



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1 I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у такого многоугольника $(k+1)$ вершин.
Тогда его углы образуют прогрессию:

$$143; 145; \dots; 143 + 2k, \text{ значит сумма углов} \\ = \frac{143 + (143 + 2k)}{2} \cdot (k+1) = (143 + k)(k+1)$$

С другой стороны, сумма углов выпуклого $(k+1)$ -угольника $= (k-1) \cdot 180$. Таким образом $(143 + k)(k+1) = (k-1) \cdot 180 \Leftrightarrow k^2 - 36k + 323 = 0$
 $\Leftrightarrow (k=17) \text{ или } (k=19)$

Если $k=19$, то самый большой угол

многоугольника $= 143 + 2 \cdot 19 = 181$ - противоречие, что многоугольник выпуклый, тогда $k=17$.

При $k=17$ углы многоугольника соответственно равны $143; 145; \dots; 177$, то есть

данный ~~многоугольник~~ выпуклый многоугольник существует, ~~и не является вырожденным~~, так как все его углы

$< 180^\circ$, и сумма углов $= 18 \cdot 180$. Тогда полученный

многоугольник имеет 18 вершин

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 &= x \ln 8 + x \ln 2 + \\
 + y \ln 8 + z \ln 8 + z \ln 3 &= (x+y+z) \ln 8 + \\
 + x \ln 2 + z \ln 3 &= (x+y+z) \ln 8 + x \ln 2 + x \ln 3 + (z-x) \ln 3 \\
 &= (x+y+z) \ln 8 + x \ln 6 + (z-x) \ln 3 = \ln 6 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (x+y+z) \ln 8 + (x-1) \ln 6 + (z-x) \ln 3 &= \\
 &= 3(x+y+z) \ln 2 + (x-1) \ln 2 + (x-1) \ln 3 + (z-x) \ln 3 = \\
 &= (4x+3y+3z-1) \ln 2 + (z-1) \ln 3 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (4x+3y+3z-1) \frac{\ln 2}{\ln 3} + (z-1) &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (4x+3y+3z-1) \ln \frac{2}{3} + (z-1) &= 0 \\
 \text{Заметим, что } z-1 \in \mathbb{Z}, \ln \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}, \text{ тогда} \\
 \text{чтобы полученное выражение оказалось целым,} \\
 \text{должно быть верно, что } (4x+3y+3z-1) = 0 \\
 \text{(иначе получится выражение вида } ab+bc, \\
 \text{где } a \in \mathbb{Z}; a \neq 0; b \notin \mathbb{Z} \Rightarrow ab \notin \mathbb{Z}; c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab+bc \notin \mathbb{Z}) \\
 \text{Значит } 4x+3y+3z-1=0, \text{ а значит } z-1=0 \Rightarrow \\
 z=1. \text{ Тогда } 4x+3y+2=0
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow 4x + 2 = -3y : 3$$

Если $x \equiv 0 \pmod{3}$, то $4x + 2 \not\equiv 3$

Если $x \equiv 2 \pmod{3}$, то $4x + 2 \equiv 4 \cdot 2 + 2 = 10 \equiv 1 \pmod{3}$

Тогда $x \equiv 1 \pmod{3}$, т.е. $x = 3k + 1$ при $k \in \mathbb{Z}$

$$1) k = -1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 4x + 2 = -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (-2)^2 + 2^2 + 1^2 = 9$$

$$2) k = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ или } x = 4 \Rightarrow 4x + 2 = -3y = 6 \Rightarrow y = -2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$$

3) $k \leq -2$ или $k \geq 1$, тогда $x \leq -5$ или $x \geq 4$,

значит $x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 \geq 16 > 6$ - не

$x^2 + y^2 + z^2$ не минимально

т.о. $x^2 + y^2 + z^2 \geq 6$ и равенство достигается

при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$

Проверим исходное равенство

$$\ln 16 - 2 \ln 8 + \ln 24 = 4 \ln 2 - 6 \ln 2 + \ln 4 +$$

$$+ \ln 6 = 4 \ln 2 - 6 \ln 2 + 2 \ln 2 + \ln 6 = \ln 6 -$$

равенство верно

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Выяснить~~ Пусть множество M состоит из чисел $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6$.

