



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



- [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x - 2|$ и $|x^2 + 3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x + 1|$. Найдите x .
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$.
- [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a + 1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.

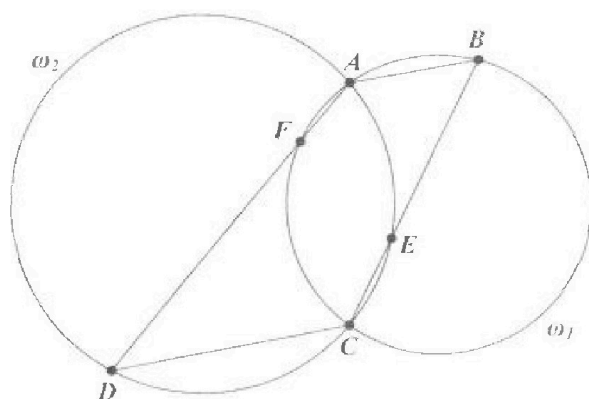
- [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3} - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

- [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 — его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

- [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE , если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.





1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1 стр. 1 из 2

Докажем свойство модуля: $(|a|)^2 = a^2$, где a — любое число
 Если $a \geq 0$, то $|a| = a$ и $(|a|)^2 = a^2$
 Если $a < 0$, то $|a| = -a$ и $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$
 Свойство доказано.

В прямоугольном треугольнике работает теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы \Rightarrow выполняется уравнение $(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$.
 Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} (2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 &= (3x+1)^2 \\ (2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 &= (3x+1)^2 \\ 4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 &= 9x^2 + 6x + 1 \\ 4x^2 - 4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 9x^2 - 6x - 1 &= 0 \\ x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Теорема:

Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами равны всевозможным частям от деления какого-то из делителей свободного члена на делитель старшего коэффициента (делители могут быть отрицательными). (Свободный член многочлена $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3$ равен 3, а старший коэффициент равен 1 \Rightarrow рациональные корни этого многочлена равны ± 1 и ± 3 .)

Проверим корень $x=1$:

$1^4 + 6 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 + 3 = 1 + 6 + 4 - 14 + 3 = 0 \Rightarrow x=1$ является корнем уравнения \Rightarrow многочлен $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3$ делится на $(x-1)$ (это следствие из теоремы Безу). Разделим многочлен на $(x-1)$:

$$\begin{array}{r} x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \quad | \quad x-1 \\ \underline{x^4 - x^3} \\ - x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \\ \underline{+ 7x^2} - 14x + 3 \\ - 11x^2 - 14x + 3 \\ \underline{+ 11x} - 11x + 3 \\ - 3x + 3 \\ \underline{+ 3} \\ 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1 стр. 2 из 2

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 11x - 3)$$

Предположим, что многочлен $x^3 + 7x^2 + 11x - 3$ имеет рациональные корни, также равные ± 1 и ± 3 . Проверим эти корни:

$$x = -1: -1 + 7 - 11 - 3 = -8 \neq 0$$

$$x = 1: 1 + 7 + 11 - 3 = 16 \neq 0$$

$$x = 3: 27 + 63 + 33 - 3 \neq 0$$

$$x = -3: -27 + 63 - 33 - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ является корнем} \Rightarrow$$

\Rightarrow многочлен $x^3 + 7x^2 + 11x - 3$ делится на $x + 3$.

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ 4x^2 + 11x \\ \underline{4x^2 + 12x} \\ -x - 3 \\ \underline{-x - 3} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 + 7x^2 + 11x - 3 = (x^2 + 4x - 1)(x + 3)$$

Найдем корни многочлена $x^2 + 4x - 1$

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 16 + 4 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{5} \quad x_2 = -2 - \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = (x + 2 - \sqrt{5})(x + 2 + \sqrt{5})$$

В итоге получилось, что $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 =$

$$= (x-1)(x+3)(x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5})$$

Поэтому числа $1; -3; -2 + \sqrt{5}; -2 - \sqrt{5}$ являются корнями уравнения. ~~и вот~~

Ответ: $1; -3; -2 + \sqrt{5}; -2 - \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 стр. 1 из 1

$$\begin{aligned} x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} &= \sqrt{32} + \sqrt{116} \\ 2x\sqrt{2} + 3y\sqrt{2} + z\sqrt{29} &= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29} \quad | : \sqrt{2} \\ 2x + 3y + z\sqrt{\frac{29}{2}} &= 4 + 2\sqrt{\frac{29}{2}} \end{aligned}$$

$$2x + 3y - 4 = \sqrt{\frac{29}{2}} \cdot (2 - z)$$

$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x + 3y - 4$ это целое число, $2 - z$ тоже целое число.

$\sqrt{\frac{29}{2}}$ - иррациональное число, $2 - z$ - целое, и они при умножении друг на друга дают целое число. Такое возможно только, когда это целое число равно 0, т.е. $2 - z = 0$, т.е. $z = 2$

тогда:

$$2x + 3y - 4 = \sqrt{\frac{29}{2}} \cdot 0 \Rightarrow 2x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 - 3y}{2}$$

число $z = \text{const} = 2 \Rightarrow$ чтобы выражение $x^2 - y^2 + z^2$ было наименьшим, число $x^2 - y^2$ должно быть наименьшим.

