



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad x^2 + 4\sqrt{2}t \cdot x + (9t^2 - 9) = 0$$

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9t^2 - 9) = 36 - 4t^2 = 4(9 - t^2) \Rightarrow 9 - t^2 > 0 \Rightarrow t \in (-3; 3)$$

$$x = \frac{-4\sqrt{2}t \pm 2\sqrt{9-t^2}}{2} = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2} = x$$

скобки круглые, т.к. два различных действ. корня

Произведение корней положительно \Rightarrow либо они оба отрицательны, либо оба положительны.

(1) оба отрицательны \Rightarrow больший из них отрицателен:

$$-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} < 0$$

при $t < 0$ ничего не выйдет $\Rightarrow t > 0$

$$-2\sqrt{2}t < -\sqrt{9-t^2}$$

$$2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t > 1 \Rightarrow t \in (1; 3)$$

(2) оба положительны \Rightarrow меньший из них положительен:

$$-2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2} > 0$$

при $t > 0$ ничего не выйдет $\Rightarrow t < 0$.

$$2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$t^2 > 1 \Rightarrow t > 1 \text{ ИЛИ } t < 0 \Rightarrow t < -1 \Rightarrow t \in (-3; -1)$$

$$\text{Ответ: } (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Поскольку $a-b=12$, и числа a и b одинаковой четности (то есть либо оба четные (4.), либо оба нечетные (н.)). Проверим оба случая:

(1) оба 4.

$$a^2-4.; 2ab-4.; b^2-4.; 3a-4.; 3b-4. \Rightarrow a^2+2ab+b^2+3a+3b = 19b^4 - \text{тоже } 4.$$

Значит $19b^4 \equiv 4 \pmod{4} \Rightarrow b^4 \equiv 4 \pmod{4}$. Но b -простое $\Rightarrow b=2$.

(2) оба н.

$$a^2-n.; 2ab-4.; b^2-n.; 3a-n.; 3b-n. \Rightarrow a^2+2ab+b^2+3a+3b = 19b^4 - 4. (н.+н.+н.+н.+4=4)$$

Значит аналогично (1) $b=2$.

Получаем в обоих случаях $b=2$ и $19b^4=304$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b=304$$

$$(a+b)^2+3(a+b)-304=0$$

$$D=3^2+4 \cdot 1 \cdot 304=9+1216=1225=35^2$$

$$a+b = \frac{-3 \pm 35}{2}$$

$$(1) \begin{cases} a+b = \frac{-3-35}{2} = -19 \\ a-b = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2a = -7 \Rightarrow a = -3,5$. Но a и b - натуральные \Rightarrow не подходит.

$$(2) \begin{cases} a+b = \frac{-3+35}{2} = 16 \\ a-b = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2a = 28 \Rightarrow a = 14$ и $b = 2$. Все подходит.

Ответ: $a=14; b=2$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③

$DM \parallel AN$ и $EM = 2EN \Leftrightarrow DC \parallel AC$
 (AC лежит на DC) $\Rightarrow \triangle DMC \sim \triangle AMC$ с
 коэф. 2. Значит $AC = 2DC = 2AC$. Пусть
 $AC = x$. Тогда $AD = x$ и $AB = 2x$.

Вспомним св-во биссектрисы
 некоторого угла: она делит противо-
 лежащую сторону в отношении
 прилежащих сторон.

