



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Предположим, что у ~~многоугольника~~ ~~у~~ ~~него~~ ~~удовлетворяющего~~ условия равно t вершин, тогда у него t углов, обозначим его угла через d_1, d_2, \dots, d_t , при этом положим $d_1 < d_2 < \dots < d_t$, тогда по условию $d_1 = 132^\circ$, $d_i = d_{i+1} + 2^\circ$, где $i \in \{2, 3, \dots, t-1\}$, тогда с одной стороны $d_1 + \dots + d_t = 132^\circ + 134^\circ + \dots + 132^\circ + 2^\circ(t-1) =$

$$= \frac{(132^\circ + 132^\circ + 2^\circ(t-1))t}{2} = \frac{(264^\circ + 2t - 2^\circ)t}{2} = (131^\circ + t)t = t^2 + 131t$$

с другой стороны по известной св-ву сумма всех углов у выпуклого t -угольника равна $180^\circ(t-2)$, тогда

$$t^2 + 131t = 180(t-2); \quad t^2 + 131t = 180t - 360; \quad t^2 - 49t + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = (50-1)^2 - 4 \cdot 360 = 2500 - 100 + 1 - 1440 = 2401 - 1440 =$$

$$= 961 = 31^2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{49+31}{2} = 40 \\ t_2 = \frac{49-31}{2} = 9 \end{cases}$$

Предположим, что $t=40$, рассмотрим наибольший угол выпуклого многоугольника: $d_t = 132^\circ + 2^\circ(t-1) = 132^\circ + 2^\circ \cdot 39 = 132^\circ + 78^\circ = 210^\circ > 180^\circ$

\Rightarrow многоугольник невыпуклый - противоречие условию $\Rightarrow t \neq 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=9$, тогда несложно проверить, что многоугольник с углами

$132^\circ, 134^\circ, \dots, 148^\circ$ существует и удовлетворяет условию

Ответ: 9



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad x \cdot \ln(25) + y \cdot \ln(75) + z \cdot \ln(125) = \ln(45), \text{ при этом } x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$x \cdot \ln(5^2) + y \cdot \ln(3 \cdot 5^2) + z \cdot \ln(5^3) = \ln(3^2 \cdot 5)$$

$$2x \cdot \ln(5) + y(2\ln(5) + \ln(3)) + 3z \cdot \ln(5) = 2\ln(3) + \ln(5)$$

$$|\ln(5)| \cdot (2x + 2y + 3z - 1) + |\ln(3)| \cdot (y - 2) = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\ln(3)}$$

$$\frac{|\ln(5)|}{|\ln(3)|} \cdot (2x + 2y + 3z - 1) + (y - 2) = 0$$

$$\log_3(5) \cdot (2x + 2y + 3z - 1) + y - 2 = 0$$

5 не делится на целую степень тройки $\Rightarrow \log_3(5) \notin \mathbb{Z}$, но

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z - 1 \in \mathbb{Z} \\ \log_3(5) \cdot (2x + 2y + 3z - 1) = -y + 2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 2x + 2y + 3z - 1 = 0, \text{ но}$$

$$\text{тогда и } y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2x + 2y + 3z - 1 = 2x + 3z + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 3z = -3, \text{ заметим, что } x \text{ и } z \text{ не могут быть одновременно}$$

$$\text{равны 0} \Rightarrow \text{хотя бы одно из них не меньше } 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| + |z| \geq 1 \Rightarrow \cancel{x^2 + z^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 + 2^2 = 5 -$$

оценка, нетрудно видеть, что оценка достигается при

$$x = 0; z = -1; y = 2, \text{ действительно: } 0 \cdot \ln(25) + 2 \cdot \ln(75) - \ln(125) =$$

$$= 2 \cdot \ln(3 \cdot 5^2) - \ln(5^3) = 4\ln(5) + 2\ln(3) - 3\ln(5) = \ln(5) + 2\ln(3) = \ln(45)$$

Ответ: 5

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ Положим $M = \{a-3; a-2; a-1; a; a+1; a+2; a+3\}$, где $a \geq 4, a \in \mathbb{N}$,