$x^2 - y^2 = \left(\frac{4 - 3y}{2}\right)^2 - y^2$, надо найти минимальное число $\left(\frac{4 - 3y}{2}\right)^2 - y^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4 - 3y}{2}\right)^2 - y^2 &= \left(\frac{4 - 3y - y}{2}\right)\left(\frac{4 + 3y + y}{2}\right) = \frac{4 - 5y}{2} \cdot \frac{4 + y}{2} = \frac{16 - 4y - 20y + 5y^2}{4} = \\ &= \frac{5y^2 - 24y + 16}{4} = 1,25y^2 - 6y + 4 \end{aligned}$$

Пусть, $f(y) = 1,25y^2 - 6y + 4$. Тогда график этой функции - это парабола с ветвями вверх \Rightarrow ее минимум достигается в вершине параболы. x_0 - абсцисса вершины Пусть b - коэф. b - абсцисса вершины параболы. По формуле: $b = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1,25} = \frac{6}{2 \cdot 1,25} =$

$\frac{3}{1,25}$. Тогда минимальное значение функции равно:

$$\begin{aligned} f_{\min} &= 1,25 \cdot \left(\frac{3}{1,25}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{1,25} + 4 = 1,25 \cdot \frac{9}{1,25} - \frac{18}{1,25} + 4 = \frac{36}{5} - \frac{72}{5} + \\ &+ 4 = \frac{36 - 72 + 20}{5} = -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

Тогда наименьшее значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$ равно $-\frac{16}{5} + 2^2 = -\frac{16}{5} + 4 = \frac{20 - 16}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$

Ответ: наименьшее значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$ равно 0,8

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 стр. 1 из 2

Для начала, определим условие для x .

$$\begin{cases} 4x - x^2 - 3 \geq 0 \\ 2x - x^2 \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} \neq \sqrt{x^2 + x - 2} \\ 2x - x^2 \neq x^2 + x - 2 \\ / \end{cases}$$

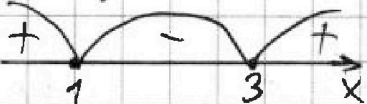
$$\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} \neq \sqrt{x^2 + x - 2} \\ \sqrt{4x^2 - x^2 - 3} \neq 3 \end{cases}$$

$$4x - x^2 - 3 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

Метод интервалов:

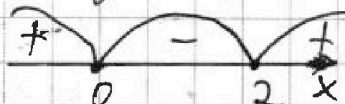


$$2x - x^2 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 2x \leq 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 0$$

Метод интервалов:



$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = +1$$

Метод интервалов:



$$\sqrt{2x - x^2} \neq \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$2x - x^2 \neq x^2 + x - 2$$

$$2x^2 - x - 2 \neq 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow x \neq \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

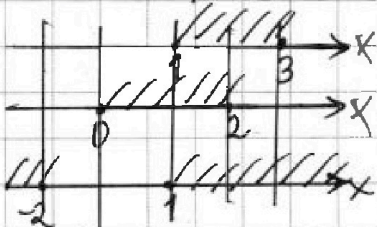
$$\sqrt{4x - x^2 - 3} \neq 3$$

$$4x - x^2 - 3 \neq 9$$

$$x^2 - 4x + 12 \neq 0$$

$$x_1 + x_2 = 4 \quad D = 16 - 4 \cdot 12 = 16 - 48 < 0$$

$$x_1 x_2 = 12 \quad x^2 - 4x + 12 > 0 \text{ всегда}$$



$$\Rightarrow x \in [1; 2]; \quad \frac{1 - \sqrt{17}}{4} < x < 1$$

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{4} < 1 < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} = 2$$

Условие для x ($0 \leq x < 3$): $x \in [1; \frac{1 + \sqrt{17}}{4}) \cup (\frac{1 + \sqrt{17}}{4}; 2]$

Рассмотрим параболы $4x - x^2 - 3$, $2x - x^2$, $x^2 + x - 2$. x_0 - вершина параболы.

$4x - x^2 - 3$: $x_0 = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$; это парабола с ветвями вверх \Rightarrow на промежутке от $[0; 1]$ эта парабола возрастает.

$2x - x^2$: $x_0 = \frac{-2}{-2} = 1$; это парабола с ветвями вниз \Rightarrow на промежутке $[0; 1]$ эта парабола возрастает, убывает.

$x^2 + x - 2$: $x_0 = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$; это парабола с ветвями вверх \Rightarrow на промежутке $[1; 2]$ эта парабола возрастает.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 стр. 2 из 2

Теперь найдем минимум и максимум каждой функции из $f(x)$, $g(x)$ и $y(x)$ ($f(x) = 4x - x^2 - 3$, $g(x) = 2x - x^2$, $y(x) = x^2 + x - 2$) на промежутке $[1, 2]$.

$$f_{\min} = 4 - 1 - 3 = 0; f_{\max} = 8 - 4 - 3 = 1$$

$$g_{\min} = 8 - 4 - 3 = 1; g_{\max} = 4 - 1 - 3 = 0$$

$$y_{\min} = 1 + 1 - 2 = 0; y_{\max} = 4 + 2 - 2 = 4$$

Тогда левая часть неравенства находится в промежутке от $\frac{1}{-3}$ до $\frac{1}{-2}$, а правая в промежутке от $\frac{1}{1-0} = \frac{1}{1}$ до $\frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$. Обе части неравенства на определенных промежутках монотонно возрастают или убывают.

