



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у многоугольника n углов. Тогда есть два варианта:

1) арифметическая прогрессия возрастающая. Тогда у многоугольника углы $132, 134, \dots, 132 + 2(n-1)$. Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180 \cdot (n-2)$. Получается равенство:

$$132 + 134 + \dots + 132 + 2(n-1) = 180(n-2)$$

$$\frac{(132 + 132 + 2(n-1))n}{2} = 180(n-2)$$

$$132n + 132n + 2n(n-1) = 360n - 720$$

$$2n^2 - 2n = 96n - 720$$

$$2n^2 - 98n + 720 = 0 \Rightarrow n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

$$n_1 = \frac{49 + 31}{2} = 40; \quad n_2 = \frac{49 - 31}{2} = 9$$

Однако, если $n = 40$, то самый большой угол многоугольника равен $132 + 39 \cdot 2 = 210^\circ > 180^\circ$, а значит, выпуклый многоугольник невыпуклый.

То есть в этом случае у многоугольника 9 вершин

2) арифметическая прогрессия убывающая. Тогда у многоугольника углы $132 - 2(n-1), 132 - 2(n-2), \dots, 132$. Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180(n-2)$, поэтому имеет

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \times (n+1) \times 25 = 2 \times n \times 5$$

$$n, n+1, \dots, n+5$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

n - четное.

$$p^2 - q^2 = 1080 \quad (p-q)(p+q) = 1080$$

$$1080 = 2 \cdot 540 = 4 \cdot 270 =$$

$$p-q = 2$$

$$p+q \leq 6$$

$$= 8 \cdot 135 =$$

$$p+q = 540$$

$$= 8 \cdot 27 \cdot 5 =$$

$$p = 271$$

$$q = 269$$

$$40, 41, 42, 43, 44, 45, 46$$

$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49$$

$$42, 43, 44, 45, 47, 48$$

$$21, 22, 23, 24, 25, 26, 27$$

$$20, 21, 22, 23, 24, 25, 26$$

$$19, 20, 21, 22, 23, 24, 25$$

$$17. \text{M} \cdot \text{M} = 9$$

$$2x^2 = 2x$$

$$2x = \sqrt{18}$$

$$2x = \frac{16}{3}$$

$$r_1 = 2x^2 - 2x =$$

$$= \frac{256}{9} - 18$$

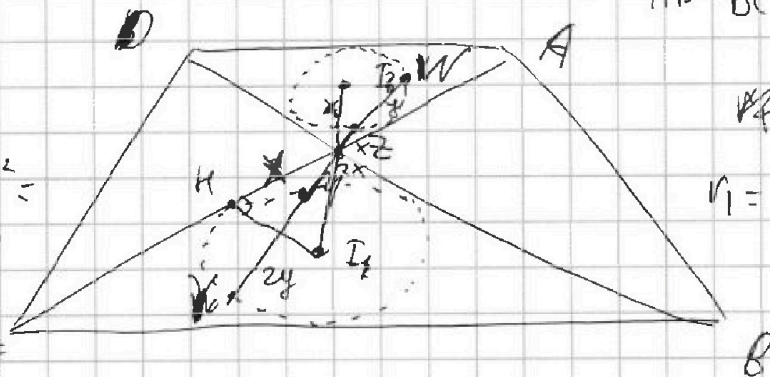
$$= \frac{256 - 162}{9} =$$

$$= \frac{94}{9}$$

$$AD:BC = 1:2$$

$$r_1 = 1, r_2 = 8$$

$$r_1 = ?$$





1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \text{ в } 25 + y \text{ в } 75 + z \text{ в } 125 = \text{в } 45$$

