МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть у такого многоугольника $(k+1)$ вершин. Тогда его углы образуют прогрессию: $143; 145; \ldots; 143+2k$, значит сумма углов $= \frac{143+(143+2k)}{2}\cdot(k+1) = (143+k)(k+1)$

С другой стороны, сумма углов выпуклого $(k+1)$-угольника $= (k-1)\cdot 180$. Таким образом $(143+k)(k+1) = (k-1)\cdot 180 \Leftrightarrow k^2 - 36k + 323 = 0 \Leftrightarrow (k=17)$ или $(k=19)$

Если $k=19$, то самый большой угол многоугольника $= 143 + 2\cdot 19 = 181$ - противоречие, что многоугольник выпуклый, тогда $k=17$.

При $k=17$ углы многоугольника соответственно равны $143; 145; \ldots; 177$, то есть данный выпуклый многоугольник существует, ~~как мы показали ранее~~, так как все его углы $< 180^\circ$, и сумма углов $= 16\cdot 180$. Тогда полученный многоугольник имеет 18 вершин

Ответ: 18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = x\ln 8 + x\ln 2 +$

$+ y\ln 8 + z\ln 8 + z\ln 3 = (x+y+z)\ln 8 +$

$+ x\ln 2 + z\ln 3 = (x+y+z)\ln 8 + x\ln 2 + x\ln 3 + (z-x)\ln 3 =$

$= (x+y+z)\ln 8 + x\ln 6 + (z-x)\ln 3 = \ln 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+y+z)\ln 8 + (x-1)\ln 6 + (z-x)\ln 3 =$

$= 3(x+y+z)\ln 2 + (x-1)\ln 2 + (x-1)\ln 3 + (z-x)\ln 3 =$

$= (4x+3y+3z-1)\ln 2 + (z-1)\ln 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4x+3y+3z-1)\frac{\ln 2}{\ln 3} + (z-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4x+3y+3z-1)\ln\frac{2}{3} + (z-1) = 0$

Заметим, что $z-1 \in \mathbb{Z}$, $\ln\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, тогда чтобы полученное выражение оказалось целым, должно быть верно, что $(4x+3y+3z-1)=0$ (иначе получится выражение вида $ab+c$, где $a \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$; $b \notin \mathbb{Z} \Rightarrow ab \notin \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab+c \notin \mathbb{Z}$)

Значит $4x+3y+3z-1=0$, а значит $z-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=1$. Тогда $4x+3y+2=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$4x+3y+2=0 \Rightarrow 4x+2=-3y \,\vdots\, 3$

Если $x \underset{3}{\equiv} 0$, то $4x+2 \not\vdots\, 3$

Если $x \underset{3}{\equiv} 2$, то $4x+2 \underset{3}{\equiv} 4\cdot 2+2=10 \Rightarrow 4x+2 \not\vdots\, 3$

Тогда $x \underset{3}{\equiv} 1$, т. е. $x=3k+1$ при $k\in \mathbb{Z}$

1) $k=-1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow 4x+2=-3y=-6 \Rightarrow y=2$

$x^2+y^2+z^2=(-2)^2+2^2+1^2=9$

2) $k=0 \Rightarrow x=1$ ~~или~~ $\Rightarrow 4x+2=-3y=6 \Rightarrow y=-2$

$x^2+y^2+z^2=1^2+(-2)^2+1^2=6$

3) $k\leq -2$ или $k\geq 1$, тогда $x\leq -5$ или $x\geq 4$,

значит $x^2+y^2+z^2 \geq x^2 \geq 16 > 6$ – $x^2+y^2+z^2$ не минимально

Т.о. $x^2+y^2+z^2 \geq 6$ и равенство достигается при $x=1$; $y=-2$; $z=1$

Проверим исходное равенство

$\ln 16 - 2\ln 8 + \ln 24 = 4\ln 2 - 6\ln 2 + \ln 4 + \ln 6 = 4\ln 2 - 6\ln 2 + 2\ln 2 + \ln 6 = \ln 6$ –

равенство верно

Ответ: 6

~~Выкл.~~ Пусть множество M состоит из чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$.

