\overset{2}{\cancel{9}}5$.

№ 6

1) треугольная: 4 точки: $3\alpha + 1: \frac{7\cdot6\cdot5}{6}\cdot5 = 7\cdot25.$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$2\alpha + 2: \frac{7\cdot6}{2}\cdot\frac{5\cdot4}{2} = 7\cdot6\cdot5$

$\alpha + 3: 7\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{6} = 7\cdot10$

$4: \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{6}$

n-угольные: I) $8 \le n \le 12$

II) $3 \le n \le 7.$

I)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha +$

$+\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha =$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

$(\cos 2\alpha + \sin 3\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha =$

$= 1+\sin\alpha - 2\sin^2\alpha(1+\sin\alpha) + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$

$2\sin\alpha(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$

$= (1+\sin\alpha)(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha(1-\sin\alpha)).$

$4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 4 \vee 0$

$2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 2 \vee 0$

$D = 1 -$

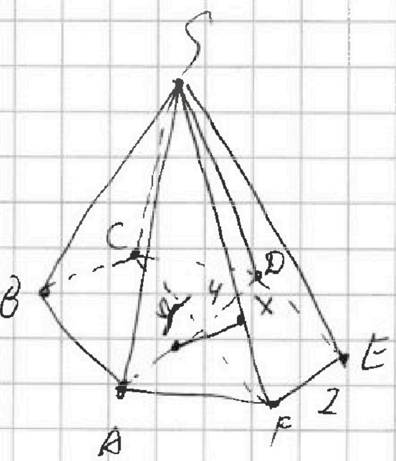
$4\cdot 3\cdot 2 =$

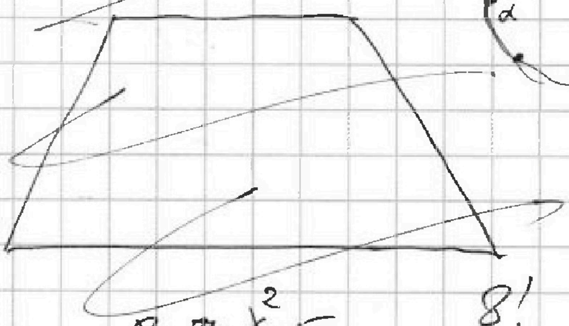
$495 + 155 = 650$, $650 + 105 = 755$

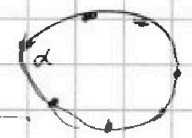
$755 + 35 = 790$

№6

№7

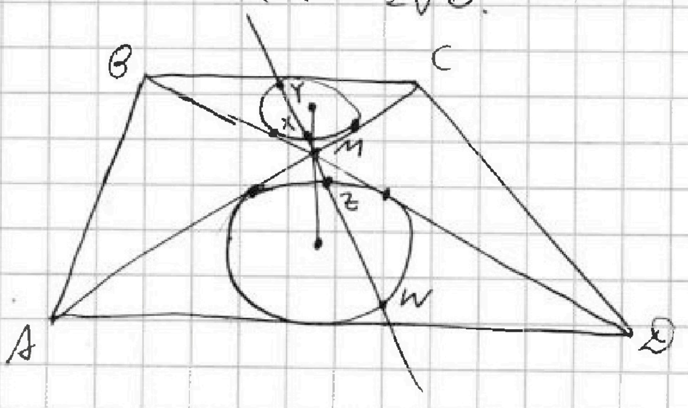






$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{24} = \frac{8!}{4!\,4!}$

$2\cdot 7\cdot 5 = 70.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№.

$7 \cdot 6 \cdot 5$

$4\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right)+\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right)$

$\sin\frac{\pi}{14}<\frac{\pi}{14}$

$5\sin\frac{\pi}{14}<\frac{5\pi}{14}$

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$5\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(\cos^2\frac{\pi}{14}-\sin^2\frac{\pi}{14}-\right.$
$\left.-\sin^3\frac{\pi}{14}+3\cos^2\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{14}<\frac{3\pi}{14}$

$4\sin\frac{3\pi}{14}<\frac{12\pi}{14}=\frac{6\pi}{7}$

$4\left(\cancel{\cos^2\frac{\pi}{14}}-\sin^2\frac{\pi}{14}\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right)+3\cos^2\frac{\pi}{14}\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right)=\right.$

$=4\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right)\left(3\cos^2\frac{\pi}{14}-\sin^2\frac{\pi}{14}\right)$

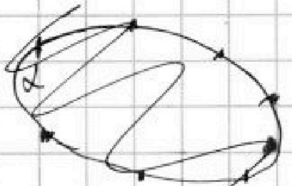
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

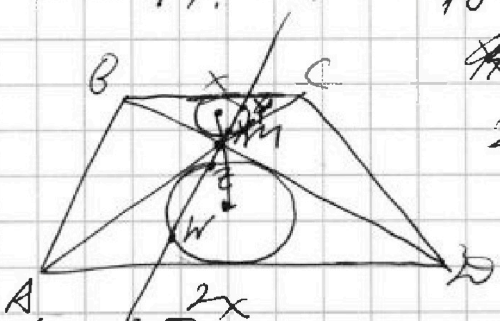
$5 \vee 4\left(3\cos^2\frac{\pi}{14}-\sin^2\frac{\pi}{14}\right)$

