МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

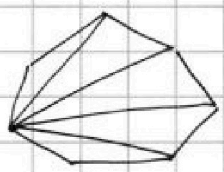
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть исходный многоугольник имеет n вершин



Выберем одну из вершин и проведем отрезки ко всем другим вершинам.
Тогда образуется $n-2$ треугольников
Сумма их углов $180°(n-2)$ равна сумме углов исходного многоугольника

$\Rightarrow$ Сумма углов многоугольника: $180°(n-2)$

Найдем сумму углов при помощи арифмет. прогрессии:

1) Если арифметическая прогрессия — возрастающая:

Углы: $143°,\ 143°+2°,\ \dots\ 143°+2°(n-1)$

Их сумма: $\frac{143°+(143+2°(n-1))}{2}\cdot n=(142°+n)\cdot n$

Суммы углов равны

$\Rightarrow 180(n-2)=(142+n)\cdot n$

$180n-360=142n+n^2$

$n^2-38n+360=0 \qquad D=38^2-4\cdot 360=4(19^2-360)=4(361-360)=4$

$\Rightarrow n_1=\frac{38+\sqrt{4}}{2}=19+1=20,\quad n_2=\frac{38-\sqrt{4}}{2}=19-1=18$

2) Если арифметическая прогрессия — убывающая:

Углы: $143°,\ 143°-2°\ \dots\ 143°-2°(n-1)$

Их сумма: $\frac{143°+(143°-2°(n-1))}{2}\cdot n=(144°-n)\cdot n$

Суммы углов равны

$\Rightarrow 180(n-2)=(144-n)\cdot n$

$180n-360=144n-n^2$

$n^2+36n-360=0 \qquad D=36^2+4\cdot 360=36(36+40)=36\cdot 4\cdot 19$

$n_1=\frac{-36+\sqrt{36\cdot 4\cdot 19}}{2}=-18+6\sqrt{19},\quad n_2=\frac{-36-\sqrt{36\cdot 4\cdot 19}}{2}=-18-6\sqrt{19}$

Оба решения не подходят т.к. n должно быть натуральным числом

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Известно, что многоугольник выпуклый

$\Rightarrow$ ~~во~~ любой угол не может быть больше $180°$

Значит $143 + 2(n-1) \leqslant 179$

$2(n-1) \leqslant 36$

$(n-1) \leqslant 18$

$n \leqslant 19$

$\Rightarrow$ ~~Не существует подходящего многоугольника~~

$\Rightarrow n = 20$ не подходит

Наибольшее число вершин — 18

Ответ: 18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\cdot \ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x\cdot \ln 2^4 + y\ln 2^3 + z\ln(6\cdot 2^2) = \ln 6$

$4x\cdot\ln 2 + 3y\ln 2 + 2z\ln 2 + z\ln 6 = \ln 6$

$\ln 2(4x+3y+2z) + z\cdot\ln 6 = \ln 6$, x, y, z — целые

$\Rightarrow \begin{cases} 4x+3y+2z=0 \\ z\cdot\ln 6 = \ln 6 \Rightarrow z=1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x+3y+2=0$ ~~$\Rightarrow y = \frac{-2(2x+1)}{3}$~~

~~Значит $x^2+y^2+z^2 = x^2+\frac{4}{9}(2x+1)^2+1 = \frac{9x^2+4(4x^2+4x+1)+9}{9}$~~ $=$

$=$ ~~$\frac{25x^2+16x+13}{9}$~~

Т.к. x, y, z — целые то $\Rightarrow 3y \underset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow y \underset{2}{\equiv} 0$

Если $y=0$, то $x=-0{,}5$, не целое число

Если $y=2$, то $x=-2$ } $\Rightarrow$ минимальное $y^2=4$

Если $y=-2$, то $x=1$

Если $x=0$, то y — не целое

Если $x=1$, то $y=-2$ } $\Rightarrow$ минимальное $x^2=1$

Если $x=-1$, то y — не целое

Сумма $x^2+y^2+z^2$ тем меньше, чем меньше каждый из её членов если $x=1$, $y=-2$ то достигается минимальной x^2 и y^2