Заметим, что $p \leq (n+6)+(n+5)+(n+4)+(n+3)+(n+2)+(n+1)$, а $q \geq n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)$, тогда $p-q \leq 6$

Также заметим, что $p^2 = 792+q^2 \Rightarrow p > 20 \Rightarrow q > 14$. В частности это означает, что $p, q \neq 2$, то есть оба числа нечетны (иначе они непростые)

Тогда $p-q \neq 1$; $p-q \neq 3$; $p-q \neq 5$ (разница между двумя нечетными четна) $\Rightarrow (p-q=2)$ или $(p-q=4)$ или $(p-q)=6$ (в частности $p-q>0$, иначе $p^2-q^2=(p-q)(p+q)<0$)

Рассмотрим полученные случаи

1) $p-q=2 \Rightarrow p^2-q^2=(p-q)(p+q)=(p-q)(p-q+2q)=$
$=2(2+2q)=4(q+1)=792 \Rightarrow q+1=198 \Rightarrow q=197 \Rightarrow$
$p=q+2=199$. Оба числа p, q - простые.

Заметим, что сумма всех чисел $=7n+21$, тогда $p=7n+21-x$, где x - одно из чисел из M

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда $7n+21-x=199 \Rightarrow 7n-x=178$

Заметим, что $n \le x \le n+6$, т.о. $6n-6 \le 7n-x \le 6n$.

Пусть тогда $7n-x=6n-r$, где $r \in \mathbb{Z}$, $0 \le r \le 6$.

~~Заметим, что 178 дает остаток 4 при делении на 6, тогда и 6n-r дает остаток 4 при делении на 6. Тогда подходит только r=2, значит 178=6n-2 =>~~

Тогда $7n-x=6n-r=178 \Rightarrow 6n=178+r$.

Тогда $178+r \,\vdots\, 6$, значит $r=2$. Тогда $6n=180 \Rightarrow n=30$, тогда наше множество $M=\{30;31;32;33;34;35;36\}$. Сумма всех чисел $M=231$, тогда p – это сумма всех чисел без 32 ($p=231-32=199$), q – сумма всех чисел без 34 ($q=231-34=197$), p и q – простые,

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=2\cdot 396=792$ – подходит

2) $p-q=4 \Rightarrow p^2-q^2=(p-q)(p+q)=(p-q)(p-q+2q)=$

$=4(4+2q)=792 \Rightarrow q+2=\frac{792}{8}=99 \Rightarrow q=97$,

$p=q+4=101$. Оба числа p, q – простые

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения, аналогично п. 1 и проведем аналогичные рассуждения. Тогда

$p = 7n + 21 - x = 101 \Rightarrow 7n - x = 6n - r = 80 \Rightarrow$

$80 + r = 6n \vdots 6 \Rightarrow r = 4$, тогда $n = 84/6 = 14 \Rightarrow$

$M = \{14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$. ~~Значит сумма всех чисел в $M = \frac{14+20}{2} \cdot 7 = 119$.~~ ~~Тогда пусть p - сумма всех чисел из M без~~

Но тогда $q \geq 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 99$, но $q = 97$ — противоречие, т.е. данный случай невозможен

3) $p - q = 6 \Rightarrow p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = (p-q)(p-q+2q) =$

$= 6(6+2q) = 12(q+3) = 792 \Rightarrow q+3 = 66 \Rightarrow q = 63 \vdots 3$ —

не простое — противоречие ($p - q \neq 6$)

Т.о. $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

Ответ: $\{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{3\pi}{14} \vee 4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$. Пусть $\frac{\pi}{14}=\alpha$, тогда выражение примет вид:

$5-4\sin 3\alpha \vee 4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha \Leftrightarrow$

$5+5\sin\alpha \vee 4\cos 2\alpha + 4\sin 3\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos\alpha\cdot\sin 2\alpha =$