$$\text{Ийти: } \min(x^2 + y^2 + z^2) = ?$$

$x^2 + y^2 + z^2$ - это квадрат расстояния от точки $(0; 0; 0)$, до

точки с координатами $(x; y; z)$. При этом точка $(x; y; z)$ лежит

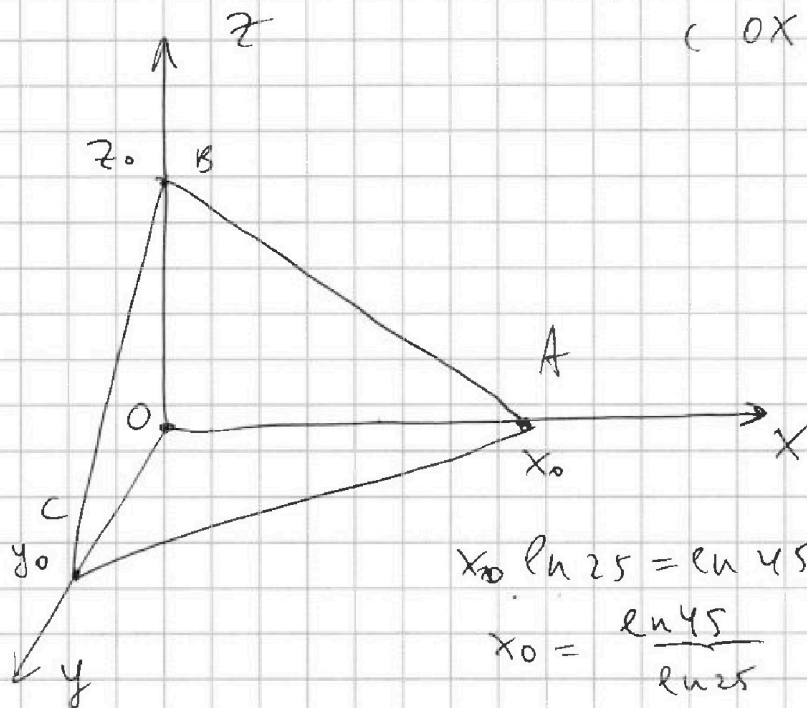
в плоскости заданной уравнением $x \text{ в } 25 + y \text{ в } 75 + z \text{ в } 125 = \text{в } 45$

То есть задача свелась к нахождению расстояния от точки

$(0; 0; 0)$ до заданной плоскости, т.к. тогда $x^2 + y^2 + z^2$ будет ми-

нимальным.

Найдем x_0, y_0, z_0 (пересечения плоскости (OX, OY, OZ)).



$$x_0 \text{ в } 25 = \text{в } 45$$

$$x_0 = \frac{\text{в } 45}{\text{в } 25}$$

$$y_0 \text{ в } 75 = \text{в } 45$$

$$y_0 = \frac{\text{в } 45}{\text{в } 75}$$

$$z_0 \text{ в } 125 = \text{в } 45$$

$$z_0 = \frac{\text{в } 45}{\text{в } 125}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем объем тетраэдра $OABC$:

$$V_{OABC} = \left(0 \cdot S_{OBA} \cdot \frac{1}{3}\right) \quad (O = \frac{\ln 45}{\ln 25} = y_0)$$

$$S_{OBA} = \frac{1}{2} OB \cdot OA = \frac{1}{2} x_0 z_0 \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{3} y_0 \cdot \frac{1}{2} x_0 z_0 = \frac{1}{6} x_0 z_0 y_0$$

А с другой стороны:

$V_{OABC} = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC}$, где h - расстояние от O до ABC (то же можно найти). S_{ABC} найдем по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (b = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} = \frac{1}{2} \ln 45, \quad AB = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} = c, \quad = b)$$

$$AC = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = a$$

$$\frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} x_0 y_0 z_0 \Rightarrow \text{Итак } h = \frac{x_0 y_0 z_0}{2 S_{ABC}}$$

$$h^2 = (x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = \frac{x_0^2 y_0^2 z_0^2}{2 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$x_0 = p = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{y_0^2 + z_0^2} + \sqrt{x_0^2 + z_0^2}}{2}$$

~~$$\min (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2} \cdot \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2} \cdot \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2} \cdot \frac{1}{3}$$~~

Ответ:

$$\min (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{2p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p =$$

$$x_0 = \frac{\ln 45}{\ln 25}, \quad y_0 = \frac{\ln 45}{\ln 25}, \quad z_0 = \frac{\ln 45}{\ln 125}, \quad p =$$

$$= \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{y_0^2 + z_0^2} + \sqrt{x_0^2 + z_0^2}}{2}, \quad a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad b = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}, \quad c = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть числа в множестве $n, n+1, n+2, \dots, n+6$.

$$p^2 - q^2 = 1080 \Rightarrow (p-q)(p+q) = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

Поймём, что, на самом деле, p и q — это просто $S-x$, где S — сумма чисел в M , x — число, не участвующее в шестёрке. Поэтому $p-q$ не может быть больше, т.к. числа в M отличаются не больше чем на 6.

p и q достаточно большие числа, поэтому $p-q \neq 1$, т.к. иначе $q=2$, что, по-любому, не может быть.

1) $p-q=2$, $p+q=540$. $\Rightarrow 2p=542$, $p=271$, $q=269$. — оба простых числа. Найдём возможные значения n . При $n=41$, наименьшая возможная сумма в шестёрке равна $42+43+\dots+47 =$

$$= 89 \cdot 3 = 267 < 269. \text{ При } n=43, \text{ наименьшая возможная сумма равна } 43+44+\dots+48 = 273 > 271. \text{ Поэтому эти}$$

n не подходят и другие большие меньшие и большие соответственно не подойдут. А $n=42$ подходит. Тогда числа в M —

$M: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48$. А шестёрки, в которых сумма p и q это $(42; 43; 45; 46; 47; 48)$ и $(42; 43; 44; 45; 47; 48)$.