$\Rightarrow$ Наименьшее значение $x^2+y^2+z^2=(1)^2+(-2)^2+1^2=1+4+1=6$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=792=2^3\cdot3^2\cdot11$

Пусть $p=N-a$, $q=N-b$, где N — сумма элементов M

$p-q=b-a$. Элементы множества M: $n, n+1 \dots n+6$

$\Rightarrow p-q$ может быть $1,2,3,4,5,6$ т.к. $p-q>0$ (т.к. $p^2-q^2>0$)

p, q — простые ~~натураль~~ числа

$\Rightarrow$ либо одно из них 2, но тогда второе нечетное и $(p-q)(p+q)$ — нечетное

либо они оба нечетные $\Rightarrow p-q$ — четное, $p+q$ — четное

$\Rightarrow p-q$ может быть $2,4,6$

Проверим $p-q=2$:

$p-q=2 \Rightarrow p+q=2^2\cdot3^2\cdot11=4\cdot99=396$

$p-q=(M-a)-(M-b)=b-a$, $p+q=2M-(a+b)$

$\Rightarrow b=a+2$, $p+q=2M-2a-2$

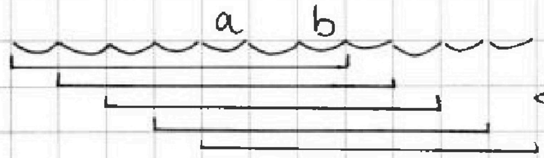
$2M-2a-2=396$

$2M-2a=398$

$M-a=199$

Найдем, чему может быть равно M:

~~...~~ Представим ряд чисел:



← способы, которыми можно выбрать 7 чисел

Тогда возможные суммы:

$(a-1)\cdot 7$, $a\cdot 7$, $(a+1)\cdot 7$, $(a+2)\cdot 7$, $(a+3)\cdot 7$

Подставим в $M - a = 199$:

$$\left[\begin{array}{l} (a-1)\cdot 7 - a = 199 \\ a\cdot 7 - a = 199 \\ (a+1)\cdot 7 - a = 199 \\ (a+2)\cdot 7 - a = 199 \\ (a+3)\cdot 7 - a = 199 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6a = 206 \\ 6a = 199 \\ 6a = 192 \\ 6a = 185 \\ 6a = 178 \end{array}\right.$$

Т.к. a — натуральное, то число справа должно делится на 2 и на 3

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow 6a = 192$

$a = \frac{192}{6} = 32 \Rightarrow b = 34$. ~~$M = \{29; 30; 31; 32; 33; 34; 35\}$~~

$M = \{30; 31; \underline{32}; 33; \underline{34}; 35; 36\} \Rightarrow N = 33\cdot 7 = 231$

$p = N - a = 231 - 32 = 199$, $q = 231 - 34 = 197$

$13^2 < 199$ и $197 < 17^2 \Rightarrow$ в простоте можно убедится, проверив $2, 3, 5, 7, 11, 13$

Также $p^2 - q^2 = 199^2 - 197^2 = (199-197)(199+197) = 2\cdot 396 = 792$

Найденное множество целиком соответствует условиям

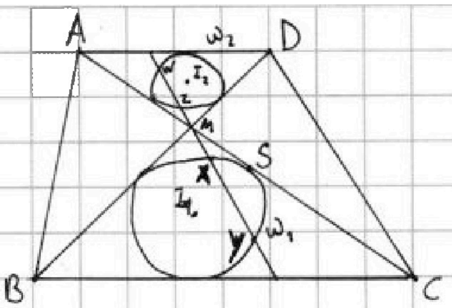
Ответ: $\{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\triangle AMD \sim \triangle CMB$ т.к.:

