



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $132^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 1080$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 8$ , а  $MZ \cdot MY = 9$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  или  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 4 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{2}$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у многоугольника  $n$  углов. Тогда есть два варианта:

1) арифметическая прогрессия возрастающая. Тогда у многоугольника углы  $132, 134, \dots, 132 + 2(n-1)$ . Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180 \cdot (n-2)$ . Получается равенство:

$$132 + 134 + \dots + 132 + 2(n-1) = 180(n-2)$$

$$\frac{(132 + 132 + 2(n-1))n}{2} = 180(n-2)$$

$$132n + 132n + 2n(n-1) = 360n - 720$$

$$2n^2 - 2n = 96n - 720$$

$$2n^2 - 98n + 720 = 0 \Rightarrow n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

$$n_1 = \frac{49 + 31}{2} = 40; \quad n_2 = \frac{49 - 31}{2} = 9$$

Однако, если  $n = 40$ , то самый большой угол многоугольника равен  $132 + 39 \cdot 2 = 210^\circ > 180^\circ$ , а значит, выпуклый многоугольник невыпуклый.

То есть в этом случае у многоугольника 9 вершин

2) арифметическая прогрессия убывающая. Тогда у многоугольника углы  $132 - 2(n-1), 132 - 2(n-2), \dots, 132$ . Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180(n-2)$ , поэтому имеет

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \times (n+1) \times 25 = 2 \times n \times 5$$

$$n, n+1, \dots, n+5$$

$$p^2 - q^2 = 1080 \quad n - \text{число}$$

$$p^2 - q^2 = 1080 \quad (p-q)(p+q) = 1080$$

$$1080 = 2 \cdot 540 = 4 \cdot 270 =$$

$$p-q = 2$$

$$p+q \leq 6$$

$$= 8 \cdot 135 =$$

$$p+q = 540$$

$$= 8 \cdot 27 \cdot 5 =$$

$$p = 271$$

$$q = 269$$

$$40, 41, 42, 43, 44, 45, 46$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49$$

$$42, 43, 44, 45, 47, 48$$

$$21, 22, 23, 24, 25, 26, 27$$

$$20, 21, 22, 23, 24, 25, 26$$

$$19, 20, 21, 22, 23, 24, 25$$

$$17. \text{M} \cdot \text{M} = 9$$

$$2x^2 = 2x$$

$$2x = \sqrt{18}$$

$$2x = \frac{16}{3}$$

$$r_1 = 2x^2 - 2x =$$

$$= \frac{256}{9} - 18$$

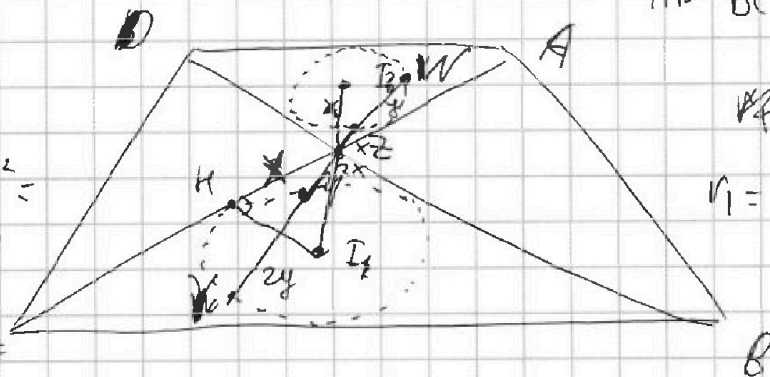
$$= \frac{256 - 162}{9} =$$

$$= \frac{94}{9}$$

$$AD:BC = 1:2$$

$$r_1 = 1, r_2 = 8$$

$$r_1 = ?$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \text{ в } 25 + y \text{ в } 75 + z \text{ в } 125 = \text{ в } 45$$

