



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $143^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 792$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 13/2$ , а  $MZ \cdot MY = 5$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$  или  $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 5 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем, что сумма углов выпуклого многоугольника с  $n$  сторонами равна  $S = 180(n-2)$ .

Сумма же арифметической прогрессии с разностью  $d$ , общим членом  $a_0$  и количеством  $m$  равна:

$$S_1 = \frac{d a_0 + d(m-1)}{2} m$$

Заметим, что  $m=n$ . Рассмотрим два случая:

$$1) d=2^\circ, Тогда S_1 = \frac{2 \cdot 143^\circ + 2(n-1)}{2} n = (142+n)n.$$

$$S_1 = S \Rightarrow n(142+n) = 180(n-2) \Rightarrow n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$\Delta = (2 \cdot 19)^2 - 4 \cdot 360 = 4(36(-360)) = 4 \Rightarrow n = \frac{38 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} n=20 \\ n=18 \end{cases}$$

Очевидно, что найденное  $n$  подходит.

$$2) d=-2^\circ, Тогда S_1 = \frac{2 \cdot 143^\circ - 2(n-1)}{2} n = (144-n)n.$$

$$S_1 = S \Rightarrow n(144-n) = 180(n-2) \Rightarrow n^2 + 36n - 360 = 0$$

$$\Delta = (18 \cdot 2)^2 + 4 \cdot 360 = 4 \cdot (324 + 360) = 4 \cdot 684 \Rightarrow \text{В этом случае } n \text{ не целое число} \Rightarrow n \text{ не подходит.}$$

Число вершин = числу ребер = количеству углов.

Ответ: 20.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 6 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  все примененные преобразования корректны

$$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6$$

$$\ln(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z) = \ln 6 \quad \text{Натуральный логарифм монотонно возрастает, поэтому: } 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$$

$$2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 6 \Rightarrow 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 6 = 2 \cdot 3$$

Исходя из того, что  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ , а также из основной теоремы арифметики, получаем:

$$\begin{cases} 4x+3y+3z=1 \\ 3^z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y=-2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-2-3y}{4} \quad \text{Видим, что для целого } x \text{ у должно быть чётное.}$$

$$x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{-2-3y}{4}\right)^2 + y^2 + 1 =$$

$$= \frac{4+12y+9y^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{25y^2+12y+20}{16} - \text{парабола с ветвями вверх}$$

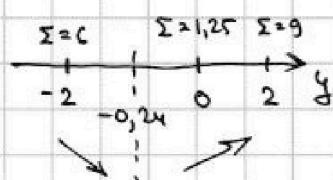
Значит, минимум достигается в вершине при  $y = -\frac{12}{50} = -0,24$

Но нам подходит только  $y \in \mathbb{Z}$  (и чётное)  $\Rightarrow$  проверим ближайшие значения

$$1) y=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Минимальное значение 1,25

$$2) y=-2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = \frac{100+24+20}{16} = \frac{96}{16} = \frac{24}{4} = 6$$



(Доступных кратных 4, чётных)

$$3) y=2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = \frac{100+24+20}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

Видим, что минимальное значение достигается при  $\begin{cases} y=-2 \\ z=1 \\ x=1 \end{cases}$  и равно 6

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ . Пусть сумма чисел (всех)  $S$ , а не выбранными оказались числа  $a$  и  $b$ .

Тогда  $(p-q) = a-b$ , что по условию  $\leq b$  (ибо числа нонедробавательные)  $\Rightarrow (p+q) \geq 11$ . При этом

~~$p/q = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 11}{p+q}$~~  Остаётся перебрать простые числа от 2 до  $\frac{792}{2} =$

(т.к.  $|p-q| \geq 2$ ) = 396, и найти подходящие  $p$  и  $q$ . Единствен-

ное значение:  $\begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases}$ . ~~Решение~~ Каждое из этих чисел.

Но

~~Каждое~~ Каждое соответствующее  $M$  подобрать не получится.