Заметим, что $p \leq (n+6) + (n+5) + (n+4) + (n+3) + (n+2) + (n+1)$,
~~и~~ $q \geq n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5)$,

Тогда $p - q \leq 6$

Также заметим, что $p^2 = 792 + q^2 \Rightarrow p > 20 \Rightarrow$

$q > 14$. В частности это означает, что $p, q \neq 2$,
то есть оба числа нечетны (иначе они не простые)

Тогда $p - q \neq 1, p - q \neq 3, p - q \neq 5$ (разница между двумя нечетными четна) $\Rightarrow (p - q = 2)$ или $(p - q = 4)$ или $(p - q = 6)$ (в частности $p - q > 0$, иначе $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) < 0$)

Рассмотрим полученные случаи

$$\begin{aligned} 1) p - q = 2 &\Rightarrow p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = (p - q)(p - q + 2q) = \\ &= 2(2 + 2q) = 4(q + 1) = 792 \Rightarrow q + 1 = 198 \Rightarrow q = 197 \Rightarrow \end{aligned}$$

$p = q + 2 = 199$. Оба числа p, q - простые.

Заметим, что сумма всех чисел $= 7n + 21$, тогда

$p = 7n + 21 - x$, где x - одно из чисел из M



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } 7n + 21 - x = 199 \Rightarrow 7n - x = 178$$

Заметим, что для $n \leq x \leq n+6$, т.е. $6n-6 \leq 7n-x \leq 6n$.

Пусть тогда $7n-x = 6n-r$, где $r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r \leq 6$.

Заметим, что 178 дает остаток 4 при делении на 6 , тогда $6n-r$ дает остаток 4 при делении на 6 . Тогда подходит только $r=2$, значит $178 = 6n - 2 \Rightarrow$

$$\text{Тогда } 7n - x = 6n - r = 178 \Rightarrow 6n = 178 + r.$$

Тогда $178 + r : 6$, значит $r=2$. Тогда

$$6n = 180 \Rightarrow n = 30, \text{ тогда наше множество}$$

$M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$. Сумма

всех чисел $M = 237$, тогда p - это сумма всех

чисел без 32 ($p = 237 - 32 = 199$), q - сумма всех

чисел без 34 ($q = 237 - 34 = 197$), p и q - простые,

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 2 \cdot 396 = 792 \text{ - подходит}$$

$$2) p - q = 4 \Rightarrow p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = (p-q)(p-q+2q) =$$

$$= 4(4+2q) = 792 \Rightarrow q+2 = \frac{792}{8} = 99 \Rightarrow q = 97,$$

$$p = q + 4 = 101 \text{ Оба числа } p, q \text{ - простые}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения, аналогично п. 1 и проведем аналогичные рассуждения. Тогда

$$p = 7n + 21 - x = 101 \Rightarrow 7n - x = 6n - r = 80 \Rightarrow$$

$$80 + r = 6n : 6 \Rightarrow r = 4, \text{ тогда } n = 84/6 = 14 \Rightarrow$$

$$M = \{14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\} \text{ — значит}$$

$$\text{сумма всех чисел в } M = \frac{14+20}{2} \cdot 7 = 119.$$

Тогда пусть p — сумма всех чисел из M без

$$\text{числа } k. \text{ Тогда } q = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 99, \text{ но}$$

$q = 97$ — противоречие, т.е. данный случай невозможен

$$\begin{aligned} 3) \quad p - q = 6 &\Rightarrow p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = (p - q)(p - q + 2q) = \\ &= 6(6 + 2q) = 12(q + 3) = 792 \Rightarrow q + 3 = 66 \Rightarrow q = 63 : 3 \end{aligned}$$

не простое — противоречие ($p - q \neq 6$)

$$\text{Т.о. } M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$$

$$\text{Ответ: } \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}} \quad \text{Пусть } \frac{\pi}{14} = \alpha,$$

