МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+2\sqrt{3}tx+4t^2-4=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2-2ab+b^2+15a-15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=12$, $\cos(2\angle CEM)=-\frac{1}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED+DO$, если известно, что $BE=10$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что уравнение имеет 2 различн. действ. корня тогда и только тогда, когда его дискриминант $D > 0$.

$\Rightarrow D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2-4) > 0$

По т. Виета произведение корней равно $4t^2-4$.

$\Rightarrow \begin{cases} (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2-4) > 0 \\ 4t^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-4t^2 > 0 \\ t^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2 \in (1;4) \Leftrightarrow t \in (-4;-1) \cup (1;4)$

Ответ: $t \in (-4;-1) \cup (1;4)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из условия: $\begin{cases} a+b=40; \quad a,b\in\mathbb{N} \\ a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; \quad a,b\in\mathbb{N} \\ (a-b)^2+15(a-b)=17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; \quad a,b\in\mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15)=17p^5 \end{cases}$

Заметим, что т.к. a и $b\in\mathbb{N}$, то $a-b<a<40$

$\Rightarrow (a-b)(a-b+15)<40\cdot 55=2200 \Rightarrow 17p^5<2200$

Если бы ~~$p\geq 3$, то~~ при $p\geq 3$ $\exists$ решение, то $17p^5\geq 17\cdot 243=4131 \Rightarrow 2200>4131$

$\Rightarrow \varnothing \Rightarrow p\leq 2$. Т.к. минимальное простое число 2, то $p=2 \Rightarrow$ задача эквивалентна решению системы:

$\begin{cases} a+b=40; \quad a,b\in\mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15)=17\cdot 2^5=544 \end{cases} \Leftrightarrow$ ~~$\begin{cases} a+b=40 \quad a,b\in\mathbb{N} \\ (40-2b)(55-2b)=544 \end{cases}$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; \quad a,b\in\mathbb{N} \\ 2200-190b+4b^2=544 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; \quad a,b\in\mathbb{N} \\ 2b^2-95b+828=0 \end{cases}$~~

~~Т.к. 17 — простое, $a-b\leq 40$, то либо $a-b=17$, либо $a-b=17\cdot 2$, либо $a-2b=17\cdot 2^2$, т.к. $a-b<$~~

~~Если $a-b>0$, то $\left[\begin{array}{l} a-b=17 \\ a-b=17\cdot 2 \\ a-b=17\cdot 4 \end{array}\right.$, т.к. $a-b<a-b+15$~~

~~Если $a-b<0$, то [~~

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ (40-2b)(55-2b)=544=17\cdot 2^5 \end{cases}$ ~~$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ 4b^2-190b+1656=0 \end{cases} \Rightarrow b$ имеет мн. 2 реш.~~

~~Приведем их: $\begin{cases} a=4 \\ b=36 \end{cases}$ и $\{$~~

Заметим, что $40-2b$ и $55-2b$ разной четн., а в произв. они дают $17\cdot 2^5 \Rightarrow$ Одно из них 17, а другое 2^5 или -17 и $-2^5 \Rightarrow$ т.к. $40-2b$ четно $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 55-2b=17 \\ 55-2b=-17 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} b=19 \Rightarrow a=21 \Rightarrow \varnothing, \text{ т.к. } a-b+15=17, \text{ а } a-b=2 \\ b=36 \Rightarrow a=4 \text{ — подходит, т.к. } a-b+15=-17, \text{ а } a-b=-32 \end{cases}$

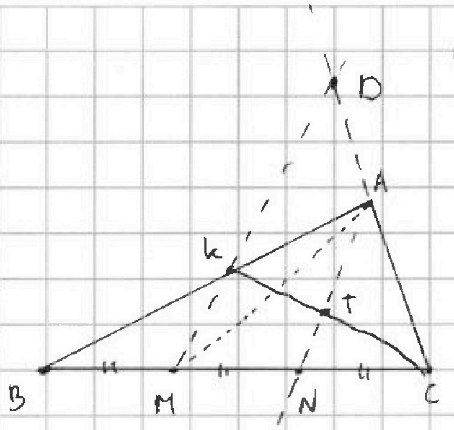
Ответ: $b=36$; $a=4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Из условия: $DM \parallel AN$; $CD = AB$;

$AB - ?$ $BC = 12$ $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

$BM = MN = CN$.

