



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что уравнение имеет 2 разл. действ. корня  
тогда и только тогда его дискриминант  $D > 0$ .

$$\Rightarrow D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

То е. Внета произведение корней равно  $4t^2 - 4$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4t^2 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 \in (1; 4) \Leftrightarrow t \in (-4; -1) \cup (1; 4)$$

Ответ:  $t \in (-4; -1) \cup (1; 4)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия: 
$$\begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40, a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15) = 17p^5 \end{cases}$$

Заметим, что м.к.  $a, b \in \mathbb{N}$ , но  $a-b < a < 40$

$$\Rightarrow (a-b)(a-b+15) < 40 \cdot 55 = 2200 \Rightarrow 17p^5 < 2200$$

Если бы  $p \geq 3$ , то  $17p^5 \geq 17 \cdot 243 = 4131 \Rightarrow 2200 > 4131$

$\Rightarrow \emptyset \Rightarrow p \leq 2$ . П.к. минимальное простое число 2, то

$p=2 \Rightarrow$  задача эквивалентна решению системы:

$$\begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5 = 544 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (40-2b)(55-2b) = 544 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ 2200 - 190b + 4b^2 = 544 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ 2b^2 - 95b + 828 = 0 \end{cases}$$

П.к.  $17$  - простое,  $a-b \leq 40$ , но либо  $a-b=17$ ,

либо  $a-b = 17 \cdot 2$ , либо  $a-b = 17 \cdot 2^2$ , м.к.  $a-b < a-b+15$

Если  $a-b > 0$ , то  $a-b = 17$ ,  $a-b = 17 \cdot 2$ ,  $a-b = 17 \cdot 4$ , м.к.  $a-b < a-b+15$

Если  $a-b < 0$ , то  $a-b = -17$ ,  $a-b = -17 \cdot 2$ ,  $a-b = -17 \cdot 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ (40-2b)(55-2b) = 544 = 17 \cdot 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ 2b^2 - 490b + 1656 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{бывает макс. 2 р-ва}$$

Приведем к: 
$$\begin{cases} a=4 \\ b=36 \end{cases}$$
 Заметим, что  $40-2b$  и

$55-2b$  разной четн., а  $b$  кратн. они дают  $17 \cdot 2^5 \Rightarrow$  Одно из них  $17$ , а другое  $2^5$  или  $-17$  и  $-2^5 \Rightarrow$  м.к.  $40-2b$  четно  $\Rightarrow$   $\begin{cases} 55-2b=17 \\ 55+2b=-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=19 \\ b=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=21 \\ a=4 \end{cases}$  - не подходит, м.к.  $a-b+15 = -17$ , а  $a-b = -32$

Ответ:  $b=36; a=4$



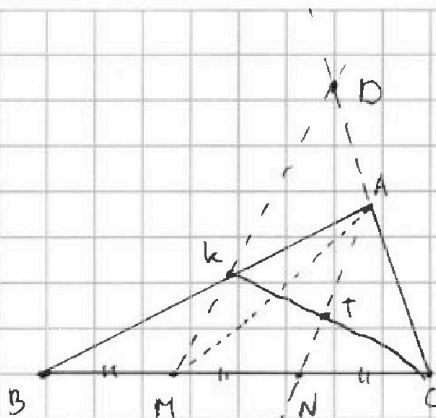


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Из условия:  $DM \parallel AN$ ;  $CD = AB$ ;

$$AB = ? \quad BC = 12 \quad \cos(2 \angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$DM = MN = CN$$

П.к.  $AN$  проходит через середину  $ME$  и  $AN \parallel MD$ , то  $AN$  является средней линией  $\triangle MDC \Rightarrow$

$$\Rightarrow DA = AC \Rightarrow AB = CD = AD = AB + AC = 2AC, \text{ Пусть } MD \text{ пер.}$$

$AB$  в точке  $K \Rightarrow MK \parallel AN$  и  $MK$  проходит через середину

$BN \Rightarrow MK$  — ср. линия  $\triangle ANB \Rightarrow BK = AK = \frac{AB}{2}$

П.к.  $AB = 2AC$ , то  $BK = AK = AC$ , Тогда  $\triangle AKC$  — равнобед. с основанием  $KC$ . Также, т.к.  $AN$  — ср. линия  $\triangle CDM$ , то  $AN$  пересекает  $CK$  в её середине  $T$ .