тогда выражение примет вид:

$$5 - 4 \sin 3\alpha \sqrt{4 \cos 2\alpha - 5 \sin \alpha} \quad (=)$$

$$5 + 5 \sin \alpha \sqrt{4 \cos 2\alpha + 4 \sin 3\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot (2 \sin \alpha \cos \alpha) =$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha =$$

$$= -2 \sin^3 \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

Тогда исходное выражение примет вид:

$$5 + 5 \sin \alpha \sqrt{4 - 8 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} \quad (=)$$

$$= 5 + 5 \sin \alpha \sqrt{16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 7} \quad \forall \alpha$$

Рассмотрим $F(x) = 16x^3 + 8x^2 - 7x + 7$

$$F'(x) = 48x^2 + 16x - 7, \quad F'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48x^2 + 16x - 7 = 0 \quad D = 8^2 + 7 \cdot 48 = 16 \cdot 25$$

$$\sqrt{D} = 20 \Rightarrow x = \frac{-16 \pm 20}{96} \Rightarrow x = \frac{-16 + 20}{96} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

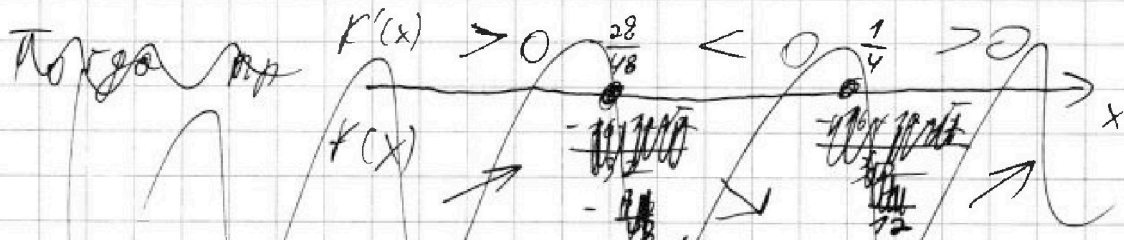


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.е. $f(x) \searrow$ на $[\frac{28}{18}; \frac{1}{4}]$

заметьте, что $\frac{12\sqrt{2}-16}{32} < \frac{1}{4}$, т.к. $12\sqrt{2} < 16 + 8 = 24$

$\Rightarrow 256 < 288$

Докажите! Если рассмотреть $x > 0$, то минимум

$f(x)$ принимает при $x = \frac{7}{12}$, т.к.

при $x \in [0; \frac{7}{12}] f(x) \searrow$, а при

$x \in [\frac{7}{12}; +\infty) f(x) \nearrow$

заметьте, что $\sqrt{2} < 1.5$ ($2 < 2.25 < 2\sqrt{2} < 2.8$)

$\Rightarrow \frac{12\sqrt{2}-16}{32} < \frac{1}{4} < \frac{7}{12}$

Тогда $f(\frac{12\sqrt{2}-16}{32}) > 1 - 7 \cdot \frac{1}{16} > 0$, т.е. при

всех $x > 0$ $f(x) > 0$. В частности, при $x = \sin \alpha$

$f(\sin \alpha) > 0$ (т.к. $\alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin \alpha > 0$). Когда

мы получаем, что $16 \sin^2 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 7 > 0$

$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $f\left(\frac{1}{12}\right) = 16 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{12} + 1 > 0$,

т.о. $f(x) > 0$ при $x > 0$, в частности

$f(\sin \alpha) > 0$ ($\alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin \alpha > 0$)

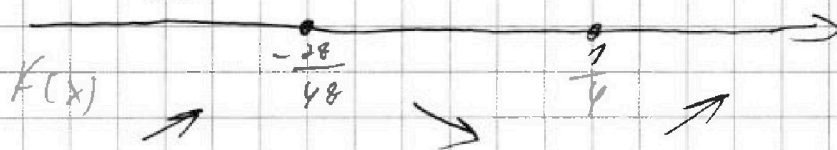
Тогда $16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 1 > 0$, т.к.