Т.к. AN проходит через середину MC и $AN \parallel MD$, то AN является средней линией $\triangle MDC \Rightarrow$

$\Rightarrow DA = AC \Rightarrow AB = CD = AD + AC = 2AC$. Пусть MD пер. AB в точке K. $\Rightarrow MK \parallel AN$ и MK проходит через середину $BN \Rightarrow MK$ — ср. линия $\triangle ANB \Rightarrow BK = AK = \frac{AB}{2}$

Т.к. $AB = 2AC$, то $BK = AK = AC$. Тогда $\triangle AKC$ — равнобед. с основанием KC. Также, т.к. AN — ср. линия $\triangle CDM$, то AN пересекает CK в её середине T.

Тогда т.к. $\triangle AKC$ — равнобедренный, то AT является не только медианой, но также высотой и биссектрисой.

$\Rightarrow \angle BAT = \angle NAC \Rightarrow \cos(2\angle CAN) = \cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$

Тогда по т. косинусов:

$AB^2 + AC^2 - 2\cos(\angle BAC) AB \cdot AC = BC^2$ Т.к. $AB = 2AC$:

$AB^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{1}{2} AB \cdot \frac{AB}{2} = BC^2 \Rightarrow \frac{3}{2} AB^2 = BC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = \frac{2}{3} \cdot 144 = 96 \Rightarrow AB = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Сделаем задачу: в классе было бы не 8 учеников, а 9. Пусть у каждого ученика рост будет измеряться в метрах, тогда рост i-го ученика a_i. Среди 8 старых учеников все $a_i > 0$ и $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. Добавим нового ученика, чей рост будет $a_9 = 0$. Тогда он ниже всех и будет занимать пустую парту.~~

Тогда теперь условие того, что учени

Расставим учеников по убыванию. Тогда в ряду для каждого i-го ученика его рост $a_i > a_{i+1}$.

Тогда для того, чтобы каждый ученик видел хорошо, то в каждом ряду парт, где заняты все парты, рост учеников должен убывать по мере приближения к доске.

Т.к. учеников 8, а рядов парт 3 (где максимум 3 ученика), то по принц. Дирихле найдутся 2 ряда, где сидит по 3 ученика.

На первый ряд C_9^3 вариантов выбрать 3 учеников из 9, а для каждого вар. ровно 1 способ учеников рассадить.

Для второго ряда C_6^3 способов выбрать 3-х учеников из ост. 6, аналогично для каждого сп. ровно 1 рассадка.

На последний ряд сядут 2 ученика и останется пустое место. Пусть рост учеников a и b; a>b. Тогда подходит всего 4 рассадки из $6 = 3 \cdot 2$ (вар. выбора места a × вар. в. места для b):

1) $\boxed{\cdot\ a\ b}$ + 2) $\boxed{a\ \cdot\ b}$ + 3) $\boxed{b\ \cdot\ a}$ + 4) $\boxed{a\ b\ \cdot}$ 5) $\boxed{b\ a\ \cdot}$ − 6) $\boxed{\cdot\ b\ a}$ −

не видит   не видит

$\Rightarrow$ Всего вариантов $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 4$

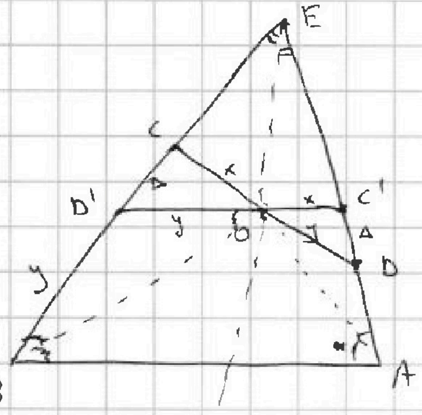
Ответ: $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: $BE = 10$ $(ED + DO)_{min}$ — ?