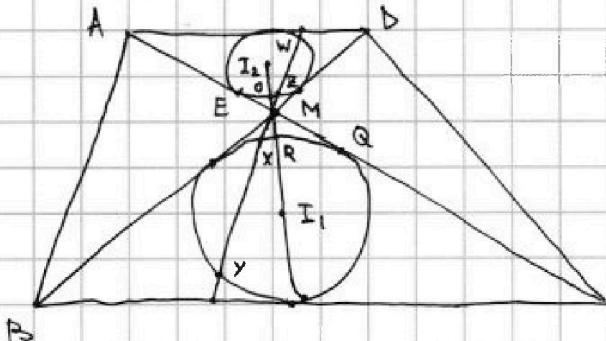
Ближайшее значение  $M = \underbrace{\{13; 14; 15; 16; 17; 18; 19\}}_{97}$

Ответ:  $M = \{13; \dots; 19\}$

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что картинка в треугольнике  $AMD$  — это картина в треугольнике  $BMC$  (как и сами треугольники) с коэффициентом  $k = \frac{BC}{AD} = 0,5$

с иными словами, соотношение

$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} = \frac{1}{k}$  выполняется для двух соответственных отрезков из треугольников (и их „внешностей“)  $BMC$  и  $AMD$ . Тогда:  $MR = 2MO$ ;  $MX = 2MZ$ ;  $MY = 2MW$ ;  $\omega_3 = 2\omega_2$  (радиусы  $\omega_3$  и  $\omega_2$ ).

Проведём прямые  $MI_1$  и  $MI_2$ . Они обе являются биссектрисами, так как  $I_1, I_2$  — центры вписаных окружностей.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Последовательно } \angle EMI_2 = \frac{1}{2} \angle AMD \\ \angle QMI_1 = \frac{1}{2} \angle BMC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{т.к. } \angle AMD = \angle BMC, \angle EMI_2 = \angle QMI_1$$

Получаем, что вертикальные углы равны  $\Rightarrow$  точки  $I_1, M, I_2$  лежат на одной прямой.

Запишем степень точки  $M$  относительно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\deg_M(\omega_1) = MR(MR + 2\omega_1) = MQ^2 = MX \cdot MY$$

$$\deg_M(\omega_2) = MO(MO + 2\omega_2) = ME^2 = MZ \cdot MW$$

$$\deg_M(\omega_1) = MR(MR + 2\omega_1) = MX \cdot MY = 2MZ \cdot MY = 10$$

$$II_1I_2 = \omega_1 + \omega_2 + MO + MR = \frac{3}{2}\omega_1 + \frac{3}{2}MR = \frac{13}{2} \Rightarrow 3\omega_1 + 3MR = 13$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из второго уравнения,  $MR = \frac{13}{3} - \gamma \omega_1$ . Тогда, подставив в 1<sup>ое</sup> получим:

$$\left(\frac{13}{3} - \gamma \omega_1\right)\left(\frac{13}{3} + \gamma \omega_1\right) = 10$$

$$\frac{169}{9} - \gamma^2 \omega_1^2 = 10 \Rightarrow \gamma^2 \omega_1^2 = \frac{169 - 90}{9} = \frac{79}{9} \Rightarrow \gamma \omega_1 = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{79}}{3}$

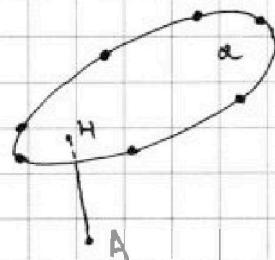


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что если взять любую из пяти вершин,  $\notin d$ , и любое количество точек  $\in d$ , получится ~~одна~~ <sup>(>2)</sup> полукная пирамида. <sup>(>2)</sup>

Действительно, пусть мы взяли точку  $A \notin d$ . Очевидно, что высота  $AH$  полученной пирамиды не равна 0  $\Rightarrow$  пирамида не будет

~~возвращенной~~. Так же очевидно, что для  $\neq$  количества выбранных точек  $\in d$   $\exists$  построенной на них полукной многоугольник, и при этом только один (достаточно, пройдясь в одном направлении по окружности, соединить точки).

Значит, у нас получаем  $C_5^1 \cdot (C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7)$  пирамид.

$$5(C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 - (C_7^0 + C_7^1 + C_7^2)) = \\ = 5(2^7 - 1 - 7 - \frac{7 \cdot 6}{2}) = 5(128 - 8 - 21) = 99 \cdot 5 = 495$$

~~Может ли быть еще пирамиды? Да. Достаточно взять  $\neq$  четыре из  $\stackrel{12}{\text{точек}}$  ~~все~~  $\in d$  и получится треугольная пирамида. Она не будет возвращенной, что, из условия,  $\neq$  верно, эти четыре точки не лежат в одной плоскости. Она будет полукной, что треугольники, один из которых ~~в основании~~, другие не бывают.  $\Rightarrow$  Все такие нам подходят. Их  $C_5^4 = 5$ .~~