• $\angle AMD = \angle CMB$ как вертикальные

• $\angle ADM = \angle MBC$ т.к. $AD \parallel BC$ (т.к. трапеция и основания), BD – секущая

$\frac{BC}{AD} = 2$ => это коэффициент подобия

=> $\triangle AMI_2 \sim \triangle CMI_1$ т.к. $\angle I_2MA = \frac{1}{2}\angle AMD = \frac{1}{2}\angle BMC = \angle I_1MC$

$\angle I_2AM = \frac{1}{2}\angle MAD = \frac{1}{2}\angle MCB = \angle MCI_1$

=> причем с тем же коэффициентом подобия (т.к. общее отношение $AM : MC$)

=> $\frac{MI_1}{MI_2} = 2$, $MI_1 + MI_2 = I_1I_2 = \frac{13}{2}$ (лежат на одной прямой т.к. на биссектрисе $\angle AMD$)

=> $MI_1 = \frac{13}{3}$, $MI_2 = \frac{13}{6}$

Пусть ω_1 касается MC в точке S

=> $MS^2 = MX \cdot MY$

$\frac{MX}{MZ} = 2$ (из подобия фигур относительно т. M, гомотетия)

=> $MS^2 = 2MZ \cdot MY = 2 \cdot 5 = 10$

Т.к. S – т. касания I_1S – радиус, то по т. Пифагора:

$MI_1^2 = MS^2 + I_1S^2 \Rightarrow I_1S^2 = MI_1^2 - MS^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - 10$

$I_2S = \sqrt{\frac{169}{9} - 10} = \sqrt{\frac{169-90}{9}} = \sqrt{\frac{79}{9}} = \frac{\sqrt{79}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\frac{\pi}{7} = \cos\left(\cancel{90}\ \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \sin\frac{5\pi}{14}$

$1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} + x = 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

$x = 4\left(\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{14}\right) - 5\left(\sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{\pi}{2}\right) =$

$= 4\left(\sin\frac{5\pi}{14} + \sin\frac{3\pi}{14}\right) - 5\left(\sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{7\pi}{14}\right) =$

$= 4\cdot2\cdot\sin\frac{8\pi}{28}\cdot\cos\frac{2\pi}{28} - 5\cdot2\cdot\sin\frac{8\pi}{28}\cdot\cos\frac{6\pi}{28} =$

$= 2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\left(4\cos\frac{\pi}{14} - 5\cdot\cos\frac{3\pi}{14}\right)$ $\quad \sin\frac{2\pi}{7} > 0$

$\cos\frac{\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$

$\cos\frac{3\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\frac{2\pi}{7}$

$\Rightarrow x = 2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\left(4\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot$

$\cdot\left(4\left(\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{-2\pi}{7}\right) - \sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\left(8\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{2\pi}{7}\right) =$

$= 2\sin\frac{2\pi}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из условия „если 4 точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость — α" следует, что если в основании пирамиды лежит ≥ 4 точек, то все точки основания из плоскости α (выбор из 7), а вершина вне (выбор из 5)

Если в основании:

7 вершин: 5 вариантов

6 вершин: $5\,\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6!} = 5\cdot7$

5 вершин: $5\,\frac{7!}{5!(7-5)!} = 5\cdot7\cdot3$

4 вершины: $5\,\frac{7!}{4!(7-4)!} = 5\cdot7\cdot5$

Если в основании 3 вершины, то можно выбрать любые 4 точки из 12, за исключением тех комбинаций, когда они лежат в одной плоскости:

$$C_4^{12} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 11\cdot5\cdot9$$

$$C_4^{7} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 5\cdot7$$

Значит для 3 вершин в основании: $C_4^{12} - C_4^{7} = 11\cdot5\cdot9 - 5\cdot7 = 5(11\cdot9-7) = 5\cdot92$