При ~~увеличении~~ До того момента, как правая часть станет отрицательной, левая часть всегда меньше (т.к. она отрицательна). После того, как правая часть стала отрицательной, она стала меньше левой, и так до того момента, как правая часть стала равной $-\frac{1}{2}$ (в этом случае левая часть тоже будет равна $-\frac{1}{2}$), это выполняется при $x=2$)

$$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} = 0 \text{ при } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \text{ не входит в ОДЗ} \Rightarrow \text{до } x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \text{ правая часть будет больше левой,}$$

а после - всегда меньше, до того, как при $x=2$ не наступит равенство. Поэтому, неравенство выполняется при

$x \in [1; \frac{1 + \sqrt{17}}{4}) \cup \{2\}$ (функция $\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2}$ сначала уменьшается до нуля, ~~примерно равного 0~~ ^{стремящегося к}, а после начинает увеличиваться от отрицательного числа $-\infty$ до числа $-\frac{1}{2}$).

Ответ: $x \in [1; \frac{1 + \sqrt{17}}{4}) \cup \{2\}$

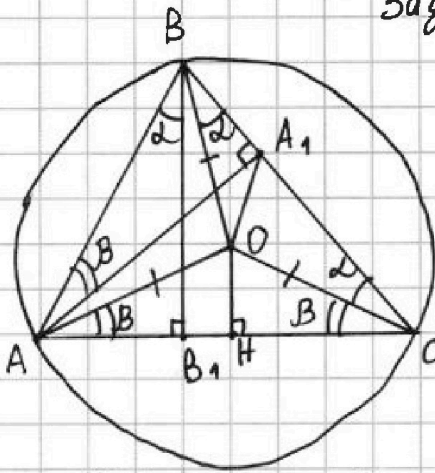


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 стр 1 из 1



$\triangle ABC$ остроугольный \Rightarrow его центр описанной окружности и его высоты лежат внутри него. Пусть $A_1B = x$, $\angle OBA_1 = \alpha$, $\angle BAA_1 = \beta$, $OA = OB = OC = r$ (равны как радиусы) описанной окружности.
 $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$ (т.к. $\triangle OBC$ равнобедренный) $\Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$
 $\angle BOC$ - центральный, опирается на BC ,
 $\angle BAC$ - центральный, опир. на BC

$$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle ABB_1 = 180^\circ - \angle BAC - \angle AB_1B = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$$

$$\angle OAC = \angle OCA = \beta \text{ (т.к. } \triangle AOC \text{ равнобедренный)}; \text{ пусть } \angle OAC = \gamma$$

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma \text{ (т.к. } \angle AOC \text{ - центральный)}$$

$\angle ABC$ - вписанный, оба опираются на AC

$$\angle BAA_1 = 180^\circ - \angle ABC - \angle 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \gamma = \gamma \Rightarrow \angle BAA_1 =$$

$$= \angle OAC = \angle OCA = \beta$$

$\triangle BAA_1 \sim \triangle OAA_1$ $\sin \beta = \frac{BA_1}{AB} = \frac{OH}{OA}$, т.е. $\sin \beta = \frac{x}{AB} = \frac{OH}{r}$ (OH - перпендикуляр из O на AC , т.е. это расстояние от O до AC)

$$S_{\triangle OBA_1} = \frac{A_1B \cdot BO}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{x \cdot r}{2} \cdot \sin \alpha \text{ (формула площади через синус)}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB_1}{AB} = \frac{6}{AB} \text{ (из } \triangle ABB_1 \text{)}$$

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x}{AB} = \frac{OH}{r} \\ \sin \alpha = \frac{6}{AB} \end{cases}$$

$$\frac{x \cdot r}{2} \cdot \sin \alpha = S_{\triangle OBA_1}$$

$$\frac{x \cdot r}{2} \cdot \sin \alpha = S_{\triangle OBA_1}$$

$$\sin \alpha = \frac{6}{AB} \Rightarrow S_{\triangle OBA_1} = \frac{x \cdot r}{2} \cdot \frac{6}{AB} = \frac{3xr}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3xr}{AB} = 6 \Rightarrow \frac{xr}{AB} = 2$$

разделим уравнения $\frac{x}{AB} = \frac{OH}{r}$ и $\frac{xr}{AB} = 2$

$$\frac{x}{AB} = \frac{OH}{r} \cdot r \Rightarrow \frac{xr}{AB} = OH; \frac{xr}{AB} = 2 \Rightarrow OH = 2$$

Ответ: расстояние от точки O до AC равно 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6 стр. 1 из 1

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Сложим эти уравнения и получим:

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2x + 2y^2 - 3y + 1 &= 0 \\ x^2 - x(3y - 2) + (2y^2 - 3y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Решим это уравнение относительно x :

$$D = (-(3y - 2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2y^2 - 3y + 1) = 9y^2 - 12y + 4 - 8y^2 + 12y - 4 =$$

$$\begin{aligned} &= y^2 \\ \text{При } y \geq 0: |y| &= y \\ x_{1,2} &= \frac{3y - 2 \pm y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } y < 0: |y| &= -y \\ x_{1,2} &= \frac{3y - 2 \mp y}{2} \end{aligned}$$