~~Если не рассмотреть иные варианты пирамид, то ~~все~~ точки основания не будут лежать в одной плоскости. Действительно, пусть это не так. Тогда, из условия, эта плоскость  $d$  ~~все~~  $\in d$  ~~все~~ точек — противоречие.~~

Отдельно рассмотрим треугольные пирамиды. Их  $C_{12}^4 - C_7^4 =$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{24} = 5 \cdot 92$$

~~(все варианты)~~  
~~(возвращение в плоскость  $d$ )~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но могуть быть  $5 \cdot C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5^2}{6} = 5 \cdot 35$  штук (отсюда входит в 495)

Значит, общее число увеличится на  $5(92 - 35) = 5 \cdot 57$ . Итого,  
 $5(99 + 57) = 5 \cdot 156$  вариантов.

Предположим, что есть еще пирамиды. Тогда у них в основании как минимум 4 вершины  $\Rightarrow$  (из условия) они лежат в плоскости  $\Rightarrow$  либо их могут быть 4, противоречие!

Ответ: 780



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                                     |                                     |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ - 8 \sqrt{\frac{3}{14}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \quad \sin \frac{3\pi}{14} < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{14} > \cos \frac{\pi}{7} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} > \cos \left( \frac{6\pi}{14} \right) > 1 - \frac{6\pi^2}{196} \sin \frac{\pi}{14} > \frac{6\pi^2}{196} > 0$$

$$5 - \frac{8}{\sqrt{2}} + 5 - 5 \cdot \frac{6\pi^2}{196}$$

$$10 - \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{30\pi^2}{196} < 10 - \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{30 \cdot 3^2}{196}$$

$$10 - \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{1960 - 30 \cdot 9}{196} > 0$$

$$10 - \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{18(196 - 27)}{196} \sqrt{\frac{8}{\sqrt{2}}} \\ 14 \cdot 7$$

$$\frac{5 \cdot 169 - 8}{14 \cdot 7} \sqrt{\frac{8}{\sqrt{2}}} > 0$$

$$5 \cdot 169 \sqrt{2} > 8 \cdot 14 \cdot 7$$

$$85 \cdot 13^4 \cdot 2 > 8^2 \cdot 14^2 \cdot 7^2$$

$$8 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 139 \\ \times 169 \\ \hline 139 \\ 28561 \cdot 28 \\ \hline 142805 \\ + 17122 \\ \hline 514025 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 49 \\ \hline 178 \\ 196 \\ \hline 9408 \\ + 112 \\ \hline 1568 \\ \hline 307328 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{6} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{14} \\ \sin \frac{3\pi}{14} > \sin \frac{3\pi}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} > 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{14} \\ \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < \sin \frac{\pi}{14} \\ \frac{2 - \sqrt{3}}{4} < \sin \frac{\pi}{14} \\ \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right)^2 < 5 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \\ < 3 - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} > 0 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{25(2 - \sqrt{3})}{4}} > 2\sqrt{3} - 3$$

$$\frac{25(2 - \sqrt{3})}{4} > 21 - 12\sqrt{3}$$

$$850 - 25\sqrt{3} > 84 - 48\sqrt{3}$$

$$23\sqrt{3} > 34$$

$$529 \cdot 3 > 456$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 289 \\ \hline 1156 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$26. 266 - \frac{13^2}{2} + 26r + 6r^2 = -15$$

$$5 - 4\sin \frac{3\pi}{14} \vee 5\cos \frac{\pi}{7} - 5\sin \frac{\pi}{14}$$

$$26 + 26r (6+r)^2 - r^2 = \frac{5}{2}$$

$$5 - 4\sin \frac{3\pi}{14} - 5\cos \frac{\pi}{7} + 5\sin \frac{\pi}{14} \vee 0$$

$$26(6+r) - \frac{13^2}{2} + 6r^2 = -15$$

$$5 + 5(\sin \frac{\pi}{14} - \sin \frac{3\pi}{14}) + \sin \frac{3\pi}{14} - 5\cos \frac{\pi}{7}$$

$$26 \sqrt{\frac{5}{2} + r^2} - \frac{13^2}{2} + 6r^2 = -15$$

$$5 + 5 \cdot 2 \cdot \sin(-\frac{\pi}{14}) \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{14} - 5\cos \frac{\pi}{7}$$

$$26 \sqrt{\frac{5}{2} + r^2} = \frac{139}{2} - 6r^2$$

$$5 - 10\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{14} - 5\cos \frac{\pi}{7}$$