Значит всего пирамид: $5 + 5\cdot7 + 5\cdot7\cdot3 + 5\cdot7\cdot5 + 5\cdot92 = 5 + 5\cdot7(1+3+5) + 5\cdot92 = 5 + 5\cdot7\cdot9 + 5\cdot92 = 5(1+63+92) = 5\cdot156 = 780$

Ответ: 780

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Остались: ~~4~~, 5, ~~6~~, 7

11^2 121
12^2 144
13^2 169

$\cos\frac{\pi}{7} = \cos^2\frac{\pi}{14} - \sin^2\frac{\pi}{14} = 1-2\sin^2\frac{\pi}{14}$

$4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14} = 4-8\sin^2\frac{\pi}{14} - 5\sin\frac{\pi}{14}$ $= -8\sin^2\frac{\pi}{14} - 5\sin\frac{\pi}{14} + 4$

$D = 25+4\cdot4\cdot8 = 25+\cancel{128} = 64\cdot2 = 25+128 = 153$

$\frac{5\pm\sqrt{153}}{-16}$

$\frac{-5\pm\sqrt{153}}{16}$

$12 < \sqrt{D} < 13$

~~$17 < 5+\sqrt{D} < 18$~~

$\frac{5\pm\sqrt{D}}{16}$

$7 < -5+\sqrt{D} < 8$

$\frac{7}{16} < \frac{-5+\sqrt{D}}{16} < 0{,}5$

Если основание из 4:

$5\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5\cdot7\cdot5 = 5^2\cdot7$

Если основание из 5:

$5\cdot\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5^2\cdot7\cdot\frac{3}{5} = 3\cdot5\cdot7$

$5\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 5\cdot5\cdot7$

Если основание из 6:

$5\cdot7$

Если основание из 7: 5

Если основание из 3:

$\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1} - \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 2\cdot11\cdot10-7\cdot5 = 220-35=200-15=185=5\cdot37$

Итого: $5+5\cdot7+3\cdot5\cdot7+5^2\cdot7+37\cdot5 = 5(1+7+3\cdot7+5\cdot7+37) =$
$= 5(1+7(1+3+5)+37) = 5(38+7\cdot9) = 5(38+63) = 5\cdot101 = 505$

$\frac{12!}{4!\,8!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2} = 11\cdot5\cdot9$

$64+92 = 156$

$156\cdot5$: 30, 25, 5, 780

$\frac{7!}{4!\cdot3!} = \frac{7\cdot6\cdot5!}{4!\cdot3!} = \frac{7\cdot5!}{4!} = 7\cdot5$

$156 : 2 = 78$

$n, n+1, \dots n+6$

$792 : 8 = 99$

$p = M-n_i$
$q = M-n_j$

$(p-q)(p+q) = 792 = 2^3\cdot3^2\cdot11$

$\Rightarrow p-q \le 6$

$\Rightarrow p-q = 6$
$p-q=4$
$p-q=3$
$p-q=2$
$p-q=1$

$p-q$	$p+q$
6	$4\cdot33$
4	$99\cdot2$
3	$8\cdot33$
2	$4\cdot99$
1	792

76

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~p+q~~	p+q
~~6~~	~~4·33~~
~~4~~	~~2·99~~
~~3~~	~~8·33~~
~~2~~	~~4·99~~
1	8·99

~~$p-q=6$: $p=q+6$ сумма: $\frac{2q+6}{2}\cdot 7 = q+3$~~

$p = M-a$
$q = M-b$

$p-q=6 \Rightarrow b-a=6$
$b=a+6$

$M = \frac{2a+6}{2}\cdot 7 = (a+3)\cdot 7$

~~$p = 6a+$~~ $p+q = 2M-(a+b) = (a+3)\cdot 14 - (2a+6) =$
$= 12a + 3\cdot 14 - 6 = 12a + 6(7-1) = 12a+36$

$12a+36 = 4\cdot 33$
$4a+12 = 4\cdot 11$
$a+3 = 11$
$a = 8 \Rightarrow b = 8+6 = 14$