$\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 7\cdot 5$

$\cos\frac{\pi}{7}+2\cos^2\frac{\pi}{14} \vee 1{,}25$

№4





$MZ = 2MY$

$2MY^2 = 5$

$MY = \sqrt{\frac{5}{2}}$

№5

$7-4\sin^2\frac{\pi}{14}$

$5 \vee 4\left(3\cos^2\frac{\pi}{14}-\sin^2\frac{\pi}{14}\right)$

$\cos\frac{\pi}{14}>\frac{\pi}{14}$

$12\cos^2\frac{\pi}{14}>12\frac{\pi^2}{14^2}=\frac{3\pi^2}{49}$

$12\cos^2\frac{\pi}{14} \vee 5+4\sin^2\frac{\pi}{14}$

$\sin\frac{\pi}{14}<\frac{\pi}{14}$

$4\sin^2\frac{\pi}{14}<\frac{4\pi^2}{14^2}$

$\frac{3\pi^2}{42} \overset{<}{\vee} 5+\frac{\pi^2}{49}$

$\frac{2\pi^2}{42} \overset{<}{\vee} 5$

$5+4\sin^2\frac{\pi}{14} < 5+\frac{4\pi^2}{14^2}=5+\frac{\pi^2}{49}$

$5-4\sin 3\alpha \vee 4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha$

$12-5 \vee 16\sin^2\frac{\pi}{14}$

$5(1+\sin\alpha) \vee 4(\cos 2\alpha+\sin 3\alpha)$

$7 \overset{>}{\vee} 16\sin^2\frac{\pi}{14}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2.

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6 \qquad x^2+y^2+z^2=?$

$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6$

$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6 = 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 2^1 \cdot 3^1 \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ 4x+3y+3=1 \end{cases}$

$2^{4x+3y} \quad 3^z \cdot 2^{3z}$

$4x+3y=-2.$

$x = -\frac{2+3y}{4}$

$x+0{,}75y=-0{,}5.$

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

№3.

$n, n+1, n+2, \ldots, n+6$

$p = 6n+k \qquad q = 6n+l \qquad (6n+k)^2-(6n+l)^2 = 7962$

$15 \le k \le 21 \qquad 15 \le l \le 21$

$k, l \vdots 3, 2 \qquad 17 \qquad k>l$

$12nk + k^2 - 12nl - l^2 = 7696$

$12n(k-l)+(k-l)(k+l) = 7962$

$19, 17 \qquad k, l \quad 6$

$\{17, 19, 23\}$

$24n + 2\cdot 36 = 796$

$k=19, \ l=17$

$n = \frac{720}{24} = \frac{360}{12} = \frac{90}{3} =$

$=30.$

$\frac{1}{17} \quad 19 \quad \frac{+17}{36} \qquad \frac{\times 36}{72} \qquad \frac{-792}{72}\ 720$

№5

$\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{14} = \cos^2\frac{\pi}{14} - \sin^2\frac{\pi}{14} + \sin\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{\pi}{14} - \sin^3\frac{\pi}{14} + 2\cos^2\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14} =$

$= \cos^2\frac{\pi}{14} - \sin^2\frac{\pi}{14} - \sin^3\frac{\pi}{14} + 3\cos^2\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}$

$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} \vee 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14},$

$4\sin\left(\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi}{14}\right) = \quad 4\left(\cos^2\frac{\pi}{14} - \sin^2\frac{\pi}{14}\right)$

$=4\left(\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos^2\frac{\pi}{14}-\sin^2\frac{\pi}{14}\right)+2\cos^2\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}\right)$

$5 - 4\sin\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{\pi}{14} - 4\sin^3\frac{\pi}{14} + 8\cos^2\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14} \vee 4\cos^2\frac{\pi}{14} - 4\sin^2\frac{\pi}{14} - 5\sin\frac{\pi}{14}.$

$5\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{14}\right)$

$4\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right) + \left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{14}\right).$

$\sin\frac{\pi}{14} < \cos\frac{\pi}{7}$ или $\sin$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

143, 143+2, 143+4 ...

$(n-2)\cdot 180$

$180 - 143 = 37$ $\quad 37:2 = 18,5$

max угол: $143 + 2\cdot 18 = 179$

Условия: $3 \le k \le 19$ и $\cancel{143n + 2(n-1)} : 180$

$S_{\text{арифм.}} = 143n + k(n-1)$

$n=19$: $143\cdot 19 + 2(18+17+16+\ldots+1) = 143\cdot 19 + 2\cdot\frac{18\cdot 19}{2} =$

$= 143\cdot 19 + 18\cdot 19 : 180$

$n = 18$: $\cancel{143\cdot 18}$

k - членов арифм. прогрессии

n - кол-во углов

Условие: $143k + k(k-1) = 180(k-2)$, $k \in \mathbb{Z}$, $3 \le k \le 19$

$143k + k^2 - k = 180k - 360$.

$k^2 - 38k + 360 = 0$ $\quad D = 38^2 - 4\cdot 360 = 1444$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 38 \\ k_1 k_2 = 360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5 \end{cases}$$

$a_1 = 143$, $a_2 = 143+2$, $a_3 = 143 + 2\cdot 2$, ... $a_n = 143 + 2\cdot(n-1)$

$S_n = 143\cdot n + 2(1+2+3+\ldots+(n-1)) = 143n + (n-1)n = 180(n-2)$

$n^2 - 38n + 360 = 0$.

$n = \left[\begin{array}{l} 15 \\ 24 \end{array}\right.$ $\quad$ Ответ: $n = 15$.