кол-во способов выбрать 6 элементов из M равно $C_7^6 = \frac{7!}{6!1!} =$

$= 7$, также можно отметить, что это тоже число, что и

кол-во способов не выбрать 1 элемент из M . Сумма чисел

множества M равна $7a$. \square А-множество сумм всевозможных

6-ти элементных подмножеств M , тогда $|A| = 7$;

$A = \{7a - (a-3); 7a - (a-2); \dots; 7a - (a+3)\} = \{6a+3; 6a+2; 6a+1; 6a; 6a-1; 6a-2; 6a-3\}$

Непрудно видеть, что числа $6a+3 = 3(2a+1)$; $6a+2 = 2(3a+1)$;

$6a = 2 \cdot 3a$; $6a-2 = 2(3a-1)$; $6a-3 = 3(2a-1)$ не могут быть простыми,

так как $a \geq 4, a \in \mathbb{N}$, но очевидно в A находится хотя бы 2

простых числа (p и q) \Rightarrow это числа $6a+1$ и $6a-1$, причем

$p = 6a+1, q = 6a-1$, т.к. $p > q$ (иначе разность $p^2 - q^2$ была бы ~~не~~

не больше нуля), тогда $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = (6a+1 - (6a-1))(6a-1 + 6a+1) =$

$= 2 \cdot 12a = 24a = 1080 \Rightarrow a = \frac{1080}{24} = \frac{540}{12} = \frac{270}{6} = \frac{135}{3} = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

Ответ: $\{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

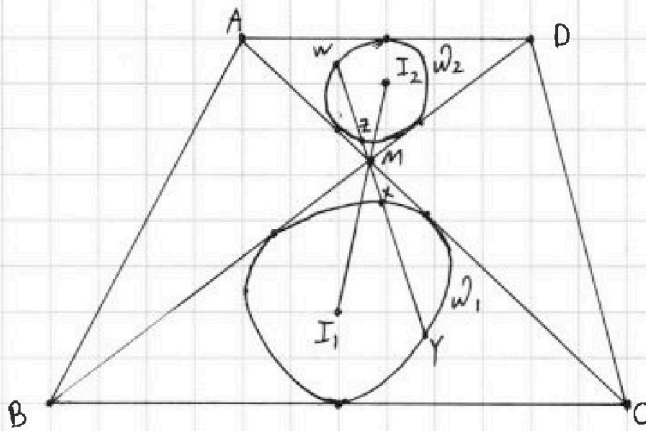


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



Дано: $ABCD$ -трапеция, $AD \parallel BC$,
 $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$; I_1, I_2 -центры окр., впис. в
 $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$, $I_1 I_2 = 8$; $MZ \cdot MY = 9$
 Найти: радиус ω_1 - ?

Решение:

1) r_1, r_2 -радиусы ω_1 и ω_2 соответственно

2) $BC \parallel AD \Rightarrow \begin{cases} \angle MBC = \angle MDA \\ \angle MCB = \angle MAD \end{cases} \Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle AMD, k = \frac{BC}{AD} = 2$, где k -коэф.
 подобия $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$

3) Рассмотрим гомотетию с центром в точке M и коэффициентом

-2 , тогда из пункта (2) следует, что A перейдет в C , D перейдет в B

$\Rightarrow \triangle MAD$ перейдет в $\triangle MCB$, но тогда и ω_2 перейдет в ω_1 , так

как ω_2 и ω_1 заданы тремя точками касания с соответствующими

треугольниками; $Z \rightarrow Z', W \rightarrow W'$, при этом $Z' \in MY$ и $W' \in MY$,

Z' и $W' \in \omega_1$, т.к. Z и $W \in \omega_2$ и $\omega_2 \rightarrow \omega_1$, но поскольку прямая

может иметь с окружностью максимум 2 точки пересечения,

то точки W и Z перейдут в точки X и Y , при этом $MZ \perp MW$ и

$MX \perp MY \Rightarrow Z' = X$ и $W' = Y$, но есть $Z \rightarrow X$ и $W \rightarrow Y$, но

тогда $MX = 2MZ$ и $MY = 2MW$ $I_2 \rightarrow I_1 \Rightarrow I_1 M = 2I_2 M$, т.к.