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

p, q — простые $\Rightarrow$ p-q и p+q ~~взаимопрост~~

132×6: 12, 18, 6, 792

$M = \frac{8+14}{2}\cdot 7 = (4+7)\cdot 7 = 11\cdot 7 = 77$

$p = 77-8 = 69$
$q = 77-14 = 63$

$p^2-q^2 = 69^2-63^2 = (69-63)(69+63) =$
$= 6\cdot(69+63) = 6\cdot 132 = 6\cdot 11\cdot 12 =$

17×17: 119, 17, 289

199 | 7: 14, 59, 56, 3

$p-q=1 \Rightarrow$
$p = M-a$
$q = M-b$ $\Rightarrow b-a=1$
$b=a+1$

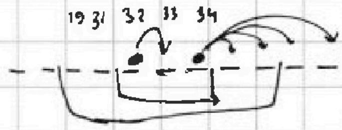
~~1, 2, 3, 4,~~ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ~~19, 23~~

$p+q = 2M-(a+b) = 2M-2a-1 = 8\cdot 99 = 792$

~~p-q~~	p+q
6	4·33
4	2·99
~~3~~	~~8·33~~
2	4·99
~~1~~	~~8·99~~

2

p, q — нч $\Rightarrow$ p-q — 2, p+q — 2



$p-q=2$
$p = M-a$
$q = M-b$ $\Rightarrow$ $b-a=2$
$b=a+2$

$M_{min} = \frac{\cancel{a+a+6}}{2}\cdot 7 \; \frac{(a+2)\cdot 2-6}{2}\cdot 7 = (a-1)\cdot 7$

$M_{max} = \frac{(a+4)\cdot 2+6}{2} = (a+3)\cdot 7$

$p+q = M\cdot 2-(a+b) = 2M-2a-2 = 4\cdot 99 = 396$

$2M-2a = 398$

$M-a = 199 \underset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow a \underset{7}{\equiv} 4$

32×7: 14, 21, 224; 32×6: 12, 18, 192; 33×6: 18, 18, 198

$(a-1)\cdot 7 - a = 199$ $6a = 206$ × $3a$
$(a-2)\cdot 7 - a = 199$ $6a = 199$ × ~~3~~
$(a+1)\cdot 7 - a = 199$ $6a = 192$ $a = \frac{192}{6} = 32$
$(a+2)\cdot 7 - a = 199$ $6a = 185$ × $b = 34$
$(a+3)\cdot 7 - a = 199$ $6a = 178$ ×

197 | 13: 13, 67; $13\times 4 = 52$; $13\times 5 = 65$

~~29~~, 30, 31, 32, 33, 34, 35

$M = (a+1)\cdot 7 = 33\cdot 7$

$p = 33\cdot 7 - 32 = 32\cdot 7 + 7 - 32 = 32\cdot 6 + 7 = 192+7 = 199$
$q = 33\cdot 7 - 34 = 33\cdot 6 - 1 = 197$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть n углов

их сумма: $\frac{143+143+2(n-1)}{2}\cdot n = (143+n-1)\cdot n =$
$=(142+n)\cdot n$

$(142+n)\cdot n \vdots 180$

сумма $\angle$ n угольника:
$180°(n-2)$

$\begin{array}{r} -179 \\ 143 \\ \hline 36 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ +19 \\ \hline 361 \end{array}$

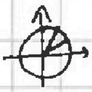
$\Rightarrow (142+n)\cdot n = 180(n-2)$
$142n + n^2 = 180n - 360$
$n^2 - 38n + 360 = 0 \quad D = 38^2 - 4\cdot 360 = 4(19^2 - 360) \cancel{<0}$ $\underset{=4?}{}$

или обратная: $\frac{143+143-2(n-1)}{2}\cdot n = (143-n+1)\cdot n = (144-n)\cdot n$
$180(n-2) = (144-n)\cdot n$
$180n - 360 = 144n - n^2$
$n^2 + 36n - 360 = 0 \quad D = 36^2 + 4\cdot 360 = 36(36+40) = 36\cdot \cancel{46} =$
~~$\sqrt{D} = 6\cdot 2\sqrt{109} = 12\sqrt{109}$~~