$$\text{Ийти: } \min(x^2 + y^2 + z^2) = ?$$

$x^2 + y^2 + z^2$  - это квадрат расстояния от точки  $(0; 0; 0)$ , до

точки с координатами  $(x; y; z)$ . При этом точка  $(x; y; z)$  лежит

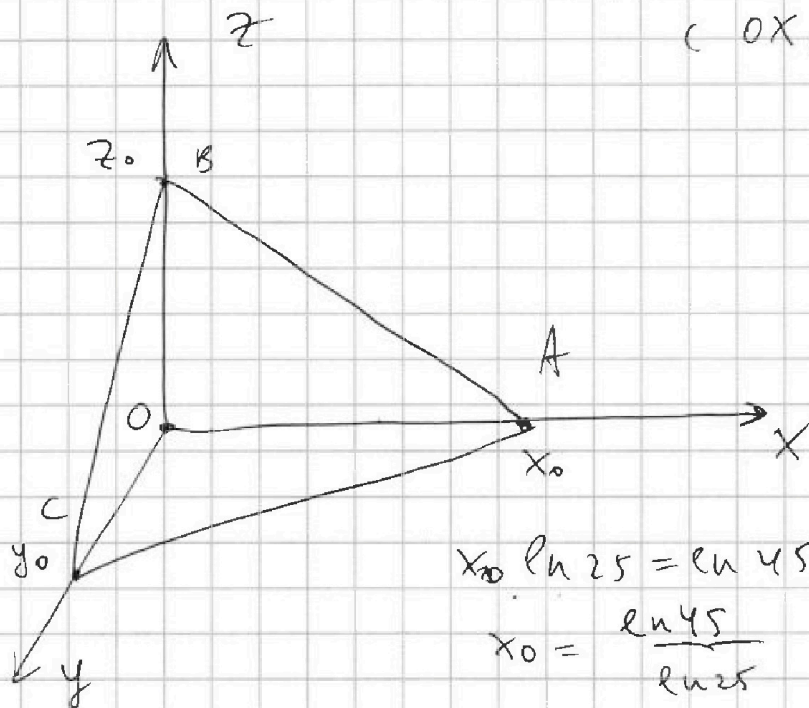
в плоскости заданной уравнением  $x \text{ в } 25 + y \text{ в } 75 + z \text{ в } 125 = \text{ в } 45$

То есть задача свелась к нахождению расстояния от точки

$(0; 0; 0)$  до заданной плоскости, т.к. тогда  $x^2 + y^2 + z^2$  будет ми-

нимальным.

Найдем  $x_0, y_0, z_0$  (пересечения плоскости  $(OX, OY, OZ)$ ).



$$x_0 \text{ в } 25 = \text{ в } 45$$

$$x_0 = \frac{\text{ в } 45}{\text{ в } 25}$$

$$y_0 \text{ в } 75 = \text{ в } 45$$

$$y_0 = \frac{\text{ в } 45}{\text{ в } 75}$$

$$z_0 \text{ в } 125 = \text{ в } 45$$

$$z_0 = \frac{\text{ в } 45}{\text{ в } 125}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем объём тетраэдра  $OABC$ :

$$V_{OABC} = \left(0 \cdot S_{OBA} \cdot \frac{1}{3}\right) \quad (O = \frac{\ln 45}{\ln 25} = y_0)$$

$$S_{OBA} = \frac{1}{2} OB \cdot OA = \frac{1}{2} x_0 z_0 \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{3} y_0 \cdot \frac{1}{2} x_0 z_0 = \frac{1}{6} x_0 z_0 y_0$$

А с другой стороны:

$V_{OABC} = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC}$ , где  $h$  - расстояние от  $O$  до  $ABC$  (то же можно найти).  $S_{ABC}$  найдем по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{p-a)(p-b)(p-c)} \quad (b = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} = \frac{1}{2} \ln 45, \quad AB = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} = c, \quad = b)$$

$$AC = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = a$$

$$\frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} x_0 y_0 z_0 \Rightarrow h = \frac{x_0 y_0 z_0}{2 S_{ABC}}$$

$$h^2 = (x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = \frac{x_0^2 y_0^2 z_0^2}{2 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$x_0 = p = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{y_0^2 + z_0^2} + \sqrt{x_0^2 + z_0^2}}{2}$$

~~$$\min (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2} \cdot \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2} \cdot \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2} \cdot \frac{1}{(\ln 25)^2}$$~~

Ответ:

$$\min (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{2p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p =$$

$$x_0 = \frac{\ln 45}{\ln 25}, \quad y_0 = \frac{\ln 45}{\ln 25}, \quad z_0 = \frac{\ln 45}{\ln 125}, \quad p =$$

$$= \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{y_0^2 + z_0^2} + \sqrt{x_0^2 + z_0^2}}{2}, \quad a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad b = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}, \quad c = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть числа в множестве  $n, n+1, n+2, \dots, n+6$ .

$$p^2 - q^2 = 1080 \Rightarrow (p-q)(p+q) = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

Поймём, что, на самом деле,  $p$  и  $q$  — это просто  $S-x$ , где  $S$  — сумма чисел в  $M$ ,  $x$  — число, не участвующее в шестёрке. Поэтому  $p-q$  не может быть больше, т.к. числа в  $M$  отличаются не больше чем на 6.

$p$  и  $q$  достаточно большие числа, поэтому  $p-q \neq 1$ , т.к. иначе  $q=2$ , что, по-любому, не может быть.

1)  $p-q=2$ ,  $p+q=540$ .  $\Rightarrow 2p=542$ ,  $p=271$ ,  $q=269$ . — оба простые числа. Найдём возможные значения  $n$ . При  $n=41$ , наименьшая возможная сумма в шестёрке равна  $42+43+\dots+47 =$

$$= 89 \cdot 3 = 267 < 269. \text{ При } n=43, \text{ наименьшая возможная сумма равна } 43+44+\dots+48 = 273 > 271. \text{ Поэтому эти}$$

$n$  не подходит и другие большие меньшим и большие соответственно не подходят. А  $n=42$  подходит. Тогда числа в  $M$  —

$M: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48$ . А шестёрки, в которых сумма  $p$  и  $q$  это  $(42; 43; 45; 46; 47; 48)$  и  $(42; 43; 44; 45; 47; 48)$ .