(так как $\omega_2 \rightarrow \omega_1$)

$I_1 M + MI_2 = I_1 I_2$, так как образ и про- точки, образ точки и центры



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запомним лемму на одной прямой $\Rightarrow I_1 M + M I_2 = I_1, I_2 = 8 \Rightarrow$
 $\Rightarrow I_1 M = 2 \cdot \frac{I_1 I_2}{3} = \frac{16}{3}; I_2 M = \frac{8}{3}$

4) $I M \frac{1}{2} = x; M W = x + y \Rightarrow M X = 2x; M Y = 2(x + y)$, по условию

$M Z: M Y = x(2x + 2y) = 2x(x + y) = 9$, площадь точки M отрезков XY

ω , с одной стороны равна $M \cdot M Y = 2x \cdot 2(x + y) = 2 \cdot 2x(x + y) =$

$= 2 \cdot 9 = 18$, с другой стороны по определению площади точки

M отрезков XY , равна $M I_1^2 - R_1^2 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1^2 = M I_1^2 - 18 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 90 - 72}{9} =$

$= \frac{256 - 162}{9} = \frac{56 + 38}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$⑤ \quad 5 - 4 \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) > 3 \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$5 > 4 \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$4 \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 4 \left(\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \right) -$$

$$- \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 4 \cdot \left(2 \sin\left(\frac{\frac{9\pi}{14} + \frac{3\pi}{14}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{9\pi}{14} - \frac{3\pi}{14}}{2}\right) \right) -$$

$$- \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 8 \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\text{I} \quad \alpha = \frac{3\pi}{14} \Rightarrow 2\alpha = \frac{3\pi}{7}, \text{ тогда}$$

$$8 \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 8 \sin(2\alpha) \cdot \cos\alpha -$$

$$- \sin\alpha - 4 \cos 2\alpha = 16 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin\alpha - 8 \cos^2\alpha + 4 =$$

$$= 8 \cos^2\alpha (2 \sin\alpha - 1) + 4 - \sin\alpha$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 8 \cos^2\alpha (2 \sin\alpha - 1) + 4 - \sin\alpha <$$

$$< 8 (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{3}{4} + 4 - \frac{1}{2} = 6\sqrt{2} - 2 - \frac{1}{2} = 6\sqrt{2} - \frac{5}{2} < 5 =$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) > 3 \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ $M = \sqrt{a-3; a-2; a-1; a; a+1; a+2; a+3}$

$(p-q)(p+q) = 1080 = 2 \cdot 540 = 2^2 \cdot 270 = 2^3 \cdot 135 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

$\overset{q}{\cancel{6a+3}} \cdot \overset{p}{\cancel{6a+1}} = C_7^6 = \frac{7!}{1! \cdot 6!} = 7$

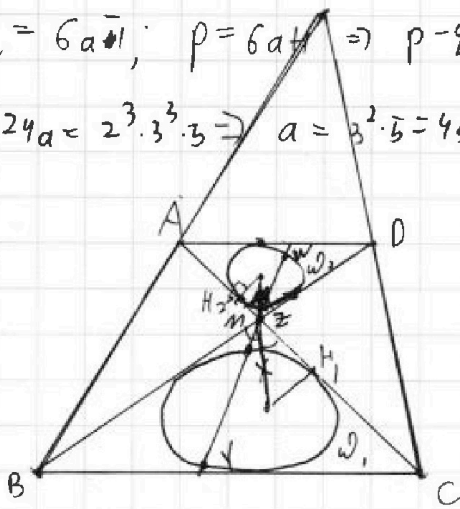
$\Sigma = 7a$

- 1) $6a+3$; 2) $6a+2$; 3) $6a+1$; 4) $6a$; 5) $6a-1$; 6) $6a-2$; 7) $6a-3$

$\Rightarrow q = 6a+1; p = 6a+3 \Rightarrow p-q = 2; p+q = 12a$

$\Rightarrow 24a = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \Rightarrow a = 3^2 \cdot 5 = 45 \Rightarrow M$ *найдено*