В любом случае получается 2 корня: $\frac{3y - 2 \pm y}{2}$, поэтому не будем рассматривать разные случаи y .

$$x_1 = \frac{3y - 2 + y}{2} \quad x_2 = \frac{3y - 2 - y}{2}$$

$$x_1 = 2y - 1 \quad x_2 = y - 1$$

① случай: $x = 2y - 1$:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 &= 0 \\ 4y^2 - 4y + 1 - 2y(2y - 1) + y^3 - 3y^2 - 1 &= 0 \\ 4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 &= 0 \\ y^3 - 3y^2 - 2y &= 0 \\ y(y^2 - 3y - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Корни уравнения $y^2 - 3y - 2$:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 \cdot y_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{получилось: } y &= 0; \frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ \text{Тогда } x &= -1; 2 - \sqrt{17}; 2 + \sqrt{17} \end{aligned}$$

② случай: $x = y - 1$:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 &= 0 \\ y^2 - 2y + 1 - 2y(y - 1) + y^3 - 3y^2 - 1 &= 0 \\ y^2 - 2y + 1 - 2y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 &= 0 \\ y^3 - 4y^2 &= 0 \\ y^2(y - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$y^2 = 0 \text{ или } y - 4 = 0$$

$$y = 0 \text{ или } y = 4$$

$$\begin{aligned} \text{получилось: } y &= 0; 4 \\ \text{Тогда } x &= -1, 3 \end{aligned}$$

Все полученные пары x и y : $(-1; 0); (2 - \sqrt{17}; \frac{3 - \sqrt{17}}{2}); (2 + \sqrt{17}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}); (3; 4)$

Ответ: $(3; 4); (-1; 0); (2 - \sqrt{17}; \frac{3 - \sqrt{17}}{2}); (2 + \sqrt{17}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2})$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

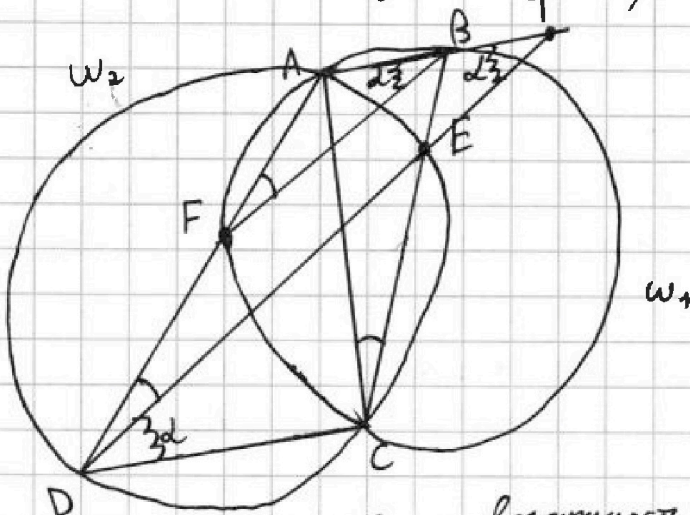


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7 стр. 1 из 1



Пусть $\angle ABF = \alpha$, радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно равны r_1 и r_2 . На чертеже получилось, что $\angle F$ находится выше $\angle E$, но на решение это никак не влияет. По условию $r_1 : r_2 = 1 : 2$, надо найти $AF : CE$. Проведём BF, DE и AC .

$\angle AFB = \angle ACB$ (как вписанные и опирающиеся на одну дугу AB)
 $\angle ADE = \angle ACE$ (как вписанные в окружность ω_2 и опирающиеся на одну дугу AE)
 $\angle ACB = \angle ACE \Rightarrow \angle AFB = \angle ADE \Rightarrow BF \parallel DE$ (т.к. у этих прямых равны соответственные углы $\angle AFB$ и $\angle FBE$)
 Проведём DE до пересечения с AB в точке T .
 $\angle EDC = \angle ATE$ (как накрест лежащие при $AB \parallel DC$ ($AB \parallel DC$ т.к. $ABCD$ - трапеция))
 $\angle ABF = \angle ATE$ (как соответственные при $BF \parallel DE$)
 $\Rightarrow \angle EDC = \angle ABF = \alpha$

ω_1 - описанная окружность $\triangle ABF$; ω_2 - описанная окружность $\triangle DEC$. По теореме синусов для $\triangle ABF$ и $\triangle DEC$:

для $\triangle ABF$: $\frac{AF}{\sin \angle ABF} = 2r_1$ для $\triangle DEC$: $\frac{CE}{\sin \angle EDC} = 2r_2$

$\angle ABF = \angle EDC \Rightarrow \sin \alpha \Rightarrow \frac{AF}{\sin \alpha} = 2r_1; \frac{CE}{\sin \alpha} = 2r_2$

Разделим уравнения:

$\frac{AF}{\sin \alpha} : \frac{CE}{\sin \alpha} = \frac{2r_1}{2r_2} \Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$

Ответ: $AF : CE = 1 : 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 стр. 1 из 1

Пусть $n_1 = v(v+1)$ и $n_2 = c(c+1)$ это 2 хороших числа, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$, $c \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N}$, пусть $c > v$ и $n_2 > n_1$.

$$\text{Тогда } n_2 - n_1 = c(c+1) - v(v+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$c^2 + c - v^2 - v = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(c^2 - v^2) + (c - v) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(c-v)(c+v) + (c-v) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(c-v)(c+v+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

Числа $c-v$ и $c+v+1$ обязательно разной чётности ($c-v$ разность чисел и сумма чисел всегда одинаковой чётности ($4-4=4$, $4-4=4$, $4+4=4$, $4+4=4$, где 4 - чётное число, n - нечётное), и если прибавить нечётное число 1 к любому числу, то изменится чётность).