Аналогично рассмотрим другие случаи:

2)  $p-q=3$ , не может быть, т.к. тогда  $q=2$ , что не может быть.

3)  $p-q=4$ ,  $p+q=270$ .  $\Rightarrow 2p=274$ ,  $p=137$ ,  $q=133$  — простые числа. Найдём  $n$ . При  $n=19$  наименьшая возможная сумма в



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

шестерке  $20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 135 < 137 < p$ .

при  $n = 20$ , минимальная сумма в шестерке  $20 + 21 + \dots +$

$+ 25 = 135 \geq q$ . То есть  $n = 19$  и  $n = 20$  не подходят

и больше и меньше  $n$  в этом смысле не подойдут.

4)  $p - q = 5$ , не подходит, т.к. тогда  $q = 2$ , число не может быть

5)  $p - q = 5$ ,  $p + q = 180 \rightarrow 2p = 185 \Rightarrow p = 92,5, q = 87,5$ .

$87,5 : 3$  поэтому этот случай не подходит.

Получается, что единственной возможной суммой это  $n = 42$ ,

и  $M$  тогда это:  $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:  $ABCD$  - трапеция  $D$

$$I_1 I_2 = 8$$

$$M Z \cdot M Y = 9$$

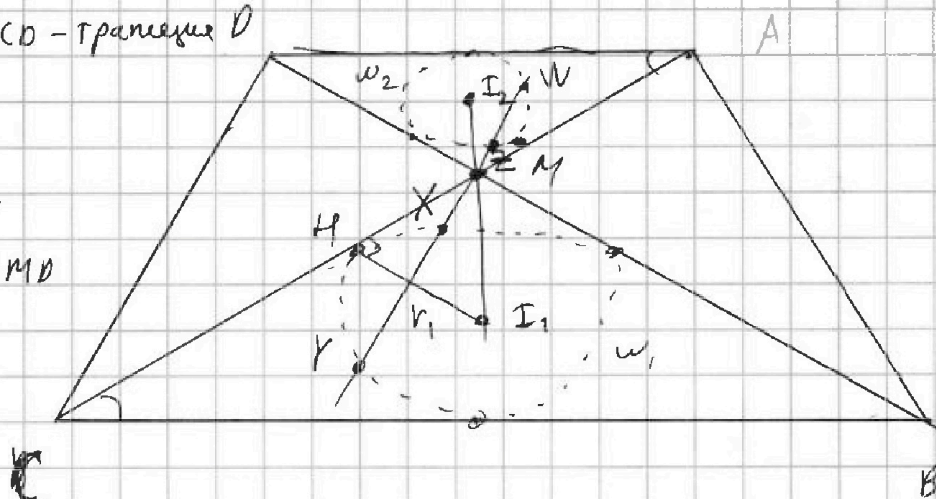
$\omega_1$  - впис. в  $\triangle BMC$

$\omega_2$  - впис. в  $\triangle AMD$

$$AD : BC = 1 : 2$$

Найти:

$$r_1 = ?$$



Решение:

$\triangle AMD \sim \triangle CMB$  т.к.  $\angle AMD = \angle CMB$  - как вертикальные, а  $\angle MAD = \angle MCB$  - как соответственные при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AC$  (т.к.  $ABCD$  - трапеция) (по двум углам).

$$k = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$M$  лежит на  $I_1 I_2$ , т.к.  $I_1$  лежит на бисс. угла  $CMB$ , а  $I_2$  лежит на бисс. угла  $AMD$ , а они совпадают, так как углы вертикальные. Т.к.  $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ ,  $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} = k$ . По той же причине  $r_1, r_2$  - радиусы вписанных окр. в  $\triangle CMB$  и  $\triangle AMD$  соответственно. По той же причине  $\frac{I_2 M}{I_1 M} = \frac{1}{2} = k$ .

~~$\triangle MI_2 Z$  и  $\triangle MI_1 X$  -  $\angle XMI_1 = \angle ZMI_2$  - как вертикальные.~~ Соединим радиусы в точке  $M$  с центрами окружностей

- 2. При кеп  $I_2 \rightarrow I_1, A \rightarrow C, D \rightarrow B, Z \rightarrow X$ .

Поэтому  $XM = \cancel{2M Z} 2M Z$

$MN$  - касательная к  $\omega_1$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $MN^2 = MX \cdot MY = 2MZ \cdot MY = 18$  - свойство кас. ч. окружностей.