Тогда т.к.  $\triangle AKC$  — равнобедренный, то  $AT$  является не только медианой, но также высотой и биссектрисой.

$$\Rightarrow \angle BAT = \angle NAC \Rightarrow \cos(2 \angle CAN) = \cos(2 \angle BAC) = -\frac{1}{4}$$

Тогда по т. косинусов:

$$AB^2 = AC^2 - 2 \cos(\angle BAC) AB \cdot AC = AC^2 = BC^2 \text{ П.к. } AB = 2AC :$$

$$AB^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{1}{2} AB \cdot \frac{AB}{2} = BC^2 \Rightarrow \frac{3}{2} AB^2 = BC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{2}{3} \cdot 144 = 96 \Rightarrow AB = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

Ответ:  $AB \Rightarrow 4\sqrt{6}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Сделаю  
Решение~~ в классе было бы не 8 учеников, а 9. Пусть у каждого ученика рост будет измеряться в метрах, тогда рост  $i$ -го ученика  $a_i$ . Среди 8 старших учеников все  $a_i > 0$  и  $a_i \neq a_j$  если  $i \neq j$ . Добавим нового ученика, его рост будет  $a_9 = 0$ . Тогда он меньше всех и будет занимать пустую парту. Тогда теперь условие того, что ученик

Расставим учеников по убыванию. Тогда в ряду для каждого  $i$ -го ученика его рост  $a_i > a_{i+1}$ .

Тогда для того, чтобы каждый ученик видел хорошо, то в каждом ряду парт, где заняты все парты, рост учеников должен убывать по мере приближения к доске.

Т.е. учеников 8, а рядов парт <sup>где помещаются 3 ученика</sup> 3, то по принципу Дирихле найдутся 2 ряда, где сидит по 3 ученика.

На первый ряд  $C_9^3$  вариантов выбрать 3 учеников из 9, а для каждого вар. ровно 1 способ учеников рассадить.

Для второго ряда  $C_6^3$  способов выбрать 3-х учеников из ост. 6, аналогично для каждого сп. ровно 1 рассадка.

На последний ряд сидят 2 ученика и останется одно место. Пусть рост учеников  $a$  и  $b$ ;  $a > b$ . Тогда рассадит всего 4 рассадки из 6 =  $\frac{3 \cdot 2}{2}$  (вер. выбора места  $a$  и вер.  $b$  и места для  $b$ ):

$$1) \boxed{\cdot a b} + 2) \boxed{a \cdot b} + 3) \boxed{b \cdot a} + 4) \boxed{a b \cdot} + 5) \boxed{b a \cdot} + 6) \boxed{\cdot b a}$$

не вариант                      не вариант

$$\Rightarrow \text{Всего вариантов } C_9^3 \cdot C_6^3 = 4$$

$$\text{Ответ: } C_9^3 \cdot C_6^3 = 4$$

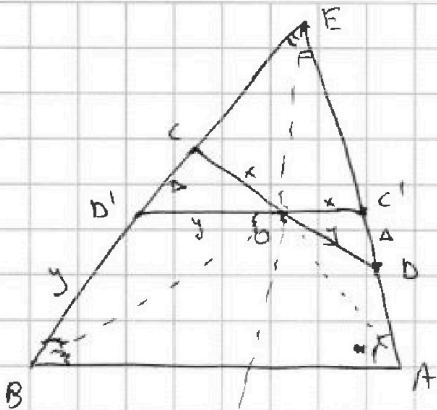
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $BE = 10$  ( $EB + BO$ )<sub>min</sub> - ?