$(20-1)(20-1) = 400-40+1 = 361$
$36+40 = 76 = 4$

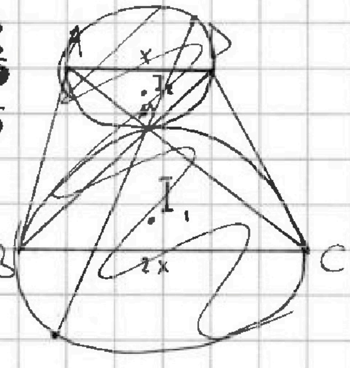
$\begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & \end{array}$

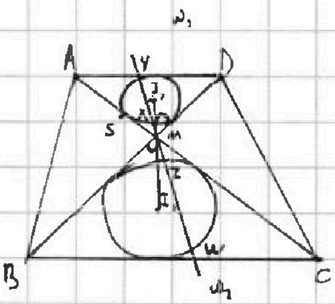
$\cos\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos 60° - \sin 30° = 2\cdot\cos\frac{90}{2}\cdot\sin\frac{30}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 15°$



$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 18 \\ 5 \\ \hline 90 \end{array}$





$I_1I_2 = \frac{13}{2} \quad MZ\cdot MY = 5$
радиус ω_1 - ?

$\angle AMI_2 = \angle I_2MD = \angle I_1MB = \angle I_1MC$

Пусть коэф подобия $k = 2$
$\Rightarrow \frac{MI_1}{MI_2} = 2 \Rightarrow MI_1 = \frac{13}{3}$
$MI_1 = \frac{13}{6}$

$MZ = 2MX$
$MW = 2MY$

$5 = MZ\cdot MY = 2MX\cdot MY = 2MS^2 \Rightarrow MS = \sqrt{\frac{5}{2}}$
$I_2S^2 = I_2M^2 - MS^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \frac{5}{2} = \frac{169}{36} - \frac{5}{2} = \frac{169-5\cdot 18}{36} = \frac{169-90}{36} = \frac{79}{36}$
$I_1S = \sqrt{\frac{79}{36}} = \frac{\sqrt{79}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

семь подряд идущих чисел

$M = \{n, n+1, n+2 \dots n+6\}$

$\Sigma M - n_i$ — простое число

$792 = 2\cdot 396 = 2\cdot 2\cdot 198 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 99 = 2^3\cdot 9\cdot 11$

$M = \frac{2n+6}{2}\cdot 7 = (n+3)\cdot 7$ $M \geq 28$

0 1 2 3 4 5 6

0 1 4 2 2 4 1 mod = 7

$p^2 - q^2 = 792$
$\equiv_7 1$

$\Rightarrow p^2 \equiv_7 2,\ q^2 \equiv_7 1$ или $p^2 \equiv_7 1\ \ q^2 \equiv_7 0$