$c \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N} \Rightarrow c-v < c+v+1$. $81 \cdot 10^{2024}$ делится на следующие нечётные числа: 1; 3; 9; 27; 81, при этом при делении на эти числа получится число, очевидно большее его; $81 \cdot 10^{2024}$ делится на $c-v$, при этом $c-v < c+v+1 \Rightarrow c-v$ это нечётное число, на которое делится $81 \cdot 10^{2024}$ ($c-v$ нечётное, или $c+v+1$ нечётное, $c-v < c+v+1$, поэтому $c-v$ - нечётное). Для $c-v$ получаются следующие варианты.

- $c-v=1$ ✗
- $c-v=3$
- $c-v=9$
- $c-v=27$
- $c-v=81$

~~$c-v \neq 1$
 $c = v+1$, тогда $c+v+1 = 81 \cdot 10^{2024}$, т.е. $2v+2 = 81 \cdot 10^{2024}$
 $3+1 = 81 \cdot 10^{2023} \cdot 5 \Rightarrow 6 = 81 \cdot 10^{2023} \cdot 5 - 1$, $c = 81 \cdot 10^{2023} \cdot 5$
 $n_1 = 10^{2023} \cdot 5 \cdot 81 - 10^{2023} \cdot 5 \cdot 81$, $n_2 = 10^{2023} \cdot 5 \cdot 81$
 $\cdot (10^{2023} \cdot 5 \cdot 81 + 1)$~~

~~Аналогичным образом получаем следующие варианты n_1 и n_2 .
 $c-v=3$: $n_1 = (27 \cdot 10^{2023} \cdot 5 - 2)(27 \cdot 10^{2023} \cdot 5 - 1)$, $n_2 = (27 \cdot 10^{2023} \cdot 5 + 1)(27 \cdot 10^{2023} \cdot 5)$
 $c-v=9$: $n_1 = 1$
 $c-v=27$: $n_1 = 1$
 $c-v=81$: $n_1 = 0$~~

Получилось всего 5 возможных вариантов пар v и $c \Rightarrow$ есть всего 5 пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$

Ответ: 5 пар хороших чисел.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

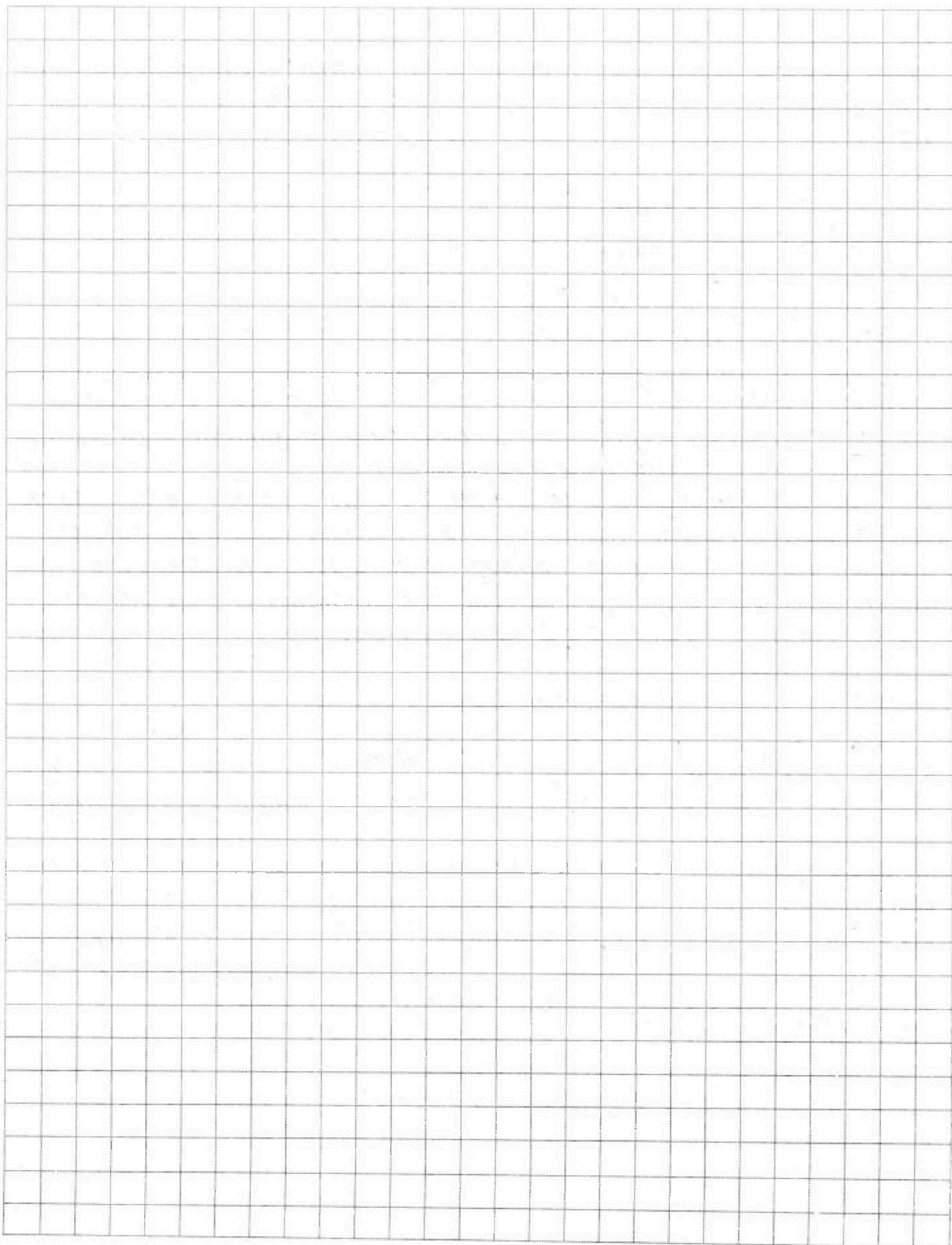
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$$