④

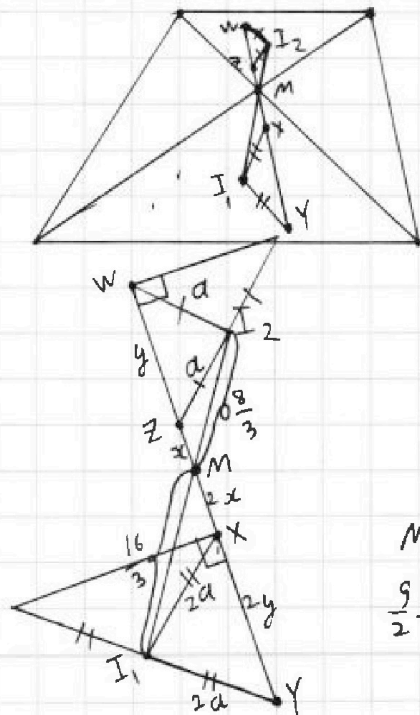
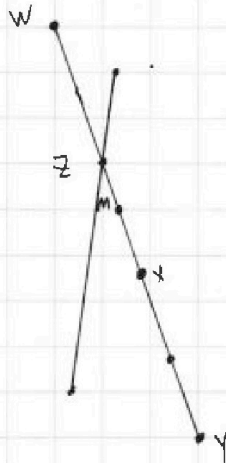


$R_1 = ?; I_1, I_2 = 3; MZ \cdot MY = 9 \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

$\triangle AMD \sim \triangle BMC, \alpha \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 2$

$\angle AMO_2 = \angle O_2MD = \angle BMO, \angle O, M \Rightarrow M \in I_1, I_2$

$\triangle MI_1H_1 \sim \triangle MI_2H_2 \Rightarrow \frac{MI_1}{MI_2} = 2$



$2x \cdot (x+y) = 9 \Leftrightarrow MZ \cdot MW \Rightarrow x(x+y) = \frac{9}{2}$

$\triangle MZI_1 \sim \triangle MZI_2 \Rightarrow$

$MZ \cdot MW = MZ \cdot MY \Rightarrow \frac{MX}{MY} = \frac{MZ}{MW} \cdot 2x$

$\frac{9}{2} = \text{сторона } M \text{ от } \omega, = MI_2^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $180^\circ(t-2)$

$$d_1 = 132^\circ, d_i = d_{i-1} + 2^\circ$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_t = 132^\circ + 134^\circ + \dots + 132^\circ + (t-1) \cdot 2^\circ = \frac{(132^\circ + 132^\circ + (t-1) \cdot 2^\circ) \cdot t}{2}$$

$$= 132t + \frac{2t \cdot (t-1)}{2} = (131+t)t = 180^\circ(t-2),$$

$$131t + t^2 = 180t - 360; t^2 - 49t + 360 = 0; D = 7^2 - 1440$$

$$132t + 2 + 4 + \dots + (t-1) \cdot 2 = \frac{2t \cdot (t-1)}{2} + 132t = t^2 + 131t = 180t - 360$$

$$49^2 = (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$$

$$2401 - 1440 = 401 + 560 = 961 = 31^2$$

$$t = \frac{49 \pm 31}{2}; \begin{cases} t = 40, \text{ но при } t = 40 \text{ сумма } 1 \text{ будет } 7180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = 9$$

Ответ: 9

② $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot \ln 25 + y \cdot \ln 75 + z \cdot \ln 125 = \ln 45$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \min?$$

$$2x \cdot \ln 5 + y(2 \ln 5 + \ln 3) + 3z \cdot \ln 5 = \ln 5 + 2 \ln 3$$

$$\ln(5) \cdot (2x + 2y + 3z) + \ln(3) \cdot y = \ln(5) + 2 \ln(3)$$

$$\ln(5) \cdot (2x + 2y + 3z - 1) + \ln(3) \cdot (y - 2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \quad \log_a b = \log_a a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

$$\log_3(5) \cdot (2x + 2y + 3z - 1) + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2; 2x + 2y + 3z - 1 = 0$$