$O$  — внутренняя  $\triangle ABE$ ;

$ABCD$  — впис.

Решение: ~~мысл.~~ пусть  $\angle BAE = 2\alpha$ ,

$\angle ABE = 2\beta \Rightarrow$  из впис.  $ABCD$ :  $\angle ECB = 2\alpha$ ;  $\angle EDC = 2\beta$ .

~~Проведем через  $O$  пр.  $\parallel AB$ . Пусть она перес.~~

Отразим отн.  $EO$   $CB$ . Получим  $C'D'$ . Т.к.  $\angle$

$EB \leftrightarrow EA$  при ~~отраж.~~ отражением отн.  $EO$ , то  $B'$  лежит на  $EO$ ,  $C'$  на  $EA$ . Также т.к.  $\angle EBC = \angle EDC$

$= 2\beta \Rightarrow C'D' \parallel AB$ . Пусть  $C'D' = C'D = a$ ,  $EO = OC' = x$ ;

$BO = OD' = y \Rightarrow EC' = kx \Rightarrow EC = kx$ , из ~~необходимой~~ отн. св-ва ~~Евклидова~~  $ED' = EB = ky \Rightarrow$

$$\Rightarrow EO + BO = ky + y = kx + x + a$$

Т.к.  $C'D' \parallel AB \Rightarrow \angle D'O B = \angle D'B O \Rightarrow BO' = y$

$$\Rightarrow ky + y = BE = 10 \Rightarrow EO + BO = BE = 10$$

Ответ: 10.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если в графе из любой вершины в любую другую можно добраться единственным способом, то граф — дерево. Тогда будем рассматривать остров как граф, в котором вершины — деревни, а ребра — дороги между ними. Тогда, по сказанному ранее, этот граф — дерево.

Пусть деревень  $n \geq 4$ .

Посчитаем суммарное кол-во ребер  $k$  в графе.

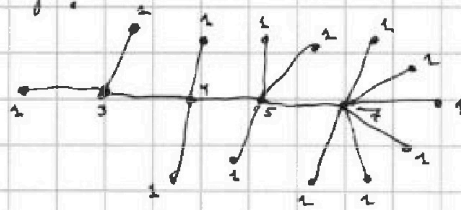
П.к. граф — дерево, то  $k = n - 1$ .

С другой стороны,  $2k = 3 + 4 + 5 + 7 + (n - 4) \cdot 1$  — количество исходящих из вершин ребер равно удвоенному кол-ву ребер, т.к. каждое ребро имеет 2 конца.

$$\Rightarrow k = n - 1 = \frac{3 + 4 + 5 + 7 + (n - 4) \cdot 1}{2} \Rightarrow 2n - 2 = 15 + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 17$$

Ответ: 17 деревень. Пример:







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $x+y-2 > 0$ . Тогда:

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{3-x-y} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x+y=3 \rightarrow -(x^2+y^2-2x-2y) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy=4 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 & y=2 \\ x=2 & y=1 \end{cases}$$

Если  $x+y-2 = 0$ :  $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 & y=2 \\ y=0 & x=2 \end{cases}$$

Если  $x+y-2 < 0$ :  $|x+y-2| = 2-x-y \rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{x+y-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x+y < 2 \end{cases} \Rightarrow x+y=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=-1 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \\ x+y=1 \end{cases}$$

П.к.  $x, y \in \mathbb{Z}$ , то  $2xy$  четное  $\Rightarrow 2xy \neq -1 \Rightarrow \emptyset$