Заметим, что

$$\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN} = \frac{x}{2} \Rightarrow \dots$$

AN - биссектриса $\angle BAC \Rightarrow$

$$\cos(2\angle CAN) = \cos(\angle BAC) = -\frac{3}{4}$$

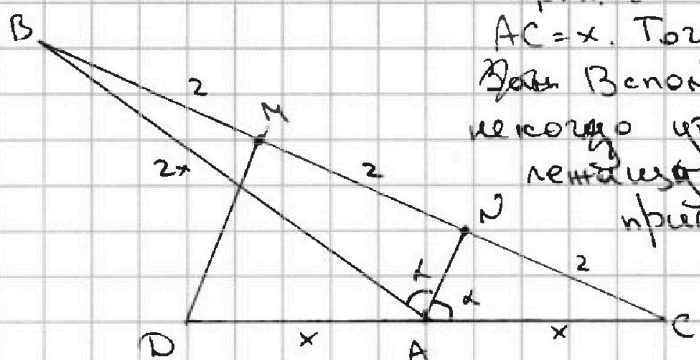
Тогда запишем теорему косинусов для $\triangle ABC$:

$$6^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(\angle BAC) = x^2 + 4x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4} = 8x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Тогда $AB = 2x = \boxed{3\sqrt{2} = AB}$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6 Назовем деревни, из которых выходит 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно 5-ой, 6-ой, 7-ой и 9-ой. Тогда между этими 4-мя деревнями может пройти не более 3 дорог, т.к. иначе из одного из этих городов до другого можно будет добраться как минимум двумя разными маршрутами. Также из каждого из городов 5-го, 6-го, 7-го и 9-го выходят соответственно 5, 6, 7 и 9 дорог, а пока из них суммарно выходят $3 \cdot 2 = 6$ дорог (умножаем на 2, т.к. каждое ребро мы считаем дважды). Значит оставшиеся дороги идут в города, из которых выходит по одной дороге \Rightarrow таких городов $6 + 9 + 7 + 5 - 6 = 21$. Мы назовем такие города "единичными".

Докажем, что из любого города до любого другого можно добраться единственным маршрутом:

- добраться из единичного города в единичный можно всего одним маршрутом, т.к. между ними 3 дороги (так что из каждого города выходит такая дорога).

- добраться из единичного города можно только до одного неединичного и больше никак, а уже из этого неединичного ем. предыдущий пункт.

Таким образом суммарно $21 + 4 = 25$ городов это единственный вариант и возможный вариант.

Ответ: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7) \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

выражение под корнем должно быть ≥ 0

$$1 - |x-y-1| \geq 0$$

$$|x-y-1| \leq 1$$

$$x-y-1 \in [-1; 1]$$

$$x-y \in [0; 2]$$

Поскольку числа целые
есть всего 3 варианта:

$$(1) x-y=0$$

$$(2) x-y=1$$

$$(3) x-y=2$$

$$(1) x-y=0$$

$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x^2+y^2 \leq 0 \Rightarrow x=0 \text{ и } y=0$$

но тогда $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 0$, а не 2.

$$(2) x-y=1 \Rightarrow x=y+1$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} = 1 \Rightarrow$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 1$$

$$2 \cdot 1 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$(y+1)^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ и } x = 1 \text{ подходит}$$

$$(3) x-y=2 \Rightarrow x=y+2$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} = 0 \Rightarrow 2(x-y) - x^2 - y^2 = 2^2 = 4$$

$$4 - x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow x=0 \text{ и } y=0 \Rightarrow \text{нет.}$$