$I_1 K \perp MN$ , т.к. это радиус в точку касания.

$$I_1 M = 2 I_2 M, \quad I_1 M + I_2 M = I_1 I_2 = 8$$

$$\Rightarrow \cancel{I_1 M} = 3 I_2 M = 8 \quad I_2 M = \frac{8}{3}, \quad I_1 M = \frac{16}{3}$$

$$I_1 K^2 = r_1^2 = I_1 M^2 - \cancel{I_2 M}^2 MN^2 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{256 - 162}{9} =$$

$$= \frac{94}{9} \quad \text{из т. Пифагора.}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

ответ:  $\frac{\sqrt{94}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \text{ V}; \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}$$

$$\sqrt{4 \sin^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2} \quad \cancel{3 \sin \frac{3\pi}{14}} \quad L = \frac{3\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin 3L \text{ V} \quad 3 \sin L - 4 \cos 2L$$

$$5 + 16 \sin^3 L - 12 \sin L \text{ V} \quad 3 \sin L - 4 \cos^2 L + 4 \sin^2 L$$

$$\cancel{5} + 16 \sin^3 L - 15 \sin L \text{ V} - 4 + 4 \sin^2 L + 4 \sin^2 L$$

$$9 + 16 \sin^3 L - 15 \sin L \text{ V} \quad 8 \sin^2 L$$

$$16 \sin^3 L - 8 \sin^2 L - 15 \sin L + 9 \text{ V} = 0$$

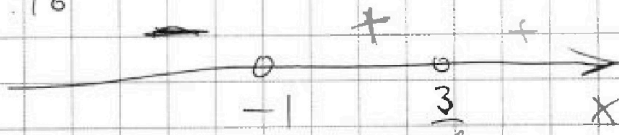
$$\sin L = x$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0$$

$$x = -1 \text{ корень}$$

$$\begin{array}{r|l} 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 & x + 1 \\ \underline{16x^3 + 16x^2} & \\ -24x^2 - 15x & \\ \underline{-24x^2 - 24x} & \\ 9x + 9 & \\ \underline{-9x - 9} & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 16x^2 - 24x + 9 \\ 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = \\ = (x+1)(16x^2 - 24x + 9) = \\ = (x+1)(4x-3)^2 = \end{array}$$

$$= (x+1)\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 16$$



$$x > -1, \text{ т.к. } x = \sin \frac{3\pi}{14} \Rightarrow V = >$$

$$\text{то есть } 16x^2 - 8x^2 - 15x + 9 > 0 \text{ при}$$

$$x = \sin \frac{3\pi}{14}, \text{ а также и } 5 + 4 \sin \frac{3\pi}{14} >$$

$$> 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}$$

Ответ: больше или

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего пирамиды бывают двух видов: тетраэдры и кететраэдры. Посчитаем сначала тетраэдры.

Тетраэдр Для тетраэдра нужно четыре точки не лежащие в одной плоскости. По условию сказано, что если четыре точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость —  $\alpha$ . Другими

словами, среди точек не лежащих в плоскости (все кроме точек лежащих в  $\alpha$ ) нет четвёрок лежащих в одной плоскости

То есть кол-во тетраэдров это:  $C_8^3 \cdot C_4^1 + C_8^2 \cdot C_4^2 + C_8^1 \cdot C_4^3 + C_8^0 \cdot C_4^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 4 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 8 \cdot 4 + 1 =$

$$= 56 \cdot 4 + 56 \cdot 3 + 32 + 1 = 56 \cdot 7 + 33 = 425$$

(выбираем 3 из  $\alpha$ , 1 извне; выбираем 2 из  $\alpha$ , 2 извне; выбираем 1 из  $\alpha$  3 извне; выбираем 0 из  $\alpha$ , 4 извне.)

Теперь посчитаем кол-во кететраэдров. У кететраэдра

все точки кроме одной лежат в одной плоскости. То есть вершиной кететраэдра не может быть точка в плоскости  $\alpha$ .

Посчитаем число кететраэдров:  $4(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8) = \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{120} + \frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1\right) \cdot 4 = 4(70 + 56) = 288 + 8 + 1 = 4 \cdot 163 = 652$

В сумме  $652 + 425 = 1077$  пирамид.

Ответ: 1077 пирамид



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Искать равенство:

$$132 = (n-1) \cdot 2 + 132 - 2(n-2) + \dots + 132 = 180(n-2)$$

$$\frac{(132 - 2(n-1) + 132)n}{2} = 180(n-2)$$

$$264n - 2n(n-1) = 360n - 720$$

$$264n - 2n^2 = 360n - 720 \Rightarrow -2n^2 = 94n - 720$$

$$2n^2 + 94n - 720 = 0 \Rightarrow n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$D = 47^2 + 1440 = 2209 + 1440 = 3649$$

$\sqrt{D} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$  корни уравнения получаются не целыми, т.к. квадратный корень не целый, а корень из отрицательного числа не имеет.

То есть максимальное возможное число вершин многоугольника — 9.

Ответ: 9.