$$\boxed{x + 3z = -3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{14}$$

$$3 \sin(\alpha) - 4 \cos 2\alpha = 3 \sin \alpha - 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 3 \sin \alpha - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) =$$

$$= 3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha = 8 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha - 4$$

$$\cos \frac{3\sqrt{11}}{7} = \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{3\sqrt{11}}{7}\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{14}\right)$$

$$5 + 4 \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{14}\right) \vee 3 \sin\left(\frac{3\sqrt{11}}{14}\right) + 4 \sin\left(\frac{3\sqrt{11}}{14}\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\sqrt{11}}{14}\right) = \sin\left(\frac{3\sqrt{11}}{14}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{14}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right)$$

$$\sin \frac{3\sqrt{11}}{14} = \cos\left(\frac{7\sqrt{11}}{14} - \frac{3\sqrt{11}}{14}\right) = \cos\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right)$$

$$5 - 4 \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) \vee 3 \cos\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\sqrt{11}}{7}\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(u) + \sin(v) = 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = u \\ \alpha + \beta = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = u + v \\ 2\beta = v - u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{u+v}{2} \\ \beta = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(u) - \cos(v) = 2 \cdot \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$$

$$4 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\sqrt{11}}{7}\right) \right) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right)$$

$$5 \vee 3 \cos\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right) + 8 \sin\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) = 3 \cos\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right) + 16 \sin^2\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right)$$

$$= 3 \cos^2\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) - 3 \sin^2\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) + 16 \sin^2\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right)$$

$$\frac{\sqrt{11}}{7} < \frac{\sqrt{11}}{6} < \frac{2\sqrt{11}}{7} < \frac{2\sqrt{11}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{7} \quad \cos\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right) < \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow 3 \cos$$

$$3 \cos\left(\frac{2\sqrt{11}}{7}\right) + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\sqrt{11}}{7}\right) > 4 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{11} - \frac{1}{2}$$

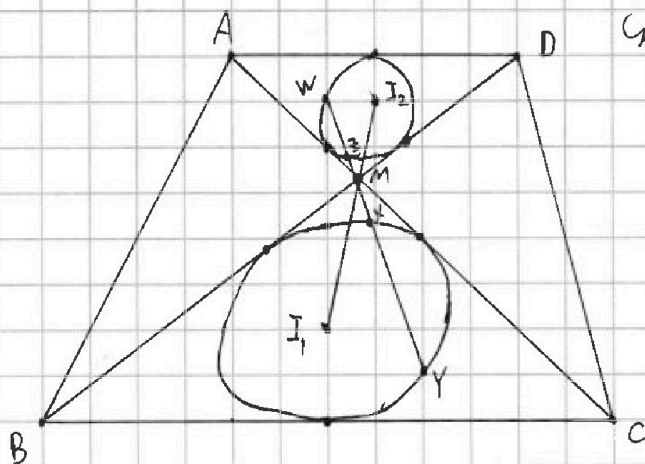
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Смещение M от BC $W, Y =$

$$= M + \cdot M Y = 2x(2x + 2y) =$$

$$= 4x(x + y) = 18 =$$

$$= M I_1^2 - R_1^2 =$$

$$\Rightarrow R_1^2 = M I_1^2 - 18 = \frac{16^2}{9} - 18 =$$

$$= \frac{16^2 - 2 \cdot 9^2}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{38 + 56}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

$$(5) \quad 5 - 4 \sin\left(\frac{3\alpha}{14}\right) \quad \text{или} \quad 3 \sin\left(\frac{3\alpha}{14}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\alpha}{7}\right)$$

$$\text{)} \quad \frac{3\alpha}{14} = \alpha \Rightarrow 5 - 4 \sin(3\alpha) \vee 3 \sin(\alpha) - 4 \cos(2\alpha)$$

$$\frac{3\alpha}{14} \vee \frac{\alpha}{7}; \quad 6\alpha \vee 7\alpha \Rightarrow \frac{3\alpha}{14} < \frac{\alpha}{7} \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha) > \sin(\alpha)}$$