$$\cdot 26^2 \cdot \frac{5}{2} + 26^2 r^2 = \frac{139^2}{4} - 3 \cdot 139 \cdot 2r^2 + 36r^4$$

$$5 - 10x(1-2x^2) + x - 5(1-2x^2)$$

$$d = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad c = \sqrt{10}$$

$$x + 5 - 10x + 20x^3 + x - 5 + 10x^2$$

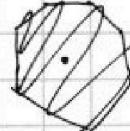
$$\begin{cases} (a+r+2a+2r) = \frac{13}{2} \\ a(a+2r) = \frac{5}{2} \end{cases} \quad 3a + 3r = \frac{13}{2} \quad a = \frac{13}{6} - r$$

$$x(-9 + 10x + 20x^3) \vee 0$$

$$a(r+\frac{13}{6}-r) = a(\frac{13}{6}) \quad (\frac{13}{6}-r)(\frac{13}{6}+r) = \frac{5}{2}$$

$$25 + 180 = 205 \quad \frac{5 \pm \sqrt{205}}{20}$$

$$\frac{169}{36} - r^2 + \frac{5}{2} = \frac{169}{36} - \frac{90}{36} = r^2$$



$$\sin \frac{\pi}{7} \vee \frac{5 \pm \sqrt{205}}{20}$$

$$\sin \frac{\pi}{7} < \frac{5}{20} \quad \frac{5}{20} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{\pi}{7} - \frac{1}{4} < \frac{5}{20}$$

$$-\sin \left( \frac{\pi}{7} \right) \quad \sin \frac{3\pi}{14} = \frac{3\pi}{14} - \frac{27 \cdot 3}{14 \cdot 6}$$

$$5 - 4 \left( \frac{3\pi}{14} - \frac{27 \cdot 3}{14 \cdot 6} \right) =$$

$$\left( \frac{3\pi}{14} - \frac{27 \cdot 3}{14 \cdot 6} \right) < \frac{1}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} < 1 - \frac{27 \cdot 3}{14 \cdot 6}$$

$$5 - 4 \frac{12\pi}{14} + \frac{27 \cdot 2 \cdot 3}{14 \cdot 3}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} = x$$

$$\sin \frac{\pi}{14} > \frac{\pi}{14} -$$

$$\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(2a+\alpha) = 2\sin a \cos \alpha + (1-2\sin^2 a) \cos \alpha \quad \sin(2a+\alpha) = 2\sin a \cos^2 \alpha + (1-2\sin^2 a) \sin \alpha$$

~~2a + α = 2a + α~~

$$\sin a (2(1-\sin^2 a) + 1-2\sin^2 a) =$$

$$\sin a (3 - 5\sin^2 a)$$

$$5 - 4x(3 - 5x^2) - 4(1 - 2x^2) + 5x$$

$$5 - 12x + 20x^3 - 4 + 8x^2 + 5x = 1 - 7x + 8x^2 + 20x^3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n^2 + 142n = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$381 - 360 = 21 \dots$$

$$\frac{(144-n)n}{284}$$

$$\frac{143}{143} \times \frac{143}{143}$$

$$n(144-n)$$

$$\frac{180(n-2)}{4}$$

$$n^2 + 36n - 360 = 0$$

$$\frac{18}{144} + \frac{28}{144} = \frac{324}{324}$$

$$324 + 360 = 684$$

$$\frac{18}{144} + \frac{28}{28} = \frac{28}{28}$$

$$28^2 = 4 \cdot 14^2 = 4 \cdot 196 = 4(200-4)$$

$$784$$

$$+ 224$$

$$\frac{56}{484}$$

$$684 = 2.6$$

$$\frac{4}{284}$$

$$x^{16} + y^{16} + z^{16} = 16^6$$

$$16^6 + 16^8 + 16^{24} = 16^6$$

$$16^8 \cdot 8^8 \cdot 24^2 = 6$$

$$2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} = 6$$

$$2^{4x+3y+3z} = 6$$

$$2^{4x+3y+3z} = 6$$

$$2 = 1; 4x+3y+3z=1$$

$$4x+3y=-2$$

$$y=0$$

$$x = \frac{-2-3z}{4}$$

$$4+12y+9y^2 = 16$$

$$12y+9y^2+1 = 16$$

$$25y^2+12y+1 = 16$$

$$\frac{25}{16} y^2 + \frac{12}{16} y + \frac{1}{16} = 1$$

$$a_6$$

$$180(n-2) = (142+n)n$$

$$n^2 + 142n = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$381 - 360 = 21 \dots$$