Аналогично рассмотрим другие случаи:

2) $p-q=3$, не может быть, т.к. тогда $q=2$, что не может быть.

3) $p-q=4$, $p+q=270$. $\Rightarrow 2p=274$, $p=137$, $q=133$ — простые числа. Найдём n . При $n=19$ наименьшая возможная сумма в



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

шестерке $20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 135 < 137 < p$.

при $n = 20$, минимальная сумма в шестерке $20 + 21 + \dots +$

$+ 25 = 135 \geq q$. То есть $n = 19$ и $n = 20$ не подходят

и больше и меньше n в этом смысле не подойдут.

4) $p - q = 5$, не подходит, т.к. тогда $q = 2$, число не может быть

5) $p - q = 5$, $p + q = 180 \rightarrow 2p = 185 \Rightarrow p = 92,5, q = 87,5$.

$87,5 : 3$ поэтому этот случай не подходит.

Получается, что единственной возможной суммой это $n = 42$,

и M тогда это: $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано: $ABCD$ - трапеция D

$$I_1 I_2 = 8$$

$$M Z \cdot M Y = 9$$

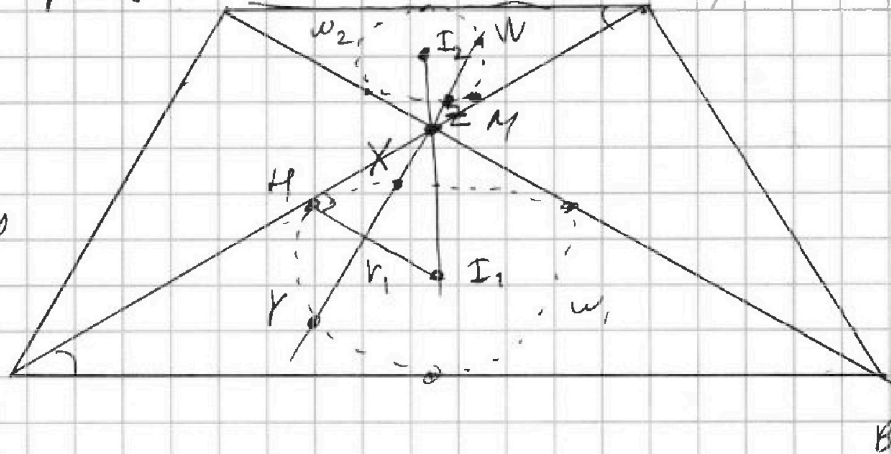
ω_1 - впис. в $\triangle BMC$

ω_2 - впис. в $\triangle AMD$

$$AD : BC = 1 : 2$$

Найти:

$$r_1 = ?$$



Решение:

$\triangle AMD \sim \triangle CMB$ т.к. $\angle AMD = \angle CMB$ - как вертикальные, а $\angle MAD = \angle MCB$ - как соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей AC (т.к. $ABCD$ - трапеция) (по углу уша).

$$k = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

M лежит на $I_1 I_2$, т.к. I_1 лежит на бисс. уша CMB , а I_2 лежит на бисс. уша AMD , а они совпадают, так как уша вертикальные. Т.к. $\triangle AMD \sim \triangle CMB$, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} = k$. По той же причине r_1, r_2 - радиусы вписанных окр. в $\triangle CMB$ и $\triangle AMD$ соответственно. По той же причине $\frac{I_2 M}{I_1 M} = \frac{1}{2} = k$.

~~$\triangle MI_2 Z$ и $\triangle MI_1 X$ - $\angle XMI_1 = \angle ZMI_2$ - как вертикальные.~~ Соединим радиусы в точке M с центрами окружностей

- 2. При кеп $I_2 \rightarrow I_1, A \rightarrow C, D \rightarrow B, Z \rightarrow X$.

Поэтому $XM = \cancel{2M Z} 2M Z$

MI_1 - касательная к ω_1 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $MN^2 = MX \cdot MY = 2MZ \cdot MY = 18$ - свойство кас. ч
окружностей.