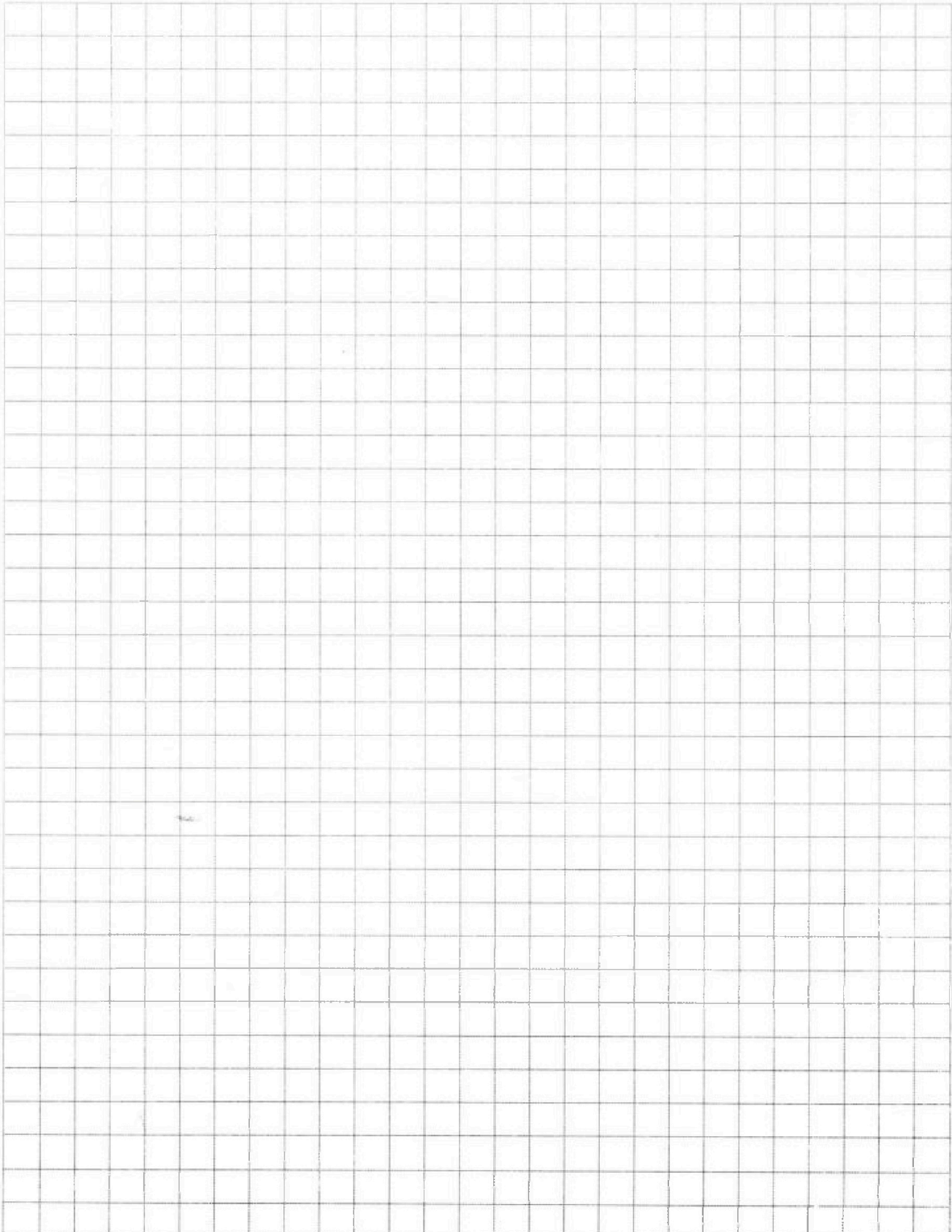


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

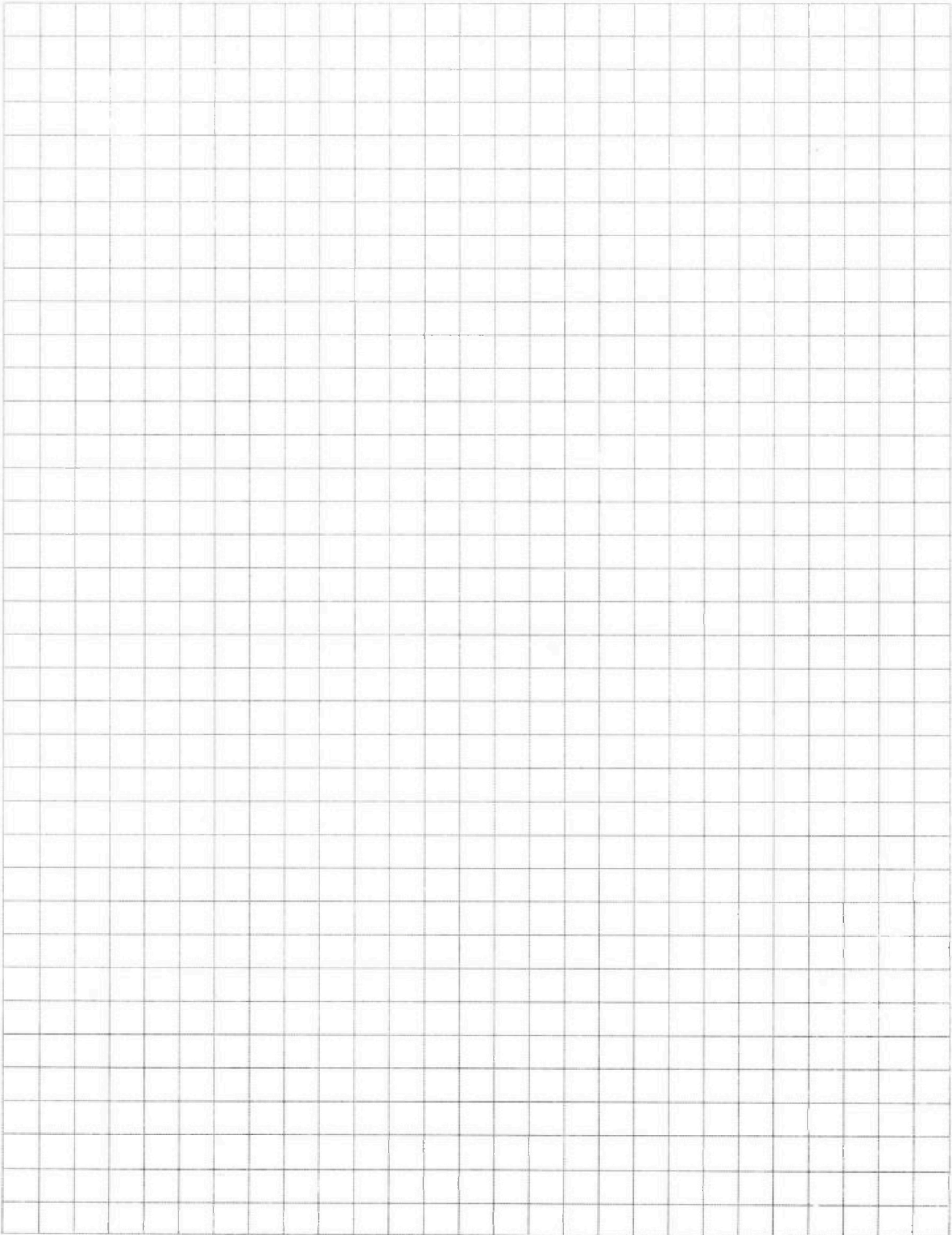
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos^2 \frac{3\pi}{14} + 9 \sin^2 \frac{3\pi}{14} =$$

$$= 3 \sin \frac{3\pi}{14} + 8 \sin^2 \frac{3\pi}{14} - 4$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin \frac{9\pi}{14} = \sin \frac{2\pi}{7}$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha (2 \sin \alpha + \cos \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$= 4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha =$$

$$= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha (\cos \alpha + 2 \cos \alpha) =$$

$$= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$



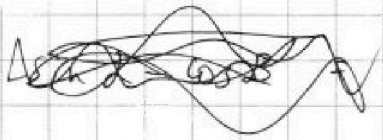
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$



$$\sin \alpha = \cos \beta =$$

$$\sin \alpha = \sin (90^\circ - \beta) =$$

$$\cos (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = -2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin (45^\circ - \alpha)$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \sin (45^\circ - \alpha)$$

$$5 - 4 \left( \sin \frac{9\pi}{14} - 4 \cos \frac{6\pi}{14} \right) =$$

$$\sin \frac{9\pi}{14} - \cos \frac{6\pi}{14}$$

$$\cos \frac{2\pi}{14} - \cos \frac{6\pi}{14} =$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{4\pi}{14} \cdot \sin \frac{2\pi}{14}$$

$$5 - 8 \cdot \sin \frac{4\pi}{14} \cdot \sin \frac{2\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos^2 \frac{3\pi}{14} + 4 \sin^2 \frac{3\pi}{14}$$

$$1 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 8 \cos^2 \frac{3\pi}{14}$$

$$1 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark 8 \sin^2 \frac{3\pi}{14} + 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 8$$

$$1 - \sin \frac{9\pi}{14} \checkmark \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 8 \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порука QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \vee \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cdot \cos y.$$

$$\begin{aligned} x+y &= \alpha \\ x-y &= \beta \end{aligned} \quad \vee \quad \begin{aligned} x &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ y &= \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cdot \cos y$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$5 = 4 \left( \sin \frac{9\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14} \right) = 5 - 8 \cdot \sin \frac{6\pi}{14} \cdot \cos \frac{3\pi}{14}$$

$$5 \vee 8 \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$1 \vee 8 \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{14} - 4 \cos^2 \frac{3\pi}{14} + 4 \sin^2 \frac{3\pi}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad \ln 5 = x \ln 3$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = ?$$