$= \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + \cos\alpha\cdot(2\sin\alpha\cos\alpha) =$

$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$

$= -2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha =$

$= -2\sin^3\alpha - 2\sin^3\alpha + 3\sin\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$

Тогда исходное выражение примет вид:

$5+5\sin\alpha \vee 4-8\sin^2\alpha + 12\sin\alpha - 16\sin^3\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16\sin^3\alpha + 8\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 1 \vee 0$

Рассмотрим $f(x) = 16x^3+8x^2-7x+1$

$f'(x) = 48x^2+16x-7$, $f'(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 48x^2+16x-7=0$ $\quad D = 8^2+7\cdot 48 = 16(4+21) = 16\cdot 25$

$\sqrt{D} = 20$ $\Rightarrow$ $x = \frac{-8\pm 20}{48}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда $f'(x)$: >0 $\quad -\frac{28}{48} \quad$ <0 $\quad \frac{1}{4} \quad$ >0 $\quad x$

$f(x)$: $\nearrow$ $\quad -\frac{36}{48} \quad$ $\searrow$ $\quad \frac{1}{12} \quad$ $\nearrow$

Т. о. $f(x) \searrow$ на $[-\frac{36}{48}; \frac{1}{12}]$

Заметим, что $\frac{-16+12\sqrt{2}}{32} > 0$, т.к. $16^2 < (12\sqrt{2})^2 =$

$= 256 < 288$

Т.о. Если рассмотреть $x>0$, то минимум $f(x)$ принимает при $x = \frac{1}{12}$, т.к. при $x \in [0; \frac{1}{12}]$ $f(x) \searrow$, а при $x \in [\frac{1}{12}; +\infty)$ $f(x) \nearrow$

Заметим, что $\sqrt{2} < 1{,}5$ $(\sqrt{2}^2 = 2 < 2{,}25) \Rightarrow 12\sqrt{2} < 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12\sqrt{2}-16}{32} < \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

Тогда $f(\frac{12\sqrt{2}-16}{32}) > 1 - 7 \cdot \frac{1}{16} > 0$, т.е. при всех $x > 0$ $f(x) > 0$. В частности, при $x = \sin\alpha$ $f(\sin\alpha) > 0$ (т.к. $\alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin\alpha > 0$). Но тогда мы получаем, что $16\sin^3\alpha + 8\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

Ответ: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается **черновиком** и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $f(\frac{1}{12}) = 16\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3 + 8\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2 - 7\cdot\frac{1}{12}+1>0$

т.о. $f(x)>0$ при $x>0$, в частности

$f(\sin\alpha)>0$ ($\alpha=\frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin\alpha>0$)

Тогда $16\sin^3\alpha+8\sin^2\alpha-7\sin\alpha+1>0$, т.к. преобразования равносильны, то и в исходном неравенстве знак $>$.

Ответ: $5-4\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

	$(-\infty;\ -\frac{28}{48})$	$-\frac{28}{48}$	$(-\frac{28}{48};\ \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4};\ +\infty)$
$f'(x)$	>0		<0		>0
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Тогда рассмотрим $x>0$. Заметим, что тогда

$\min f(x) = f(\frac{1}{4}) = 16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 7\cdot\frac{1}{4}+1 =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{7}{4} = 0$. Т.о. $f(x)>0$ при $x>0$ и $x \neq \frac{1}{4}$. Покажем, что $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4}$

~~Заметим, что $\sin 7\alpha =$~~

Предположим противное, то есть $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

С другой стороны $\sin 8\alpha = \sin\frac{8\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{14} = \cos\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.о $\sin 8\alpha = \cos\alpha$

С другой стороны $\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha =$

$= 4\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 8\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha =$

$= 2\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha.$

Тогда $\cos\alpha = 2\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos\alpha$, т.к. $\cos\alpha \neq 0$,