$I_1 K \perp MN$, т.к. это радиус в точку касания.

$$I_1 M = 2 I_2 M, \quad I_1 M + I_2 M = I_1 I_2 = 8$$

$$\Rightarrow \cancel{I_1 M} = 3 I_2 M = 8 \quad I_2 M = \frac{8}{3}, \quad I_1 M = \frac{16}{3}$$

$$I_1 K^2 = r_1^2 = I_1 M^2 - \cancel{I_2 M}^2 MN^2 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{256 - 162}{9} =$$

$$= \frac{94}{9} \quad \text{из т. Пифагора.}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \text{ V}; \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}$$

$$\sqrt{4 \sin^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14}} \quad L = \frac{3\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin 2L \text{ V} \quad 3 \sin 2L - 4 \cos 2L$$

$$5 + 16 \sin^3 2L - 12 \sin 2L \text{ V} \quad 3 \sin 2L - 4 \cos^2 2L + 4 \sin^2 2L$$

$$5 + 16 \sin^3 2L - 15 \sin 2L \text{ V} - 4 + 4 \sin^2 2L + 4 \sin^2 2L$$

$$9 + 16 \sin^3 2L - 15 \sin 2L \text{ V} \quad 8 \sin^2 2L$$

$$16 \sin^3 2L - 8 \sin^2 2L - 15 \sin 2L + 9 \text{ V} 0.$$

$$\sin 2L = x.$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0$$

$$x = -1 \text{ корень.}$$

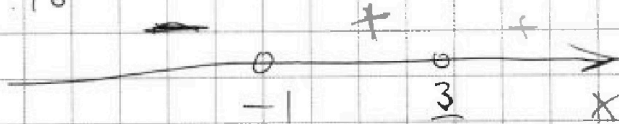
$$\begin{array}{r} 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \quad | \quad x+1 \\ \underline{16x^3 + 16x^2} \\ -24x^2 - 15x \\ \underline{-24x^2 - 24x} \\ 9x + 9 \\ \underline{-9x - 9} \\ 0 \end{array}$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 =$$

$$= (x+1)(16x^2 - 24x + 9) =$$

$$= (x+1)(4x-3)^2 =$$

$$= (x+1)\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 16$$



$$x > -1, \text{ т.к. } x = \sin \frac{3\pi}{14} \Rightarrow \text{V} \Rightarrow$$

$$\text{то есть } 16x^2 - 8x^2 - 15x + 9 > 0 \text{ при}$$

$$x = \sin \frac{3\pi}{14}, \text{ а также и } 5 + 4 \sin \frac{3\pi}{14} >$$

$$> 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}$$

Ответ: больше или.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего пирамиды бывают двух видов: тетраэдры и кететраэдры. Посчитаем сначала тетраэдры.

Тетраэдр Для тетраэдра нужно четыре точки не лежащие в одной плоскости. По условию сказано, что если четыре точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость — α . Другими

словами, среди точек не лежащих в плоскости (все кроме точек лежащих в α) нет четвёрок лежащих в одной плоскости

То есть кол-во тетраэдров это: $C_8^3 \cdot C_4^1 + C_8^2 \cdot C_4^2 + C_8^1 \cdot C_4^3 + C_8^0 \cdot C_4^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 4 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 8 \cdot 4 + 1 =$

$$= 56 \cdot 4 + 56 \cdot 3 + 32 + 1 = 56 \cdot 7 + 33 = 425$$

(выбираем 3 из α , 1 извне; выбираем 2 из α , 2 извне; выбираем 1 из α 3 извне; выбираем 0 из α , 4 извне.)

Теперь посчитаем кол-во кететраэдров. У кететраэдра

все точки кроме одной лежат в одной плоскости. То есть вершиной кететраэдра не может быть точка в плоскости α .

Посчитаем число кететраэдров: $4(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8) = \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{120} + \frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1\right) \cdot 4 = 4(70 + 56) = 288 + 8 + 1 = 4 \cdot 163 = 652$

В сумме $652 + 425 = 1077$ пирамид.

Ответ: 1077 пирамид



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Искно равенство:

$$132 = (n-1) \cdot 2 + 132 - 2(n-2) + \dots + 132 = 180(n-2)$$

$$\frac{(132 - 2(n-1) + 132)n}{2} = 180(n-2)$$

$$264n - 2n(n-1) = 360n - 720$$

$$264n - 2n^2 = 360n - 720 \Rightarrow -2n^2 = 94n - 720$$

$$2n^2 + 94n - 720 = 0 \Rightarrow n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$D = 47^2 + 1440 = 2209 + 1440 = 3649$$

$\sqrt{D} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ корни уравнения получаются не целыми, т.к. квадратный корень не целый, а корень из отрицательного числа не имеет.

То есть максимальное возможное число вершин многоугольника — 9.