~~Еще одна~~

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 3} =$$

$$\ln 45 = x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \sqrt{\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125}$$

$$\ln^2 45 \leq (x^2 + y^2 + z^2) (\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125)$$

$$\frac{\ln^2 45}{\ln^2 75 + \dots} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{4 + x^2 - 4x}{17x^2 - 4x + 1}$$

$$\ln^2 45 = \ln^2 45$$

$$\ln^2 75 = \ln^2 75$$

$$\ln^2 25 = \ln^2 25$$

$$\ln^2 125 =$$

$$\ln^2 45 = \ln^2 (3^2 \cdot 5) =$$

$\ln$

$$\ln^2 75 = \ln^2 (3 \cdot 5^2)$$

$$\ln^2 25 = \ln^2 (5^2)$$

$$\ln^2 125 = \ln^2 (5^3)$$

$$\ln^2 (3^2 \cdot 5) =$$

$$= \ln(3^2 \cdot 5) \cdot \ln(3^2 \cdot 5) =$$

$$= (\ln(3^2) + \ln(5)) (\ln(3^2) + \ln(5))$$

$$= (2 \ln(3) + \ln(5))^2 =$$

$$= 4 \ln^2(3) + \ln^2(5) - 4 \ln(3) \cdot \ln(5)$$

$$\ln^2 75 = \ln^2 (3 \cdot 5^2) = (\ln(3) + 2 \ln(5))^2 =$$

$$= \ln^2(3) + 4 \ln^2(5) - 4 \ln(3) \ln(5)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А упрост. 1)  $d = 2$   $132 + 134 + \dots + 132 + (n-1)2 = (n-2) \cdot 180$   
 $n \leq 19$

$$\frac{(132 + (n-1)2 + 132) \cdot n}{2} = (n-2) \cdot 180$$

$$(132 + 2(n-1) + 132)n = 360(n-2)$$

$$132n + 2n(n-1) + 132n = 360n - 720$$

$$96n - 720 = 2n^2 - 2n$$

$$2n^2 - 98n + 720 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

$$n_1 = \frac{49 + 31}{2} = 40$$

$$n_2 = \frac{49 - 31}{2} = 9$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ \times 42 \\ \hline 329 \\ + 108 \\ \hline 1209 \end{array}$$

$$132 + (n-1)d \quad 132 - (n-1)d + \dots + 132$$

$$\frac{(132 - (n-1)d + 132)n}{2} = 180(n-2)$$

$$(132 - (n-1)2 + 132)n = 360n - 720$$

$$132n - 2n(n-1) + 132n = 360n - 720$$

$$2n^2 - 94n - 720 = 0$$

$$n^2 - 47n - 360 = 0$$

$$D = 2209 + 1440 = 3649$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ + 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha - \cos \beta = ?$$

~~$$\sin \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$~~

~~$$\sin 60^\circ - \cos 30^\circ = 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$$~~

$$\sin \alpha - \cos \beta$$

$$4 \sin \frac{9\pi}{14} < 4 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \quad \frac{9\pi}{13,5}$$

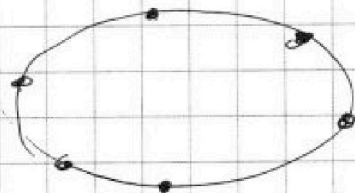
$$4 \sin \frac{9\pi}{14} > 4 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$3 \cdot \sin \frac{3\pi}{14} < 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$5 = 4 \sin \frac{9\pi}{14} \Rightarrow 5 = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} C_4^3 + C_4^2 + C_4^1 &= \\ &= 6 + 6 + 4 = \\ &= 16 \end{aligned}$$