$$1+3=14-14=0$$

$$(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$$

$$1+6+9-14+3=$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 81 \\ + 36 \\ + 42 \\ + 3 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 - 6x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 27 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$$

$$3; -3 \quad 81 + 6 \cdot 27 + 4 \cdot 9 - 14 \cdot 3 + 3 = 81 + 162 + 36 - 42 + 3 =$$

$$81 - 6 \cdot 2$$

$$81 - 162 + 36 + 42 + 3 = 162 - 162$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \\ - x^4 + 3x^3 \\ \hline 3x^3 + 4x^2 \\ - 3x^3 + 9x^2 \\ \hline -5x^2 - 14x \\ -5x^2 - 15x \\ \hline x + 3 \\ x^2 - y^2 + z^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+3 \overline{) x^3 + 3x^2 - 5x + 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 4x^2 - 5x \\ \underline{4x^2 - 4x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$16 + 4 \cdot 1 = 20$$

x, y, z - ~~пере~~

~~AA~~

$$2x\sqrt{2} + 3y\sqrt{2} + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

$$29 \cdot 4 = 80 + 36 = 116$$

$$2x + 3y = 4$$

$$2x + 3y + z \sqrt{\frac{29}{2}} = 4 + 2 \cdot \sqrt{\frac{29}{2}}$$

x, y - ~~пере~~

$$z = 2$$

$$x^2 - y^2 + z^2$$

$$2x + 3y = 4$$

$$2x + 3y - 4 = \sqrt{\frac{29}{2}}(z - 2)$$

$$x = 2 - \frac{3}{2}y \quad x + \frac{3}{2}y = 2$$

$$x^2 - y^2 = (2 - \frac{3}{2}y)^2 - y^2$$

а6 N

$$n_1 = a(a+1)$$

n



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n_2 = \binom{c}{b+1}$$

$$n_1 = \binom{c}{b}$$

$$c \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

$$b > c$$

$$3\beta + 2\gamma + \delta = 180$$

$$180 - 3\beta - 2\gamma - \delta = 0$$

$$B + 2\gamma = 90$$

$$2\beta + 2 + \delta = 90$$

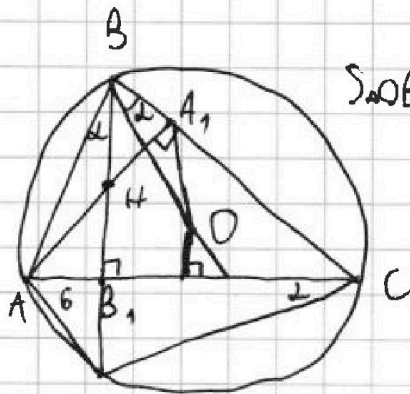
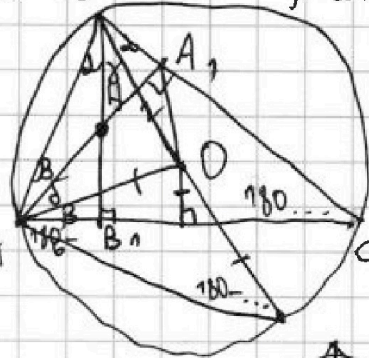
$$n_1 - n_2 = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$a\beta^2 + b$$

$$180 =$$

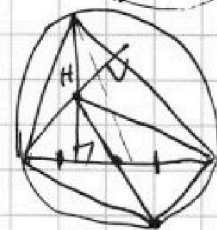
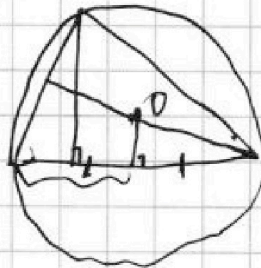
$$180 - 2\gamma - 2\beta - \delta = 0$$