Ответ: 9.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

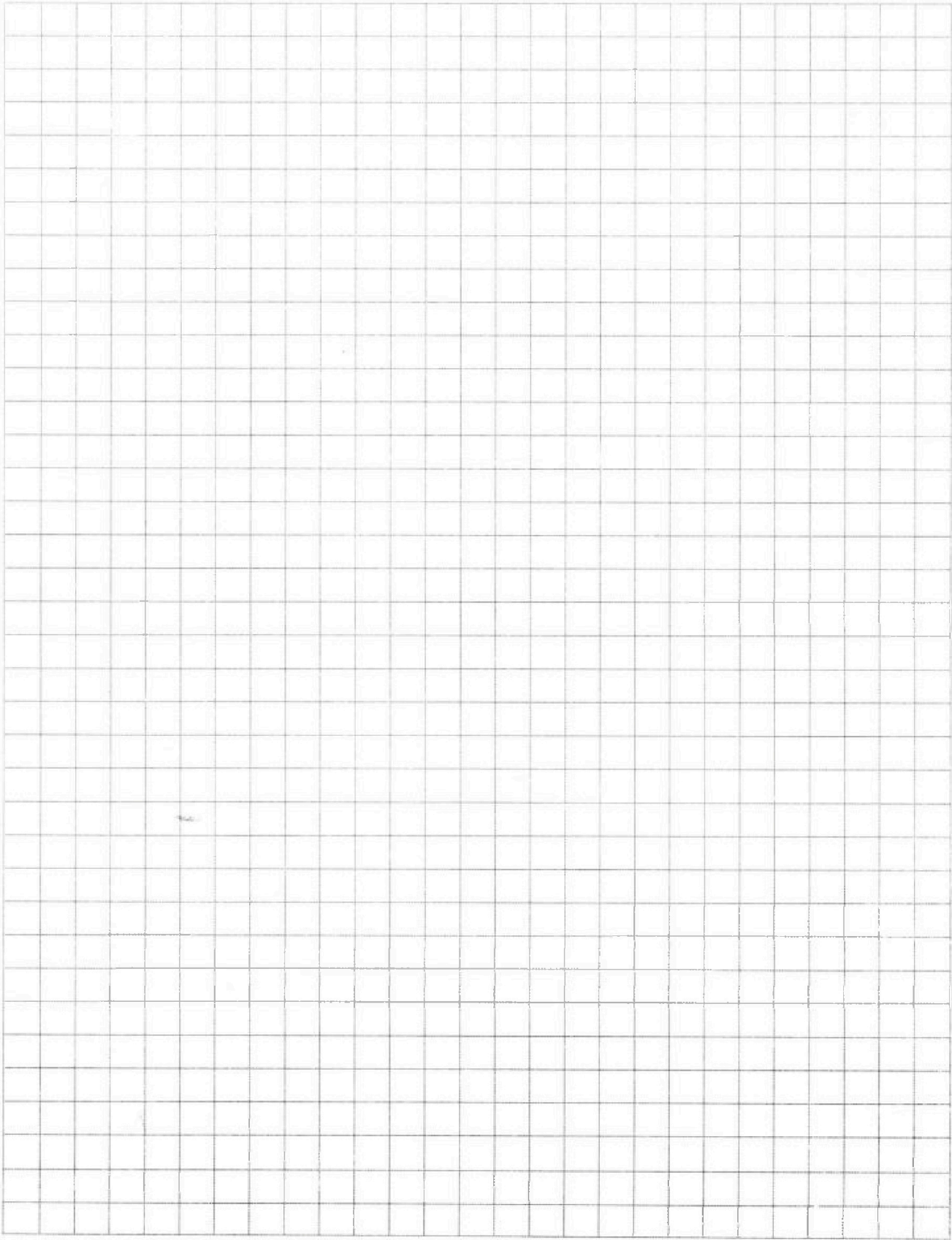
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