O — инцентр BAE;

$ABCD$ — впис.

Решение: ~~...~~ пусть $\angle BAE = 2\alpha$, $\angle ABE = 2\beta \Rightarrow$ из впис. $ABCD$: $\angle ECD = 2\alpha$; $\angle EDC = 2\beta$.

~~Проведем через O пр. ∥ AB. Пусть она пер.~~

Отразим отн. EO CD. Получим $C'D'$. Т.к. $EB \leftrightarrow EA$ при ~~отраж.~~ отражении отн. EO, то D' лежит на EB, C' на EA. Также т.к. $\angle EDC = \angle ED'C' = 2\beta \Rightarrow C'D' \parallel AB$. Пусть $CD' = C'D = \Delta$, $CO = OC' = x$; $DO = OD' = y$, $EC' = kx \Rightarrow EC = kx$, из ~~подобия~~ осн. св.-ва биссектрисы $ED' = ED = ky$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow ED + DO = ky + y = kx + y + \Delta$

Т.к. $C'D' \parallel AB \Rightarrow \angle D'OB = \angle D'BO \Rightarrow BD' = y$

$\Rightarrow ky + y = BE = 10 \Rightarrow ED + DO = BE = 10$

Ответ: 10.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если в графе из любой вершины в любую другую можно добраться единственным способом, то граф — дерево. Тогда будем рассматривать остров как граф, в котором вершины — деревни, а ребра — дороги между ними. Тогда, по сказанному ранее, этот граф — дерево.

Пусть деревень $n \geq 4$.

Посчитаем суммарное кол-во ребер k в графе.

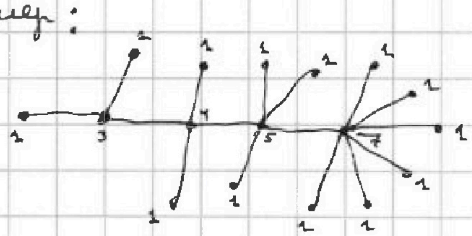
Т.к. граф дерево, то $k = n - 1$.

С другой стороны, $2k = 3 + 4 + 5 + 7 + (n-4) \cdot 1$ — количество исходящих из вершин ребер равно удвоенному кол-ву ребер, т.к. каждое ребро имеет 2 конца.

$\Rightarrow \quad k = n - 1 = \dfrac{3+4+5+7+(n-4)\cdot 1}{2} \Rightarrow 2n - 2 = 15 + n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 17$

Ответ: 17 деревень. Пример:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $|x+y-2| > 0$. Тогда:

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{3-x-y} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y > 2 \\ x+y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x+y=3 \rightarrow -(x^2+y^2-2x-2y) = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2xy=4=(x+y)^2-(x^2+y^2) \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad y=2 \\ x=2 \quad y=1 \end{array} \right.$

Если $x+y-2=0$: $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \; y=2 \\ y=0 \; x=2 \end{array} \right.$

Если $x+y-2<0$: $|x+y-2| = 2-x-y \rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{x+y-1} = 1 \rightarrow \begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x+y<2 \end{cases} \Rightarrow x+y=1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=-1=(x+y)^2-(x^2+y^2) \\ x+y=1 \end{cases}$

Т.к. $y, x \in \mathbb{Z}$, то $2xy$ четное $\Rightarrow 2xy \neq -1 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=1 \quad y=2 \\ x=2 \quad y=1 \\ x=0 \quad y=2 \\ x=2 \quad y=0 \end{array} \right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