$$180 - 2\gamma - 3\beta - \delta = 0$$



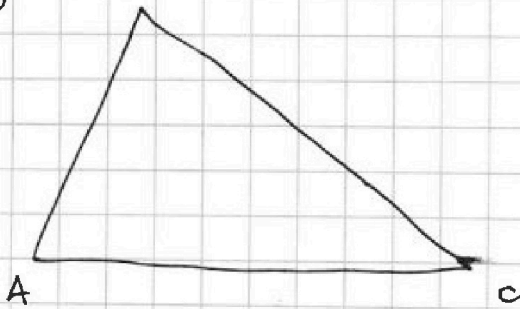
$$S_{\triangle OBA_1} = 6$$

$$\frac{1}{2} OB \cdot BA_1 \cdot \sin \alpha = 6$$



$$(x-y)^2 + y^2 = 4y^2 - 1$$

$$x^2 - 2xy - xy + y^2 + 1 + 2x - 2y - y$$



$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 =$$

$$= 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2$$

$$x^2 + xy + 2y^3 - 8y^2 + 3y - 2x - 3 = 0$$

$$2y^3 - 8y^2 + 3y + x^2 + xy - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^3 - y^2 = 2y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - xy = x(x-y)$$

$$x^2 - 1 - 2y^2 - 2xy - y^3 + y^3$$

$$2y^2 (x-1)(x+2) - 2y(y+x) -$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 1 + 2x - 3y$$



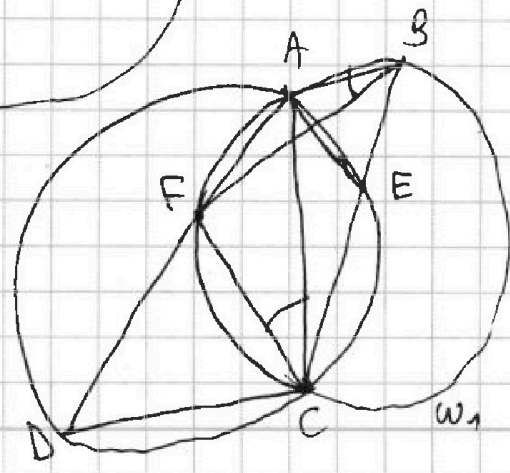
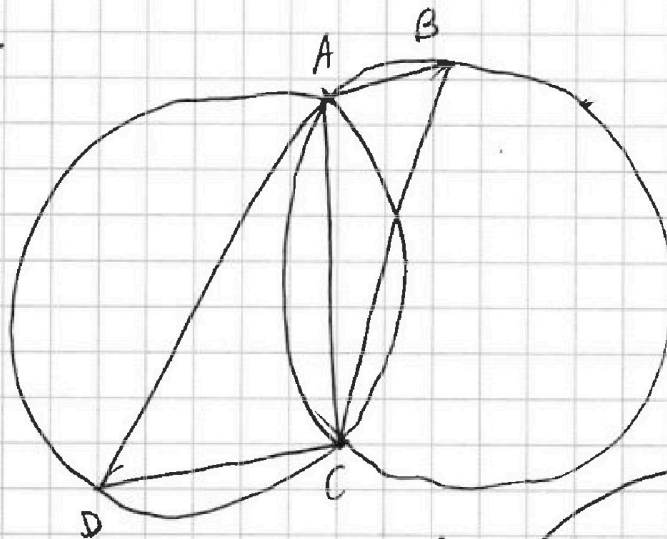
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{-3}$ $\frac{1}{7}$
 1к : *уменьш.* *уменьш.* $-\frac{1}{-0,5} = -2$ $\frac{1}{0}$ $\frac{1}{\pi 2}$
 $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{-2}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{-0,5}$ $\frac{1}{-2}$
 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
возв. *усл.*
 $\sqrt{2-x^2} = 1$
 $2-x^2 = x^2+x-2$
 $2x^2-x-2=0$
 $D=1+4 \cdot 2 \cdot 2 = 1+16=17$
 $\frac{AF}{\sin \alpha} = 2r_1$
 $\frac{CE}{\sin \beta} = 2r_2$
 $\frac{AF}{CE} = \frac{2r_1}{2r_2}$



$\frac{AF}{CE}$
 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 2xy - xy + 2y^2 + 1 + 2x - 2y - y$$

$$(x-y)^2 - xy + y^2 + 1 + 2x - 2y - y$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 1 + 2x - 3y = 0$$

$$x^2 - x(3y-2) + 2y^2 + 1 - 3y = 0$$

$$D = 9y^2 - 12y + 4 - 8y^2 - 4 + 12y = y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3y-2 \pm |y|}{2}$$

$$x_1 = \frac{4y-2}{2} \quad x_2 = \frac{2y-2}{2}$$

$$y^2 - 2y$$

$$y^2 - 2y + 1 - 2(2y-1)y + y^3 - 3y^2 - y = 0$$

$$4x - x^2 - 3 \geq 0$$

$$2x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$c=4 \quad n=3 \quad 3u1$$

$$y^2 - 2y - 2(y^2 - 2y) + y^3 - 3y^2 = 0$$

$$y^2 - 2y - 2y^2 + 4y + y^3 - 3y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