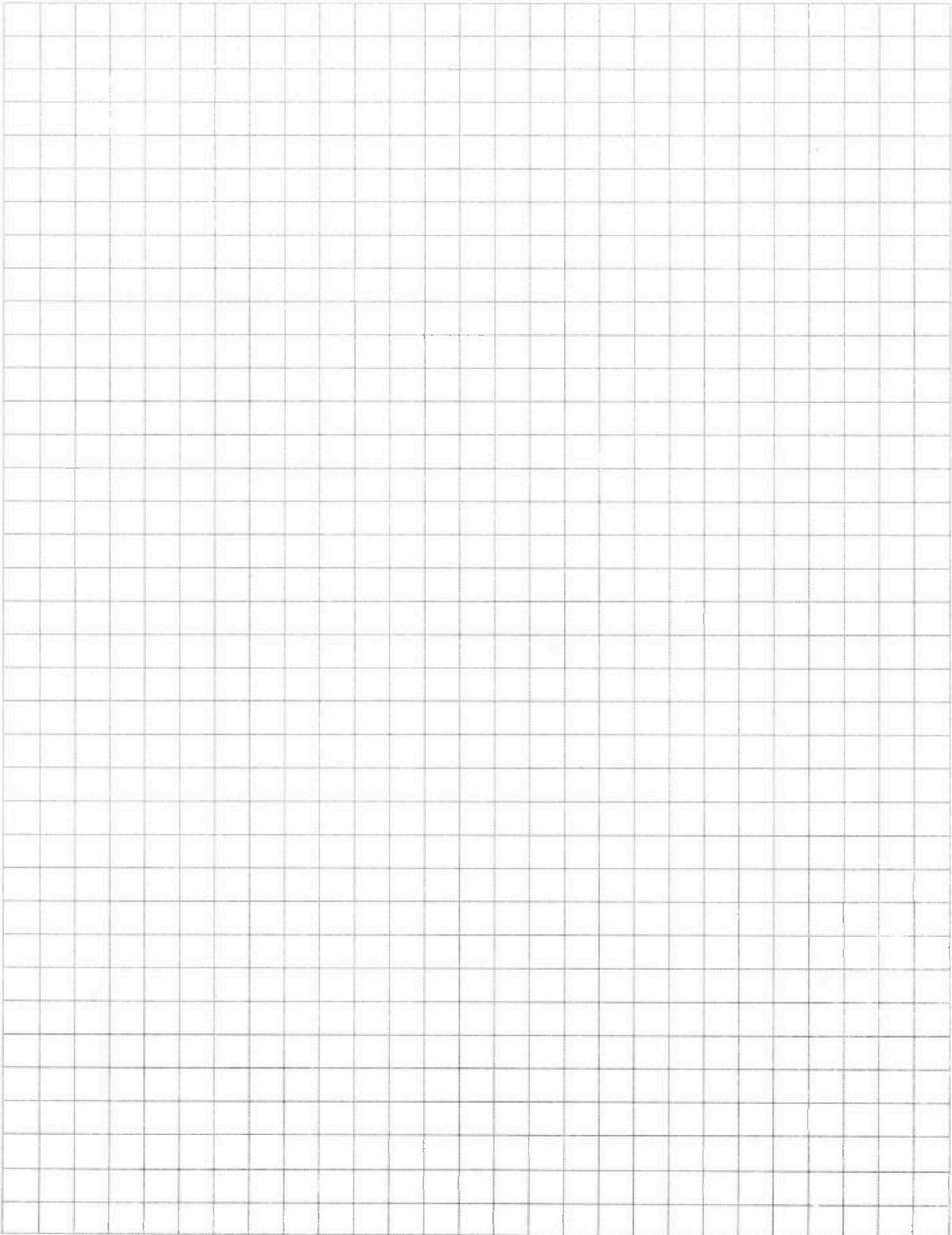
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos^2 \frac{3\pi}{14} + 9 \sin^2 \frac{3\pi}{14} =$$

$$= 3 \sin \frac{3\pi}{14} + 8 \sin^2 \frac{3\pi}{14} - 4$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin \frac{9\pi}{14} = \sin \frac{2\pi}{7}$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha + \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha$$

$$- 4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha =$$

$$= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha (\cos \alpha + 2 \cos \alpha) =$$

$$576 = 576 = 4, = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

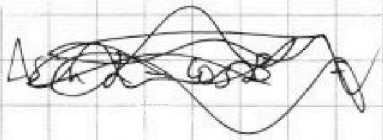


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$



$$\sin \alpha = \cos \beta =$$

$$\sin \alpha = \sin (90^\circ - \beta) =$$

$$\cos (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = -2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin (45^\circ - \alpha)$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \sin (45^\circ - \alpha)$$

$$5 - 4 \left(\sin \frac{9\pi}{14} - 4 \cos \frac{6\pi}{14} \right) =$$

$$\sin \frac{9\pi}{14} - \cos \frac{6\pi}{14}$$

$$\cos \frac{2\pi}{14} - \cos \frac{6\pi}{14} =$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{4\pi}{14} \cdot \sin \frac{2\pi}{14}$$

$$5 - 8 \cdot \sin \frac{4\pi}{14} \cdot \sin \frac{2\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos^2 \frac{3\pi}{14} + 4 \sin^2 \frac{3\pi}{14}$$

$$1 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 8 \cos^2 \frac{3\pi}{14}$$

$$1 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 8 \sin^2 \frac{3\pi}{14} + 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 8$$

$$1 - \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 8 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порука QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \vee \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cdot \cos y.$$

$$\begin{aligned} x+y &= \alpha \\ x-y &= \beta \end{aligned} \quad \vee \quad \begin{aligned} x &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ y &= \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cdot \cos y$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$5 = 4 \left(\sin \frac{9\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14} \right) = 5 - 8 \cdot \sin \frac{6\pi}{14} \cdot \cos \frac{3\pi}{14}$$

$$5 \vee 8 \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$1 \vee 8 \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{14} - 4 \cos^2 \frac{3\pi}{14} + 4 \sin^2 \frac{3\pi}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad \ln 5 = x \ln 3$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = ?$$