Ответ:

$$\begin{cases} x=1 & y=2 \\ x=2 & y=1 \\ x=0 & y=2 \\ x=2 & y=0 \end{cases}$$



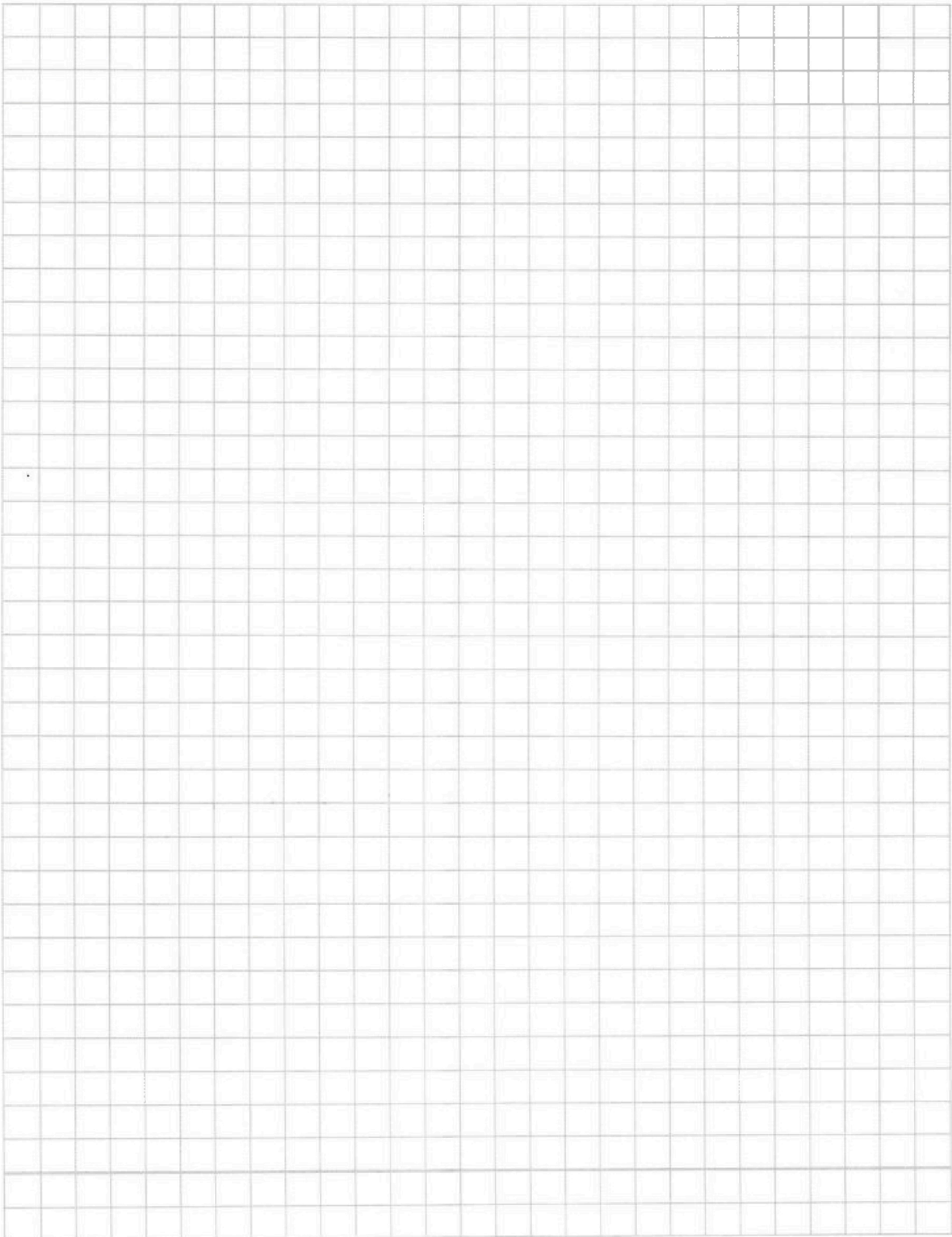
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