Ответ: $x=1; y=0$

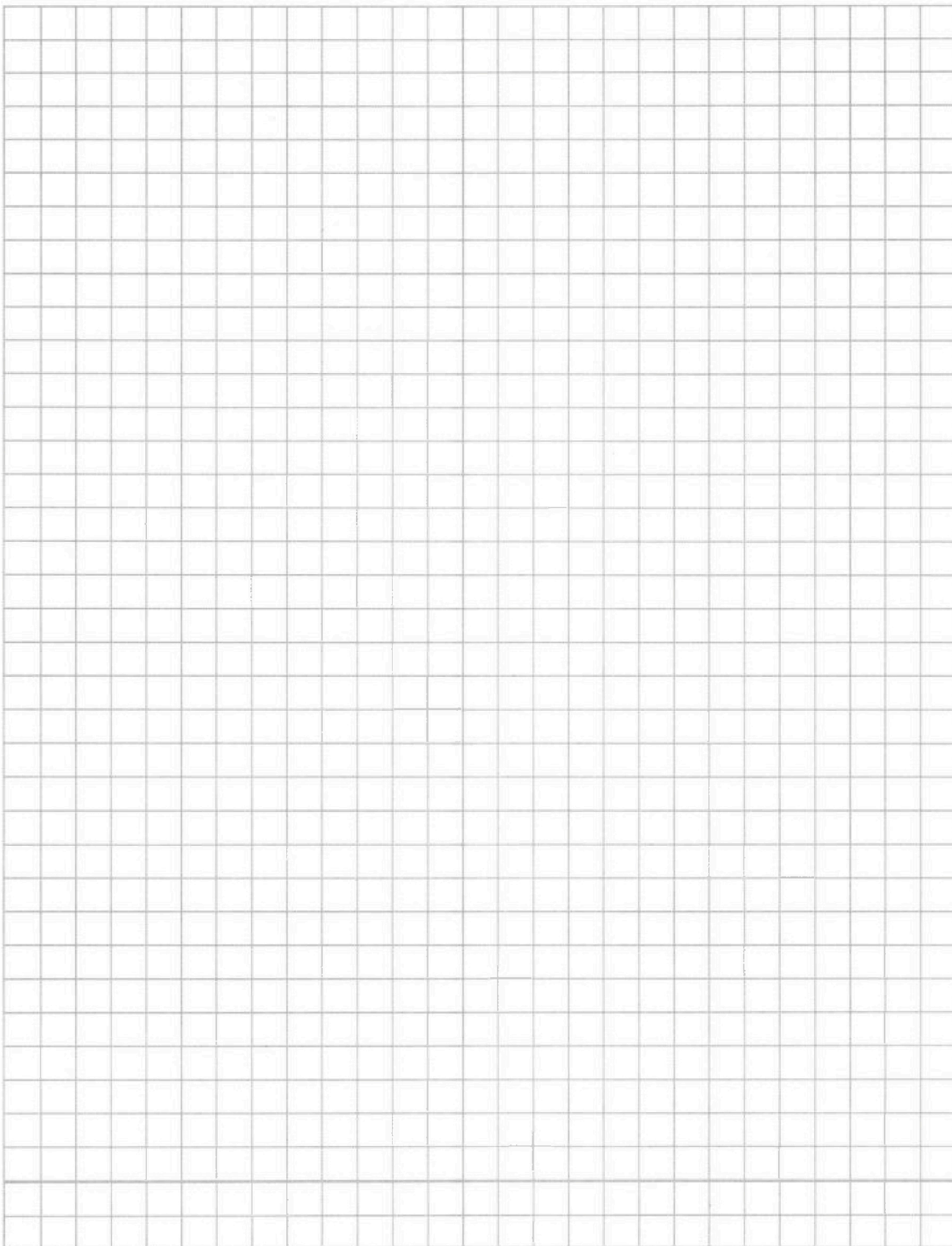


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 = 2^2(9 - t^2)$$

$$t \in [-3; 3]$$

$$x = \frac{-4\sqrt{2}t \pm \sqrt{D}}{2} = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2}$$

(1) $0 < a < 9 \Rightarrow$ (1) $-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} > 0$

(2) $0 < a < 9 \Rightarrow$ (2) $-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} < 0$

(1) $-2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2} > 0$

$$-2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2} \quad t < 0 \quad t \in [-3; -1]$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9 \Rightarrow t > 1, \text{ но } t < 0 \Rightarrow t < -1$$