~~Еще одна~~

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 3} =$$

$$\ln 45 = x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \sqrt{\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125}$$

$$\ln^2 45 \leq (x^2 + y^2 + z^2) (\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125)$$

$$\frac{\ln^2 45}{\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125} \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad \frac{4 + x^2 - 4x}{17x^2 - 4x + 1}$$

$$\ln^2 45 = \ln^2 45$$

$$\ln^2 75 = \ln^2 75$$

$$\ln^2 25 = \ln^2 25$$

$$\ln^2 125 =$$

$$\ln^2 45 = \ln^2 (3^2 \cdot 5) =$$

\ln

$$\ln^2 75 = \ln^2 (3 \cdot 5^2)$$

$$\ln^2 25 = \ln^2 (5^2)$$

$$\ln^2 125 = \ln^2 (5^3)$$

$$\ln^2 (3^2 \cdot 5) =$$

$$= \ln(3^2 \cdot 5) \cdot \ln(3^2 \cdot 5) =$$

$$= (\ln(3^2) + \ln(5)) (\ln(3^2) + \ln(5)) =$$

$$= (2 \ln(3) + \ln(5))^2 =$$

$$= 4 \ln^2(3) + \ln^2(5) - 4 \ln(3) \cdot \ln(5)$$

$$\ln^2 75 = \ln^2 (3 \cdot 5^2) = (\ln(3) + 2 \ln(5))^2 =$$

$$= \ln^2(3) + 4 \ln^2(5) - 4 \ln(3) \ln(5)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А упрост. 1) $d = 2$ $132 + 134 + \dots + 132 + (n-1)2 = (n-2) \cdot 180$
 $n \leq 19$

$$\frac{(132 + (n-1)2 + 132) \cdot n}{2} = (n-2) \cdot 180$$

$$(132 + 2(n-1) + 132)n = 360(n-2)$$

$$132n + 2n(n-1) + 132n = 360n - 720$$

$$96n - 720 = 2n^2 - 2n$$

$$2n^2 - 98n + 720 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

$$n_1 = \frac{49 + 31}{2} = 40$$

$$n_2 = \frac{49 - 31}{2} = 9$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ \times 42 \\ \hline 329 \\ + 108 \\ \hline 1209 \end{array}$$

$$132 + (n-1)d \quad 132 - (n-1)d + \dots + 132$$

$$\frac{(132 - (n-1)d + 132)n}{2} = 180(n-2)$$

$$(132 - (n-1)2 + 132)n = 360n - 720$$

$$132n - 2n(n-1) + 132n - 264n - 2n^2 + 2n = 360n - 720$$

$$2n^2 - 94n - 720 = 0$$

$$n^2 - 47n - 360 = 0$$

$$D = 2209 + 1440 = 3649$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ + 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha - \cos \beta = ?$$

~~$$\sin \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$~~

~~$$\sin 60^\circ - \cos 30^\circ = 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$$~~

$$\sin \alpha - \cos \beta$$

$$4 \sin \frac{9\pi}{14} < 4 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \quad \frac{9\pi}{13,5}$$

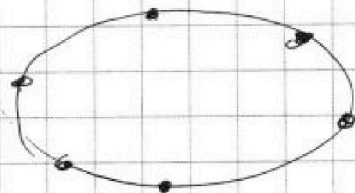
$$4 \sin \frac{9\pi}{14} > 4 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$3 \cdot \sin \frac{3\pi}{14} < 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$5 = 4 \sin \frac{9\pi}{14} \Rightarrow 5 = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} C_4^3 + C_4^2 + C_4^1 &= \\ &= 6 + 6 + 4 = \\ &= 16 \end{aligned}$$