преобразование равносильно, то и в исходном

неравенстве знак $>$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{2\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$

$f'(x) \begin{matrix} > 0 \\ \nearrow \end{matrix} \quad < 0 \quad \begin{matrix} > 0 \\ \nearrow \end{matrix}$



Тогда рассмотрим $x > 0$, заметим, что тогда

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{7}{4} = 0 \text{ т.о. } f(x) > 0 \text{ при}$$

$x > 0$ и $x \neq \frac{1}{4}$ Покажем, что $\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{14} + \frac{1}{4}$

~~Выведем, что $\sin \alpha \neq$~~

Предположим противное, то есть $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

С другой стороны $\sin \alpha = \sin \frac{8\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{14} = \cos \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$T.O \sin 8\alpha = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны } \sin 8\alpha &= 2 \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha = \\ &= 4 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 8 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \\ &= 2 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos \alpha, \text{ т.е. } \cos \alpha \neq 0,$$

$$\text{то } 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos 2\alpha (2 \cos^2 2\alpha - 1) = 1$$

$$\text{Но } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8}, \text{ тогда}$$

$$2 \cos 2\alpha (2 \cos^2 2\alpha - 1) = 2 \cdot \frac{7}{8} \left(\frac{49}{32} - 1 \right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{17}{32} \neq 1 -$$

противоречие, т.е. $\sin \alpha \neq \frac{1}{4}$. В то же время

$\sin \alpha > 0$, тогда $f(\sin \alpha) > 0 \Rightarrow$ в исходном

неравенстве должен стоять знак $>$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим несколько случаев

1) Все выбранные вершины $\in \alpha$, тогда выбранные вершины не образуют пирамиду.

2) Одна из выбранных вершин $\notin \alpha$, остальные $k \geq 4$ вершин $\in \alpha$. Помните, что данная пирамида будет выуклой (все основания лежат в фигуре, образованная вершинами из α , данная фигура по условию вписанная)

Посчитаем кол-во таких пирамид (т.е. кол-во способов выбрать $k \geq 4$ вершин из α , и одну из α).

Помните, что выбрать вершину не из α можно 5 способами

а) $k=4$, тогда $\frac{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ - кол-во способов выбрать 4 вершины из α

б) $k=5$, тогда $\frac{2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$ - кол-во способов выбрать 5 вершин из α

в) $k=6$, тогда нужно выбрать одну вершину из α ,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

которую мы не включаем, это можно сделать ⁷
способами

1) $k=7 \Rightarrow$ 1 способ выбрать 7 вершин из 2
Тогда всего способов выбрать $k \geq 4$ вершин
из 2 можно $35 + 21 + 7 + 1 = 64$ способами,
для каждого из этих 64 способов 5 способов
выбирается вершина не из 2, т.е. всего
исковых пирамид $64 \cdot 5 = \underline{320}$

3) Заметим, что все остальные пирамиды - треугольные. Действительно, предположим обратное.
Тогда есть $k \geq 4$ точек лежащих в одной плоскости (которые образуют основание предполагаемой "пирамиды"), и эти k точек ~~мы~~ не лежат все в 2 (т.к. эти пирамиды мы уже учли). Но это противоречит условию, что если 4 точки образуют плоскость, то эта плоскость - 2, т.е. предположение неверно. Тогда остается посчитать кол-во треугольных пирамид (т.е. кол-во способов выбора



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рать 4 точки, лежащие в одной плоскости)

Посчитаем кол-во способов выбрать 4

точки из 12, и вычтем кол-во способов выбрать

4 точки лежащие в одной плоскости

$$a) \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495 - \text{кол-во способов}$$

выбрать 4 точки из 12

б) 2^{ое} условие эквивалентно тому, что было

выбрано 4 точки из 4. Выбрать 4 точки из

4 можно $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ способами.

Тогда всего треугольных пирамид $495 - 6 = 489$.