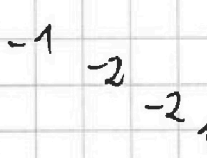
$$x^2 - 2x \leq 0$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x-3)(x-1) \leq 0$$

$$x(x-2) \leq 0$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0$$



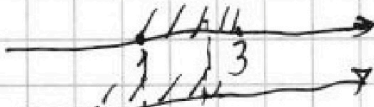
$$\frac{-4}{-2} = 2$$

$$y^3 - 4y^2 + 2y = 0$$

$$y(y^2 - 2y + 2) = 0$$

$$y = 0$$

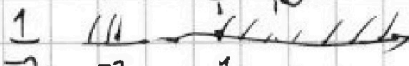
$$8 - 4 - 3 =$$



от 1 до 2

$$\frac{1}{1-3}$$

$$\frac{1}{-2}$$

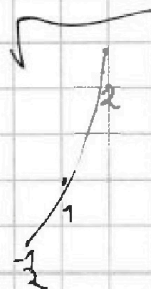


$$\frac{1}{0-2} \quad \frac{1}{-2} \quad \frac{1}{-1} \quad \frac{1}{-3}$$

$$\frac{1}{0-3} \leq \frac{1}{1-0} \quad \frac{1}{-3} \leq 1$$

$$\frac{-2}{-2}$$

$$\frac{.1}{2} = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = a(a+1)$$

$$n_1 = b(b+1)$$

$$n_2 = c(c+1)$$

$$a \geq 1$$

2024 последних цифры одинаковы

$$b^2 + b - c^2 - c$$

2

$$n_2 - n_1 = c^2 + c - b^2 - b = (c-b)(c+b) + c - b =$$

$$= (c-b)(c+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

1 раз и 1 раз

$$c-b < c+b+1 \quad 3^4 \cdot 10^{2024}$$

$$c = b+3$$

$$c = b+1$$

$$(c-b)(c+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$c+b+1 = 27 \cdot 10^{2024}$$

$$2b+2 = 10^{2024}$$

$$b+1 = 10^{2023.5}$$

$$b = 10^{2023.5} - 1$$

$$c = 1$$

$$c-b=1$$

$$c-b=3$$

$$c-b=9$$

$$c-b=27$$

$$c-b=81$$

$$1) \quad c = b+3 \quad c-b=3$$

$$c = b+3$$

$$b+3+b+1 = 2b+4$$

$$2b+4 = 27 \cdot 10^{2024}$$

$$b+1 = 27 \cdot 10^{2023.5} - 2$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ -72 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 570 \\ -56 \\ \hline 16 \end{array}$$

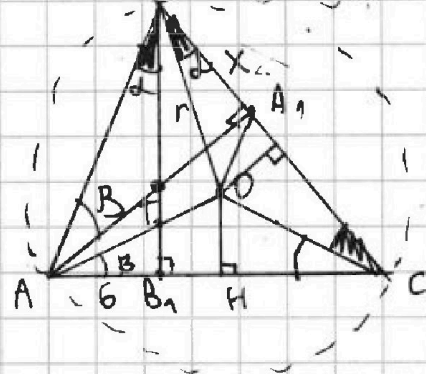
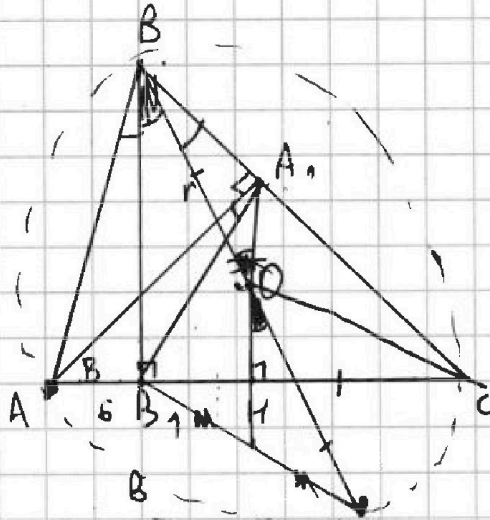


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



B_1, T
 $\triangle AB_1T \sim \triangle AHO \sim \triangle AA_1B$

$$\frac{AB_1}{AH} = \dots$$

$$\frac{AA_1}{r} = \frac{x}{OH}$$

$$k = \frac{AB_1}{AH} = \frac{B_1T}{OH} = \frac{AB_1}{AA_1} = \frac{OH}{x}$$

$$\frac{1}{2} x \cdot r \cdot \sin \alpha = S \quad \checkmark$$

$$\sin \alpha = \frac{AB_1}{AB}$$

$$\frac{x}{AB} = \frac{OH}{r}$$

$$\sin B = \frac{x}{AB}$$

$$\sin B = \frac{OH}{r}$$

$$\frac{2S \cdot OH}{r} = \dots$$

$$\sin \alpha = \frac{2S}{x \cdot r}$$

$$\frac{2S}{r} = \frac{AB_1}{AB}$$

$$\frac{x}{AB} = \frac{OH}{r}$$

$$\frac{2S}{x \cdot r} \cdot r = \frac{AB_1}{AB} \cdot \frac{AB}{x} \cdot \frac{2S}{x \cdot r}$$

$$\frac{2S}{r \cdot OH} = \frac{AB_1}{r}$$

$$\frac{2S}{OH} = AB_1$$