то $2\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$2\cos 2\alpha(2\cos^2 2\alpha - 1) = 1$ ~~[illegible]~~

Но $\cos 2\alpha =$ ~~cos~~ $1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$, тогда

$2\cos 2\alpha(2\cos^2 2\alpha - 1) = 2 \cdot \frac{7}{8}\left(\frac{49}{32} - 1\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{17}{32} \neq 1$ -

противоречие, т.е. $\sin\alpha \neq \frac{1}{4}$. В тоже время

$\sin\alpha > 0$, тогда $f(\sin\alpha) > 0 \Rightarrow$ в исходном

~~[illegible]~~ неравенстве должен стоять знак „>"

Ответ: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

Рассмотрим несколько случаев

1) Все выбранные вершины $\in \alpha$, тогда выбранные вершины не образуют пирамиду.

2) Одна из выбранных вершин $\notin \alpha$, Остальные $k \geq 4$ вершин $\in \alpha$. Понятно, что данная пирамида будет выпуклой (в её основании лежит фигура, образованная вершинами из α, данная фигура по условию вписанная)

Посчитаем кол-во таких пирамид (т.е. кол-во способов выбрать $k \geq 4$ вершин из α, и одну не из α).

Понятно, что выбрать вершину не из α можно 5 способами

а) $k = 4$, тогда $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ - кол-во способов выбрать 4 вершины из α

б) $k = 5$, тогда $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$ - кол-во способов выбрать 5 вершин из α

в) $k = 6$, тогда нужно выбрать одну вершину из α,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

которую мы не включаем, это можно сделать 7 способами

г) $k=7 \Rightarrow$ 1 способ выбрать 7 вершин из α

Тогда всего способов выбрать $k \geq 4$ вершин из α можно $35+21+7+1=64$ способами, для каждого из этих 64 способов 5 способами выбирается вершина не из α, т.е. всего искомых пирамид $64 \cdot 5 = \underline{\underline{320}}$

3) Заметим, что все остальные пирамиды - треугольные. Действительно, предположим противное. Тогда есть $k \geq 4$ точек лежащих в одной плоскости (которые образуют основание „предполагаемой" пирамиды), и эти k точек не лежат все в α (т.к. эти пирамиды мы уже учли). Но это противоречит условию, что если 4 точки образуют плоскость, то эта плоскость - α, т.е. предположение неверно. Тогда остается посчитать кол-во треугольных пирамид (т.е. кол-во способов выбра-

рать 4 точки, нележащие в одной плоскости)
Посчитаем кол-во способов выбрать 4 точки из 12, и вычтем кол-во способов выбрать 4 точки лежащие в одной плоскости

а) $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 11\cdot9\cdot5 = 495$ – кол-во способов выбрать 4 точки из 12

б) 2-ое условие эквивалентно тому, что было выбрано 4 точки из α. Выбрать 4 точки из α можно $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 7\cdot5 = 35$ способов.

Тогда всего треугольных пирамид $495 - 35 = 460$.

Значит всего пирамид $460 + 320 = 780$

Ответ: 780

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☐	☒	☐	☒

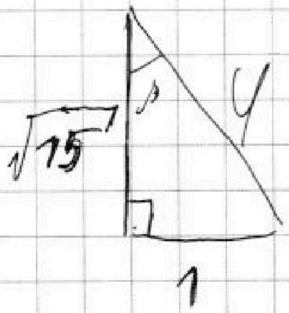
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~$\sin 7\alpha = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin 2\alpha$~~