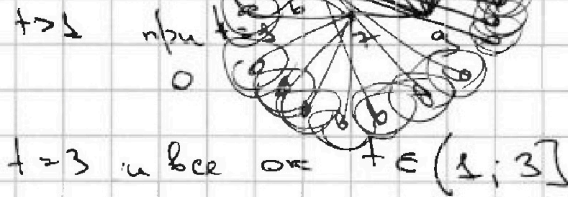
(2) $-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} < 0 \quad t > 0$

$$-2\sqrt{2}t < -\sqrt{9-t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9$$

$$t > 1$$



$$t = 3 \text{ и все ок } t \in (1; 3]$$

$a - b = 12 \Rightarrow$ четность ab

$$t \in [-3; -1] \cup (1; 3]$$

(1) оба чет.

$$k \cdot 4 + k + 4 + k + k + k = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$p = 2 \Rightarrow 19 \cdot 16 = 304$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 304$$

$$D = 3^2 + 4 \cdot 304 = 9 + 1216 = 1225 = 35^2$$

$$a+b = \frac{-3 \pm 35}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 16 \\ \hline 194 \\ 304 \end{array}$$

(2) оба 4.

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 55 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

(1) $a - b = 12; a + b = -19$

$2a = -7$ a не натур.

(2) $a - b = 12; a + b = 16$

$2a = 28 \Rightarrow a = 14; b = 2$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 25 \\ \hline 50 \\ 125 \\ \hline 304 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16 мест
12 мест.

поет: 1, 2, 3, ..., 11

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{4} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$-\frac{3}{4} + 2\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$

$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$

$\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\cos \beta = \frac{3}{4}$

$6^2 = x^2 + 4x^2 + 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{3}{4} = 8x^2 = 36$

$x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$AB = 2x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$BE=12$$

$$\begin{aligned} x-y &= 2 \\ 2(x-y) - x^2 - y^2 &= 1 \\ 2 \cdot 2 - x^2 - y^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$x-y=2$$

$$2(x-y) - x^2 - y^2 = 4 \neq 0$$

$$4 - x^2 - y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{нет}$$

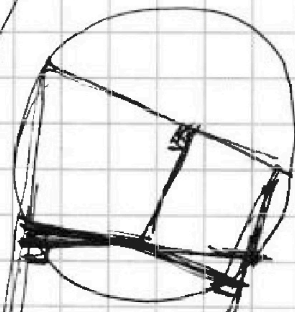
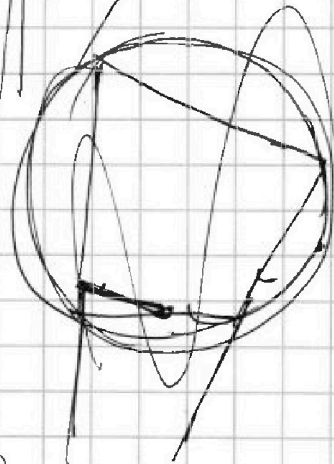
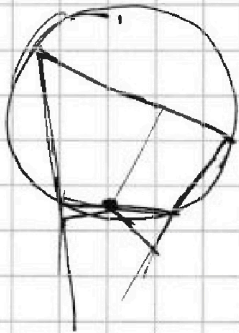
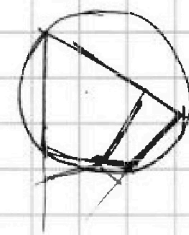
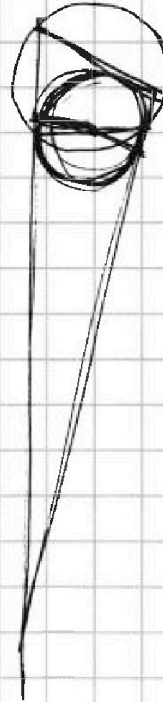
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = y + 2$$

$$y^2 + 2y + 4 + y^2 = 1$$

$$2y^2 + 2y = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 2x - 2y - x^2 - y^2 &> 0 \\ x - y - 1 &\in [-1; 1] \\ x - y &\in [0; 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x-y) &> x^2 + y^2 \\ \text{цр. ав.} \exists \quad x-y &= 0 \rightarrow 2 \cdot 0 > x^2 + y^2 \Rightarrow x=0, y=0 \\ x-y &= 1 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