р. 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

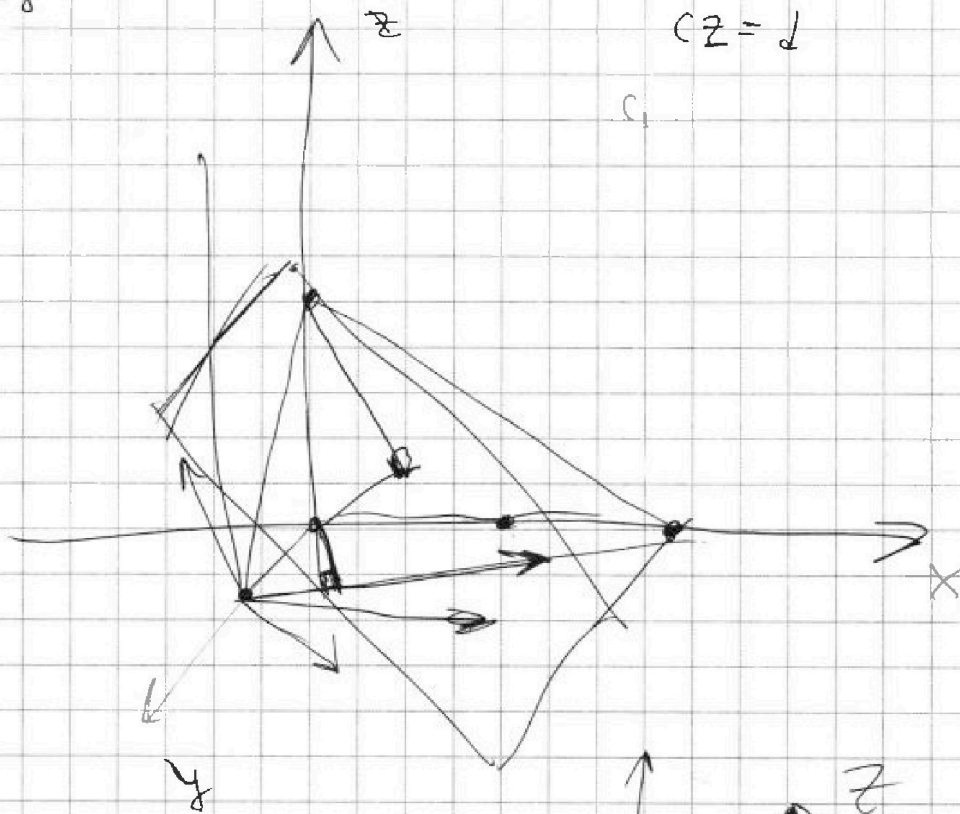
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + by + cz = d$$

$$ax + by =$$

$$cz = d$$

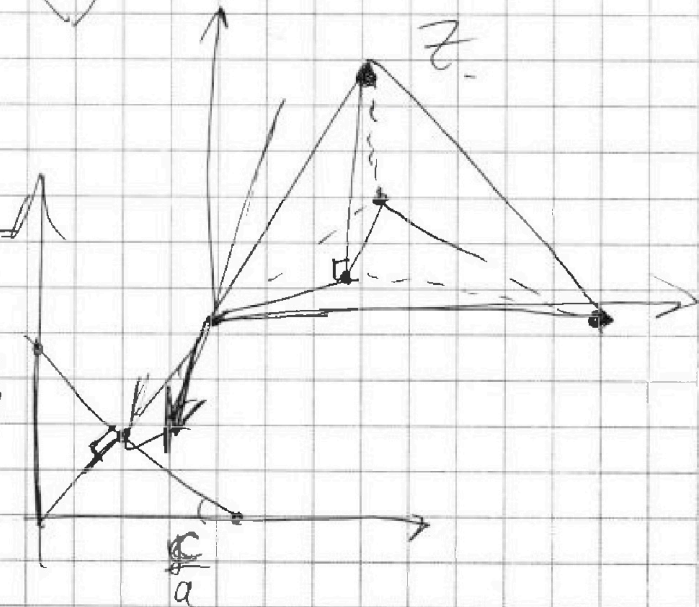


$$ax + by = c$$

$$\frac{c}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}}$$

$$= \frac{c^2}{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}} = \frac{c}{b}$$

$$= \frac{c^2}{ab} \cdot \frac{ab}{c \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\ln 75 = \ln(5^2 \cdot 3) = 2 \ln 5 + \ln 3.$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$$

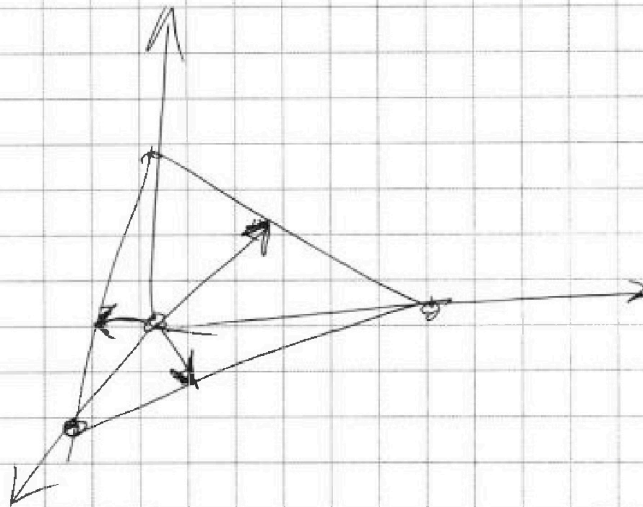
$$y \ln 75 + z \ln 125 + \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} \ln 25 = \ln 45$$

$$\ln 45 - y \ln 75 - z \ln 125 = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} \ln 25$$

$$\ln^2 45 - 2 \ln 45 \cdot (y \ln 75 + z \ln 125) +$$

$$2 \ln 5 \cdot 2x \cdot \ln 5 + 3z \ln 5 + 2z \ln 5 + z \ln 3 =$$

$$= \ln 45$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