5

$\sin\beta = 1/4$



$\frac{3}{14} > \frac{1}{6}$

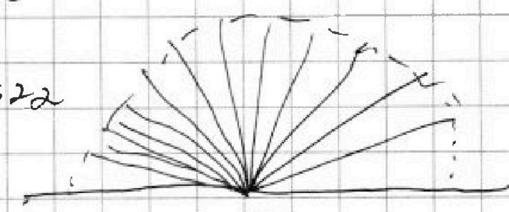
$\frac{9}{42} > \frac{7}{42}$

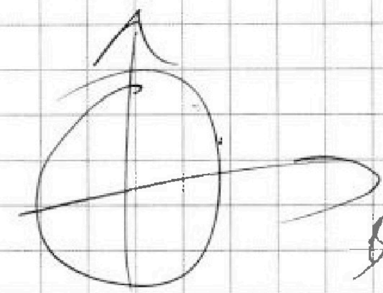
$\sin 2\alpha = 2\sin\cdot\cos =$

$= \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha$

$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$





$\alpha = \frac{1\pi}{14} \Rightarrow 3\alpha = \frac{3}{14}\pi$

$\sin 3\alpha > \frac{1}{2}$

$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

cos

$\frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha =$

$= 1 - 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{7}{8}$

$\frac{11}{16} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{256} < \frac{1}{2}$

OK

$\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\frac{7}{8} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin 16\alpha = \sin 2\alpha$

$\sin 16\alpha = 2\sin 8$

$\sin 8\alpha = \cos\alpha$

$\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}$ $\quad 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

$\cancel{\sin\frac{3\pi}{}}$ $\quad 5\left(1+\sin\frac{\pi}{14}\right)$ $\quad 4\left(\sin\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{7}\right)$

$\cancel{\sin\frac{3\pi}{14} = \sin\left(\frac{2\pi}{14}+\frac{\pi}{14}\right) = \sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{2\pi}{14}}$

$\cancel{\sin\frac{2\pi}{14} = 2\sin\frac{\pi}{7}}$

$3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$

$= 3\sin$

$\frac{\pi}{14} = \alpha$

$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha =$

$= \cancel{\sin\alpha(\cos^2\alpha + 2}$ $= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

$5(1+\sin\alpha) + 4(3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$5 + 5\sin\alpha \;/\; 12\sin\alpha\cos^2\alpha - 4\sin^3\alpha$ [illegible]

$9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$4\sin^3\alpha + 9\sin^2\alpha + \underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha} + 5\sin\alpha \;/\; 12\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$12\sin\alpha - 12\sin^3\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

143 145 ... $k+1$ член последний $= 143+k\cdot 2$

n вершин $\Rightarrow (n-2)\cdot 180$ — сумма углов

$$\frac{143+143+k\cdot 2}{2}\cdot(k+1) = (143+k)\cdot(k+1)$$

$$(143+k)(k+1) = (k-1)\cdot 180$$

$323 = 17\cdot 19$

$198 \times 4 = 792$ 197 — ок

199 —

$17 \times 7 = 119$

$\frac{7n+21}{2}$

$34 \times 3 = 102$

$792 : 12 = 66$

$7n+21$ $6n+21$

$p = 7n+21-x = 101 \Rightarrow 7n-x = 80$

$7n-x = 6n-r = 80 \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) ~~Неск~~ Одна т. не из α;

k из α, одна не из α

~~A(7-1)~~

$3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$

$4 = 35$

$5 = \frac{7\cdot6}{2\cdot1} = 21$

$6 = 7$

$7 = 1$

$(35+35+21+7+1)\cdot5$

$\sqrt{D} = 12\sqrt{2}$

$x = \frac{-16\pm12\sqrt{2}}{32}$

2) Несколько не из α => только трезгольные

$\ln 16 = \ln 8 + \ln 2$

$64 + 7\cdot32 =$

$= 16(4+14) =$

$= 16\cdot9\cdot2$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 =$

~~$(x+y+z)\ln 6 + x\ln 2 + y\ln 8$~~

$(x+y+z)\ln 8 + x\ln 2 + z\ln 3 = \ln 6$

$(x+y+z)\ln 8 + x\ln 6 + (y-x)\ln 3 = \ln 6$

$\ln a + \ln b = \ln ab$

$e^x = a \quad e^y = b \quad e^{x+y} = ab$ -ок

$\sin 3\alpha =$

$\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) =$

$\sin\alpha - 2\sin^3\alpha$