р. 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

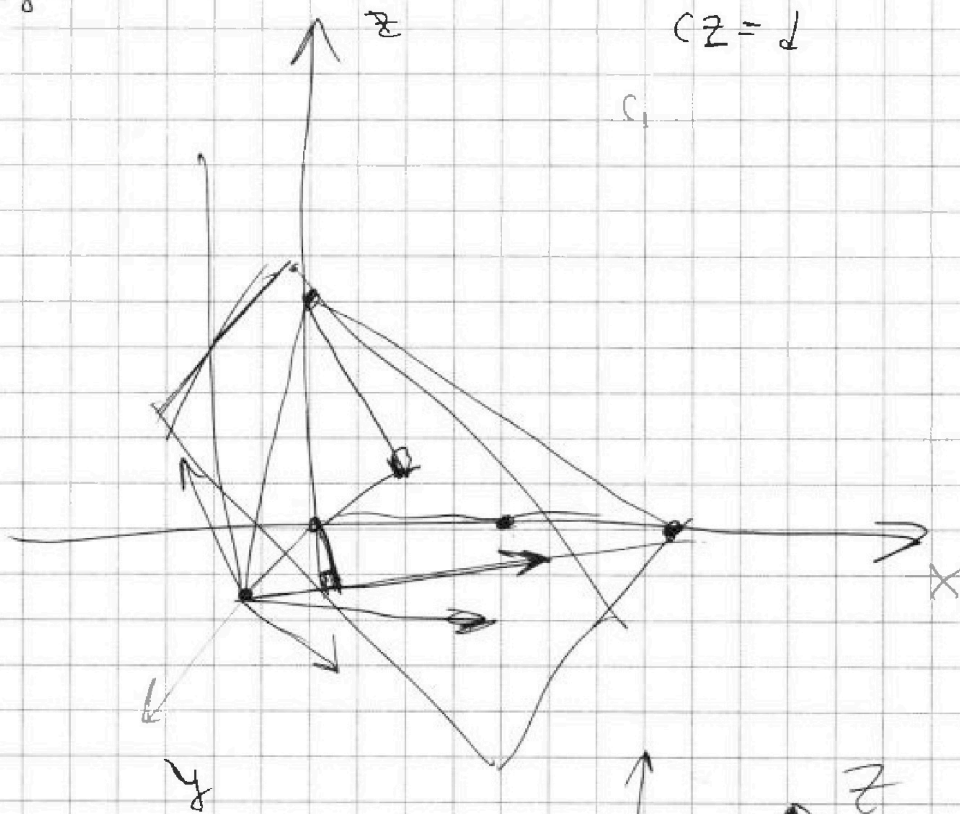
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + by + cz = d$$

$$ax + by =$$

$$cz = d$$



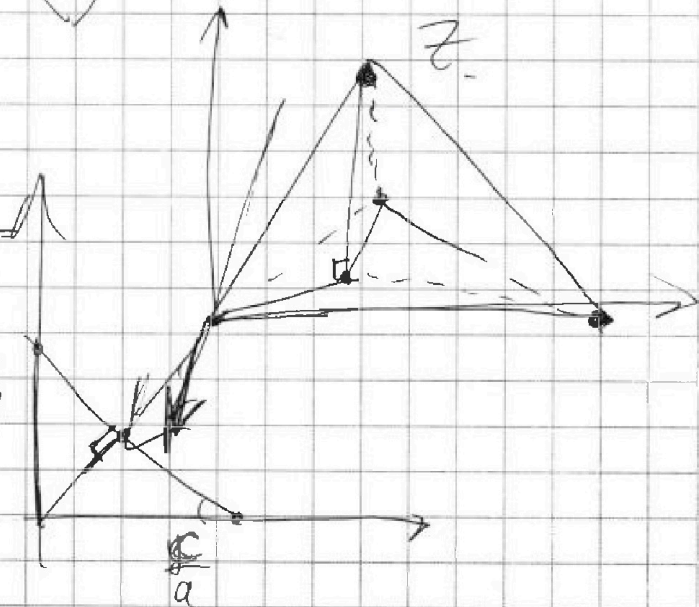
$$ax + by = c$$

$$\frac{c}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}}$$

$$= \frac{c^2}{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}} = \frac{c}{b}$$

$$= \frac{c^2}{ab} \cdot \frac{ab}{c \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\ln 75 = \ln(5^2 \cdot 3) = 2 \ln 5 + \ln 3$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$$

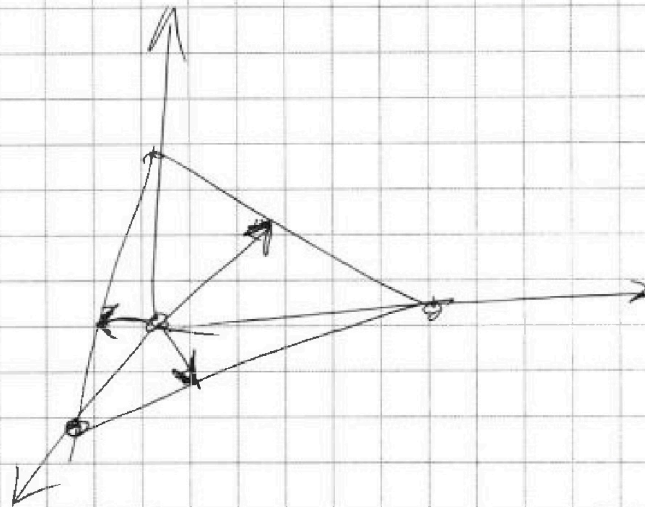
$$y \ln 75 + z \ln 125 = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} \ln 75 = \ln 45$$

$$\ln 45 - y \ln 75 - z \ln 125 = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} \ln 25$$

$$\ln^2 45 - 2 \ln 45 \cdot (y \ln 75 + z \ln 125) +$$

$$2 \ln 5 \cdot 2x \cdot \ln 5 + 3z \ln 5 + 2z \ln 5 + z \ln 3 =$$

$$= \ln 45$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