$$I_1 = 5 - 4 \sin(3\alpha) - 3 \sin(\alpha) + 4 \cos(2\alpha)$$

$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin(\alpha) \cdot \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha =$$

$$= \sin(\alpha) \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = -\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$I_1 = 5 - 4(-\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha) - 3 \sin \alpha + 4 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha =$$

$$= 4 \sin^3 \alpha - 12 \sin \alpha \cdot \underbrace{\cos^2 \alpha}_{1 - \sin^2 \alpha} - 3 \sin \alpha + \underbrace{4 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha}_{4 - 4 \sin^2 \alpha} + 5 =$$

$$= 16 \sin^3 \alpha - 15 \sin \alpha - 8 \sin^2 \alpha + 9 \quad \text{)} \quad 16 \cdot \frac{1}{8} - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2} + 9 =$$

$$\text{)} \quad \sin \alpha = k; \quad f(k) = 16k^3 - 15k - 8k^2 + 9 = 2 - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 + 9 =$$

$$= 7 - 15 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$7 \vee 15 \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 14 \vee 15 \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 + 4 \cos \frac{3\pi}{7} \sqrt{4 \sin \frac{9\pi}{14} + 3 \sin \frac{3\pi}{14}}$$

$$\sin \frac{9\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14} = 2 \cdot \sin \left(\frac{6\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right)$$

$$5 \sqrt{8 \sin \left(\frac{6\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) - 4 \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) - \sin \left(\frac{3\pi}{14} \right)}$$

$$\sin \left(\frac{3\pi}{14} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right)$$

$$5 \sqrt{4 \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) (2 \sin \frac{6\pi}{7} - 1) - \sin \left(\frac{3\pi}{14} \right)}$$

$$2 \sin \frac{6\pi}{7} - 1 = 2 \sin \frac{\pi}{7} - 1 \leq 2 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{14} \Rightarrow 2\alpha = \frac{3\pi}{7}$$

$$8 \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha = 16 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha$$

$$= 16 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4 - 8 \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha =$$

$$8 \cos^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha - 1)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{3\pi}{14} \sqrt{\frac{9\pi}{6}}; \quad 18\pi \sqrt{14\pi} \Rightarrow \frac{3\pi}{14} > \frac{\pi}{6}$$

$$\sin 2\alpha (4 \cos^2 \alpha - 1)(4 \cos^2 \alpha + 1) - 4$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$$

$$< 8 \sqrt{2} - 1 \cdot \frac{3}{4} + 4 - \frac{1}{2} = 6\sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$6\sqrt{2} \sqrt{\frac{15}{2}}; \quad 36 \cdot 2 \sqrt{\frac{225}{4}}; \quad 36 \cdot 2 \sqrt{225}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$② \quad x^2 + z^2 \geq 2 \sqrt{\frac{x+z}{2}}$$

$$x=0; z=1; y=2$$

$$④ \quad 132^\circ + 130^\circ t + 130^\circ - 2^\circ(t-1) = \frac{(264^\circ - 2^\circ)t}{2} = (132^\circ - t)t = 180^\circ(t-2)$$

$$132t - t^2 = 180t - 360; \quad t^2 + 48t - 360 = 0$$

$$D = 48^2 + 1440 = 2500 - 200 + 4 + 1440 = 3744$$

$$⑤ \quad 5 \vee 4 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 3 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos(2\alpha) - \sin\alpha \cdot \sin(2\alpha) =$$

$$= \cos\alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \cos^3\alpha + 3\cos^3\alpha - 3\cos\alpha =$$

$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = (2\cos^2\alpha - 1)$$

$$5 \vee 4 \cos(\alpha) + 6 \cos^2(\alpha) - 3 - 16 \cos^3\alpha + 12 \cos\alpha =$$

$$5 \vee -16 \cos^3\alpha + 6 \cos^2(\alpha) - 3 + 16 \cos(\alpha)$$

$$6 \cos^2(\alpha) - 3 = 3(2\cos^2\alpha - 1) = 3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \leq 3$$

$$16 \cos(\alpha) (1 - \cos^2\alpha) = 16 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin^2\alpha \leq 16$$

$$\alpha = \frac{\pi}{7}$$