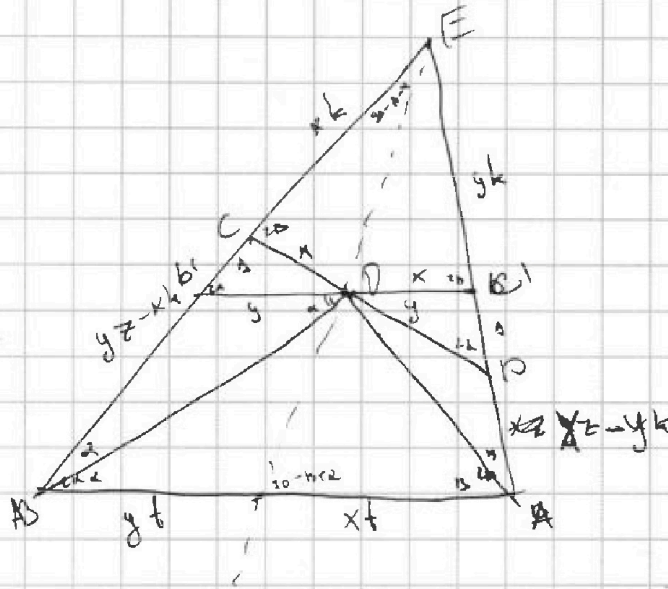
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$yz = 10$$

$$y(k-t) = ?$$

$$k = \frac{z}{t} \Rightarrow z = kt$$

$$ykt = 10$$

$$xk = t + y$$



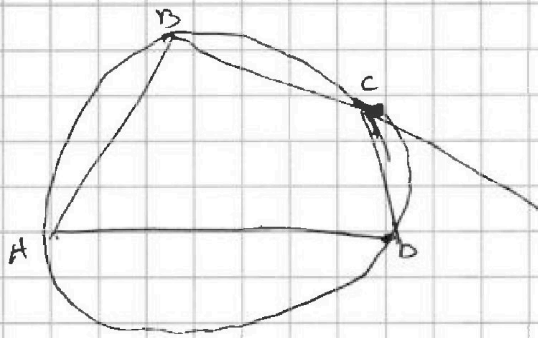


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

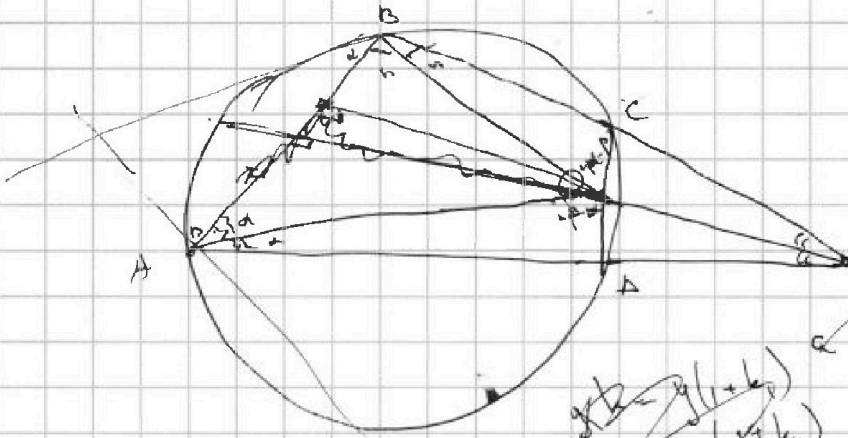


$$\frac{l}{\sin(\alpha)} = \frac{kl}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{l}{\sin(\alpha)} = \frac{yl}{\cos(\alpha)}$$

$$x \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = y \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$x \sin(2\alpha) = y \sin(2\alpha)$$



$$xk = y(l+k)$$

$$yk = x(l+k)$$

$$x(k-l) = y$$

$$y(k-l) = x$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{x}{y} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

$$\frac{a'}{\sin(\alpha)} = \frac{b'}{\sin(2\alpha)}$$

$$\rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

$$a \sin(\alpha) = a \sin(\alpha)$$