Значит всего пирамид $489 + 300 = 789$

Ответ: 789



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



$$\sin 7\alpha = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin \alpha$$

$$\sin \beta = 1/4$$

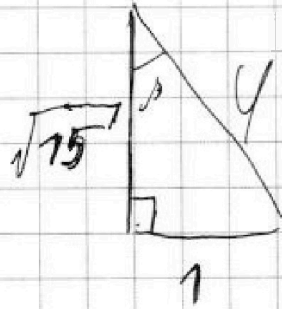
$$\frac{1}{3} > \frac{1}{1}$$

$$\frac{19}{6}$$

$$\frac{9}{4} > \frac{7}{4}$$

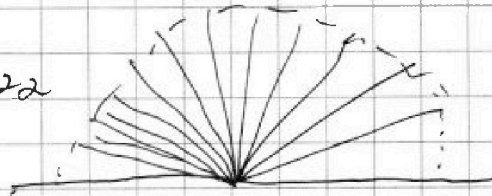
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$$

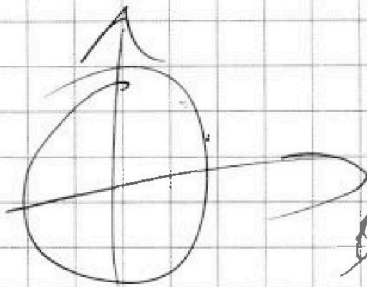


$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha$$



$$\sin \alpha \cos \alpha$$



$$\alpha = \frac{\pi}{14} \Rightarrow 3\alpha = \frac{3}{14}\pi$$

$$\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$$

~~sin~~
cos

$$\sin \alpha = 4 \sin^3 \alpha$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{96} = \frac{11}{16}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{11}{16} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1-1}{250} < \frac{1}{2}$$

OK

$$\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{7}{8} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 8\alpha = \cos 4\alpha$$

$$\sin 8\alpha = 2 \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$\sin \frac{2\pi}{14} \quad 5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \quad 4(\sin \frac{2\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{7})$$

$$\sin \frac{3\pi}{14} = \sin(\frac{2\pi}{14} + \frac{\pi}{14}) = \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} \sin \frac{2\pi}{14}$$

$$\sin \frac{2\pi}{14} = 2 \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}$$

$$\frac{\pi}{14} = \alpha$$

$$3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = -3 \sin \alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

$$5(1 + \sin \alpha) + 4(3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$5 + 5 \sin \alpha \quad | \quad 12 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$4 \sin^3 \alpha + 9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \quad | \quad 12 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$12 \sin \alpha - 12 \sin^3 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~1 4 3 1 4 5 ...~~

1 4 3 1 4 5 ... - k+1 член последний = 143+k-2

n вершин $\Rightarrow (n-2) \cdot 180$ - сумма углов

$$\frac{143 + 143 + k \cdot 2}{2} = (143 + k) \cdot (k + 1)$$

$$(143 + k)(k + 1) = (k - 1) \cdot 180$$

$$323 = 17 \cdot 18$$

$$\begin{array}{r} \times 198 \\ \underline{4} \\ 792 \end{array}$$

$$197 - 0k$$

$$199 -$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \underline{2} \\ 119 \end{array}$$

~~7n+21~~ ~~4n+197~~

$$7n+21 = 4n+197$$

$$792/172$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 7 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 792/172 \\ \underline{72} \\ 66 \\ \underline{2} \end{array}$$

$$7n+21$$

$$6n+21$$

$$p = 7n+21 - x = 101 \Rightarrow 7n - x = 80$$

$$7n - x = 6n - x = 80 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть одна т. не из α ;
 k из α , другая не из α

$$3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$4 = 35$$

$$5 = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 21$$

$$6 = 7$$

$$7 = 1$$

$$(35 + 35 + 27 + 7 + 0) \cdot 5$$

$$\sqrt{D} = 12\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-76 \pm 12\sqrt{2}}{32}$$

2) Несколько не из $\alpha \Rightarrow$ только треугольные

$$\ln 16 = \ln 8 + \ln 2$$

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 2 =$$

$$(x+y+z) \ln 8 + x \ln 2 + y \ln 8$$

$$(x+y+z) \ln 8 + x \ln 2 + y \ln 8 = \ln 6$$

$$(x+y+z) \ln 8 + x \ln 6 + (y-x) \ln 3 = \ln 6$$

$$\ln^x a + \ln^y b = \ln^{x+y} ab$$

$$e^x = a \quad e^y = b$$

$$e^{x+y} = ab \quad \text{OK}$$

$$\sin 2\alpha =$$

$$\sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) =$$

$$\sin \alpha$$

$$\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha$$