$p \equiv_7 3$ или 4 $q \equiv_7 1$ или 6

$q = 7$

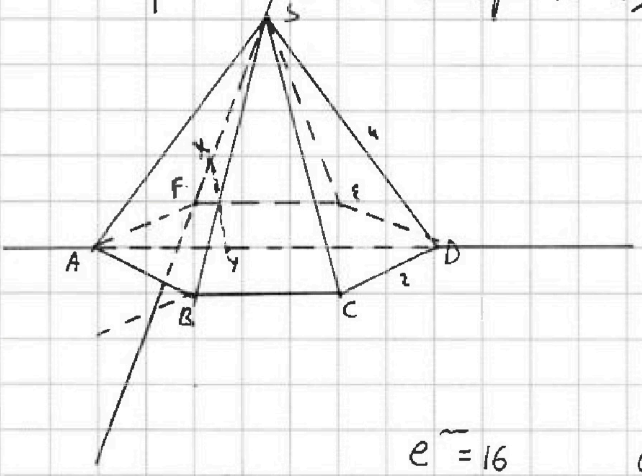
$p_{макс} = 13 \to$ не подходит

Оба числа нечетные

~~$p = (7+1)\cdot 2+1$ или $p = (7+2)\cdot 2 + 1$~~

0 1 2 3 4 5 6 7 8

0 1 4 0 7 7 0 4 1



$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$2^2\cdot 2^3 = 2^5$

$e^{\sim} = 16$ $e^{\sim} = 24$ $e^{\sim}\cdot e^{\sim} = 24$ $e^{\sim + \sim} = 24 =$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \cancel{2x\ln 4}$ $4x\ln 2 + 3y\ln 2 + z\ln 4 + z\ln 6 = \ln 6$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 2z\ln 2 + z\cdot\ln 6 = \ln 6$

$\ln 2\cdot(4x+3y+2z) + z\cdot\ln 6 = \ln 6$ $\Rightarrow z = 1,\ 4x+3y+2z = 0$

$(5x+a)^2 = 25x^2 + 10ax + a^2$

$10a = 16$

$a = \frac{16}{10}$

$4x + 3y + 2 = 0$ $\Rightarrow y = \frac{-(2+4x)}{3}$

$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+1 = x^2 + \frac{4(1+2x)^2}{9} + 1 =$

$\frac{9x^2+4(4x^2+4x+1)}{9} = \frac{25x^2+16x+4}{9} = (5x+1{,}6)^2$

$(5x+1{,}6)^2$

$4x+3y+2=0$

1 −2

$4-6+2=0$

$y \equiv_2 0$

~~$1^2+4^2+1^2 = 1+16+1 = 18$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

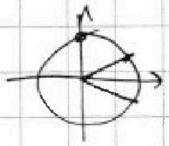
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Осталось: 5, 7.

$\underbrace{3+4+4}+\underbrace{5+5}+\underbrace{4+6} = 11+5+5+10 = 31$

$5-4\sin\frac{3\pi}{14}+x = 4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$



$x = 4\left(\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{14}\right)-5\left(\sin\frac{\pi}{14}+1\right)$

$\sin\alpha+\cos\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}=\frac{5\pi}{14}$

$\sin 30^\circ+\cos 60^\circ = 1 = 2\cdot\sin\frac{60^\circ-30^\circ}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ-30^\circ}{2} =$

$\cancel{\sin 60^\circ+\cos 60^\circ = 2\cdot\sin 60^\circ\cdot\cos 60^\circ =}$

$\frac{1}{2}+$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right) =$

$= 2\left(\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}\right.$

$\cancel{s\alpha\cdot c\beta\cdot c\alpha\cdot c\beta+s\beta\cdot c\alpha}$

$2(a_1+a_2)(a_3+a_4) = 2(a_1a_3+a_1a_3+a_2a_3+a_2a_4)$

$(a_1a_3+a_2a_4)+(a_1a_4+a_2a_3)$

$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} =$

$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} =$

$= \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\beta$

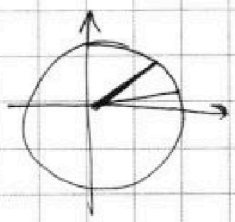
$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

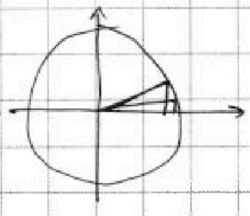
$\sin\alpha+\cos\beta = \sin\alpha+\sin(90^\circ-\beta) = 2\sin\frac{\alpha+90^\circ-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-90^\circ}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{14} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{14}\right) = \cos\frac{4\pi}{14}$

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}=\frac{6\pi}{14}=\frac{3\pi}{7}$

$\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}=\frac{7\pi-3\pi}{14}=\frac{2\pi}{7}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!