$$(144-n)n$$

$$\frac{180(n-2)}{4}$$

$$(144-n)n = 180(n-2)$$

$$144n - n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 + 36n - 360 = 0$$

$$324$$

$$784$$

$$180(n-2) = \frac{143 + 143 + (n-1)2}{2}$$

$$n = (143 + n-1)n$$

$$180(n-2) = 143 + 2(n-1)$$

$$\frac{143 + 2 + 2(n-1)}{2} n = (143 + n-1)n$$

$$(142+n)n$$

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 5}{24} = 5.92$$

$$128 - 1 - 7 - \frac{7 \cdot 6}{2} - \frac{7 \cdot 5}{8} = 5.92 - 5.7$$

$$120 - 21 - 35$$

$$99 - 35.64$$

$$p - q = b - a \leq 6$$

$$120 \quad 21 \quad 824$$

$$142n + n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$142n + n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$142(n-1)^2 = 400 - 40$$

$$150$$

$$780$$

$$\frac{1}{0} \begin{matrix} a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} , 5$$

$$(S-a)^2 - (S-b)^2 = 792$$

$$\uparrow$$

$$\text{root}$$

$$(a+e)(a-e) - (a+e)(a+e)$$

$$(b-a)(2S-a-e) = 792$$

$$\frac{792}{396} \Big| 2$$

$$\frac{396}{198} \Big| 2$$

$$\frac{198}{99} \Big| 9$$

$$\frac{99}{11} \Big| 11$$

$$792 = 2^3 \cdot 9 \cdot 11$$

$$\frac{56}{(p-q)(p+q)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$\frac{12}{12} = 11$$

$$2332413 \quad 0 \quad 23$$

$$P, 9321$$

$$P+q = 4422$$

$$1234567$$

$$131834$$

$$2.32$$

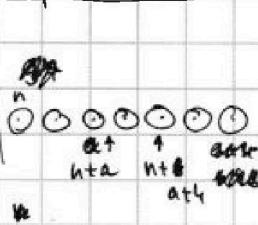


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) \quad \begin{array}{l} \text{с 6} \\ p-q=21 \quad 2^3 \cdot 3^2 - 11 \\ p+q=22 \end{array}$$

23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83

93 97 101 103 107 109 113 1002 1003 104 102 102

198 104 108 112 210 215 258 127 131 137 262

$$82 \cdot (101-97) \cdot (101+97) = 4 \cdot 22 \cdot 9 = 23 \cdot 11 \cdot 9$$

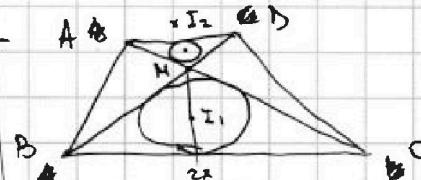
$$\frac{n+n+6}{2} \cdot 7 = (n+3)7$$

$$\begin{cases} 2n+21 - (n+a) = 101 \\ 7n+21 - (n+a) = 97 \end{cases}$$

$$7n+21 - n-a = 101$$

$$\begin{aligned} & 6n-a=80 \\ & n = \frac{80+a}{6} \quad 0 \leq a \leq 6 \\ & n = \frac{80}{6} = 14, \quad a=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 83 & \frac{92+64}{156} \\ 5 \cdot 84 & + 5 \cdot 85 \end{aligned}$$



$$6n-a=76$$

$$75:3 \\ 78$$

$$(b+r)^2 - r^2 = \frac{5}{2}$$

$$(a+2r)^2 - 4r^2 = 10$$

$$(b-a-r)(a+b+3r) + 3r^2 = \frac{5}{2} - 10 = -\frac{15}{2}$$

$$(b-a-r) \cdot \frac{13}{2} + 3r^2 = -\frac{15}{2}$$

$$(b-a-r) \cdot 13 + 6r^2 = -15$$

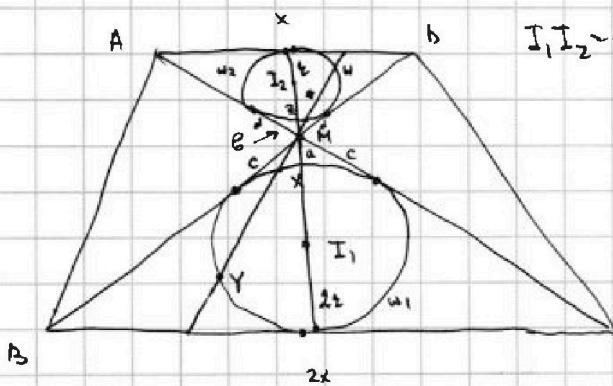
$$(b - \frac{13}{2} + b + 2r) 13 + 6r^2 = -15$$