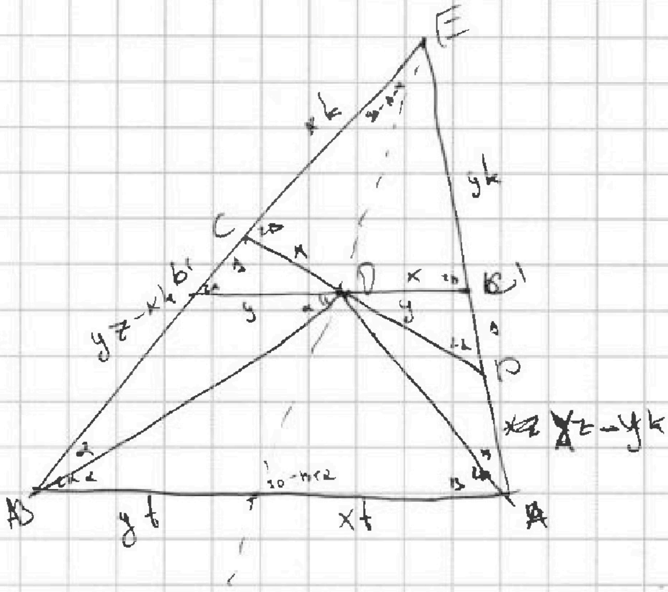
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$yz = 10$

$y(k-1)$ - ?

$k = \frac{z}{t} \Rightarrow z = kt$

$\boxed{ykt = 10}$

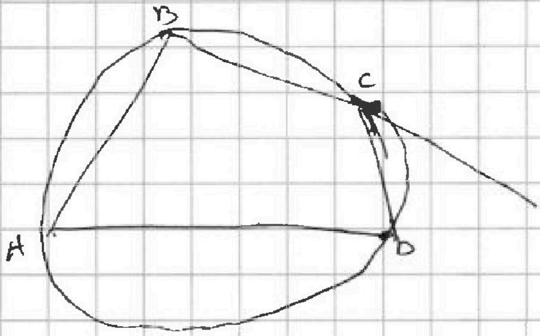
$xk + 1 + y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

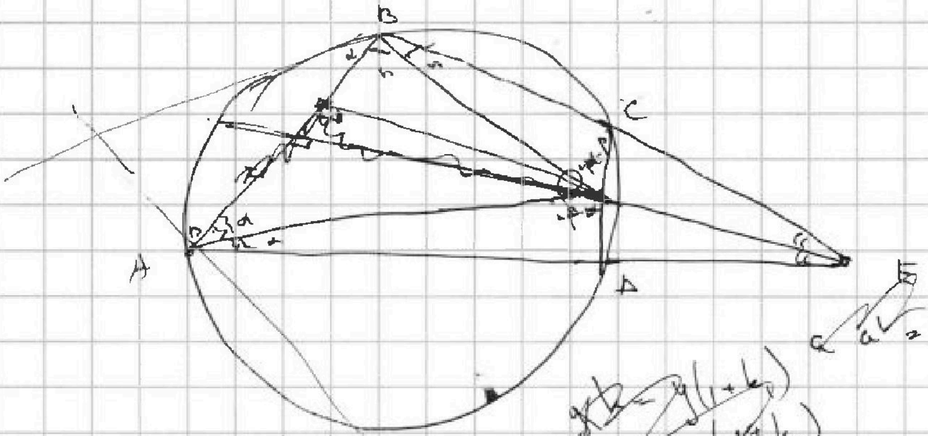


$\frac{1}{\sin(\beta)} = \frac{xk}{\cos(\alpha)}$

$\frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{yk}{\cos(\beta)}$

$x\frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)} = y\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)}$

$x\sin(2\beta) = y\sin(2\alpha)$



$\frac{a'}{b'} = \frac{x}{y} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\beta)}$

$\frac{a'}{\sin(2\alpha)} = \frac{b'}{\sin(2\beta)}$

$\to \frac{a'}{b'} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\beta)}$

$a' = kb'$

$\cancel{yk = y(1+k)}$

$yk = x(1+k_1)$

$x(k-k_1) = y$

$y(k-k_1) = x$

$\frac{y}{\sin(2\beta)} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$