14 15 16 17 18 19 20

13 14 15 16 17 18 19  
112

$$26+29+34 \cdot 3+17=119$$

$$I_1 I_2 = \frac{13}{2}, \quad MZ \cdot NY = 5$$



$$\begin{aligned} d^2 &= b(b+2r) = MZ \cdot (\cancel{NY}) \\ c^2 &= a(a+4r) = \cancel{MX} \cdot NY = 10 \\ b^2 + a^2 + c^2 &= \frac{13}{2} \quad dMZ \end{aligned}$$

$$(dc)^2 = ab(a+4r)(b+2r) = 5MX(MZ+NY)$$

$$\begin{aligned} a^2 &= MZ \cdot NY \\ b^2 &= MZ \cdot NY \\ a^2 b^2 &= 5 MX \cdot NY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(b+2r) &= \frac{5}{2} & b^2 + 2br + r^2 - r^2 = \\ a(a+4r) &= 10 & (b+r)^2 - r^2 = \frac{5}{2} \\ 3r^2 + ar + r^2 &= \frac{13}{2} & (a+2r)^2 - (2r)^2 = 10 \\ 9r^2 + a^2 + b^2 + 6ar + 6br + 2ar^2 &= 169 \end{aligned}$$

$$d^2 = (b+r)b$$

$$c^2 =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                                       |                                       |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

V - знак сравнения двух чисел.

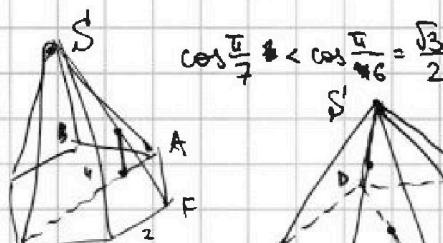
$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} V 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

(Слева и справа можно прибавлять любое число, от этого сравнение не изменится)

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{\pi}{7} + 5 \sin \frac{\pi}{14} V 0$$

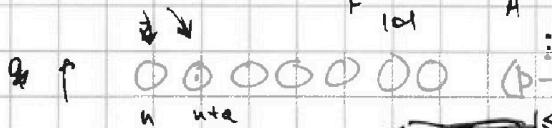
Заметим, что  $\sin \frac{3\pi}{14} < \sin \frac{3\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin \frac{\pi}{14} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14} \right) = \cos \frac{13\pi}{14} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\pi}{14} \cdot 6 \right)^n \cdot \frac{1}{(2n)!}$$



$$\cos \frac{\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Известное разложение в ряд Тейлора.



$$\frac{n+n+6}{2} = 7 + 2(n+3)$$

$$7(n+3) - n - a = 97$$

$$6n - a = 76$$

$$6n = 76 + a$$

$$11 \cdot 16 = 112$$

$$11 \cdot 5 \cdot 9 - 35$$

$$40(11 \cdot 3 \cdot 10)$$

$$5(99-7) \cdot 5 \cdot 2$$

$$97 \boxed{101} \leq 6 \quad \boxed{111}$$

$$p+q \leq 11 \quad 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$2 \cdot 3^2 \quad 72 = 36 \cdot 2$$

$$6^2 \cdot 2 \cdot 11$$

$$72 = 36 \cdot 2$$

$$(p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 9 \cdot 11$$

$$2 \ 5 \ 7 \ 11 \ 13 \ 17 \ 19 \ 23 \ 29$$

$$31 \ 37 \ 41 \ 43 \ 47 \ 53 \ 59 \ 61 \ 67$$

$$71 \ 73 \ 83 \ 97 \ 101 \ 103 \ 107 \ 109$$

$$113 \ 119 \ 127 \ 131 \ 137$$

$$139 \ 143 \ 149$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$(373)(873)$$

$$113 \ 119 \ 127 \ 131 \ 137$$

$$139 \ 143 \ 149$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$163 \checkmark$$

$$167 \checkmark$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$

$$167 \ 173 \ 179 \ 187$$

$$151 \ 153 \ 157 \ 161 \ 163$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!