



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ gt^2 - g > 0 \end{cases}$$

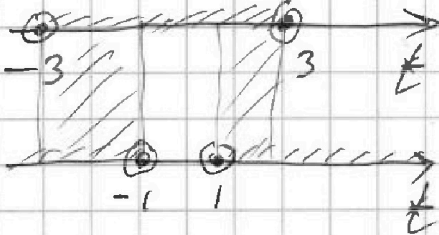
$$\begin{cases} 32t^2 - 4(gt^2 - g) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$m. k. x_1, x_2 = gt^2 - g$$

$$4(3t-1)(3t+1)$$

$$\begin{cases} 4(g-t^2) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(3-t)(3+t) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$a - b = 12$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$a - b = 12 \quad a = b + 12$$

~~лучше: $(a+b) : 19$~~

~~тогда если $p \neq 19$, то $(a+b+3) : 19$~~

$$(2b+12)(2b+12+3) = 19p^4$$

$$2(b+6)(2b+15) = 19p^4$$

Левая сторона - четная, значит

т.к. 19 - нечетное $p^4 : 2 \Rightarrow p = 2$

т.к. 2 единственное четное простое число

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152 \quad 2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$(b-2)(2b+31) = 0 \quad b = 2 \quad b = -\frac{31}{2}$$

$$a = 14 \quad a = -\frac{7}{2}$$

Ответ: $(14; 2); (-3,5; -15,5)$

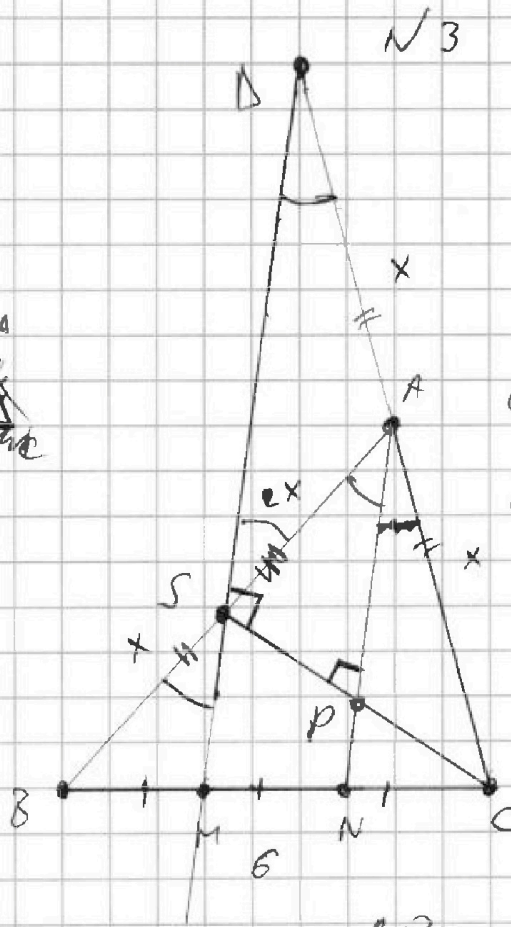
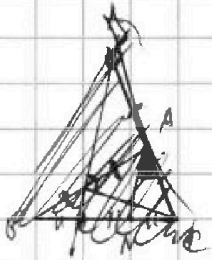


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CA$$

$$\triangle M \parallel AN$$

$$BC = 5$$

$$BM = MN = NC = 2$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

AN - ср. линия в

$\triangle BMC$ м.к AN // BM

$$NC = MN$$

$$AB = AC$$

S - точка пересечения

$$BM \subset AS$$

$$2AC = AS \quad AC = \frac{AS}{2}$$

$BS = AS$ м.к SM - ср. линия в $\triangle BNA$

$$\text{м.к } AB = AC = \frac{AS}{2} = AS \Rightarrow \angle ASC = 90$$

м.к $AS \perp SC \quad AS \parallel AN \Rightarrow AN \perp SC$

$\triangle SAC$ - равнобедренный м.к $AS = AC$

AP - высота \Rightarrow и биссектриса

$$\angle SAP = \angle PAC$$

по теореме косинусов:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle PAC = BC^2$$

$$\cos \angle CAN$$

$$\cos(2\angle CAN) = \cos \angle PAC$$

$$AC = x \quad AB = 2x$$

$$5x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4} = 6^2$$

$$3x^2 = 6^2$$

$$x^2 = \frac{36}{3} = 12$$

$$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AB = 2x = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{3} = AB$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
6 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Назовём деревом с $n > 1$ вершинами n -угольником. На ~~стороне~~ между ними может быть максимум 8 дорог (концы две стороны). Минимальное число дорог соединяющих n -угольником — 3. Докажем, что 2 быть не может.

Из n -угольника в другую сторону можно попасть либо напрямую, либо через n -угольник. Если дорог, соединяющих их — 2. Тогда из n -угольника, нельзя попасть в другую, т.к. 2 дороги могут соединить только 3 n -угольника, а их n . $k > 3$ — не подходит, иначе можно добраться > 1 маршрутом.

$$N_{\text{деревья}} = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 2k \quad k \in [3];$$

$$N_{\text{деревья}} = 25; \quad \text{~~23, 2, 19~~}$$

$$\text{Ответ: } 25; \quad \text{~~23, 2, 19~~}$$

$k > 3$ не подходит, иначе можно добраться > 1 маршрутом.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

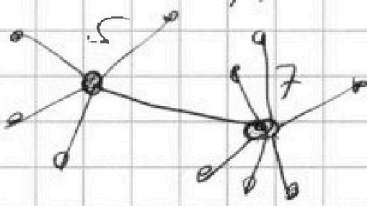
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a} \geq 2 - \sqrt{b}$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 4 + 1 - |x - y - 1| - 4\sqrt{x - y - 1}$$

Заметим, что для деревьев из кото-
рых выходит $n > 1$ дорога (из 4)
можно попасть в группу с $n > 1$ дорог \rightarrow доро-
гой. Например: из дерева с 5-ю доро-
гами можно попасть как минимум
в одну деревню с $n > 1$ дорогами

используя только одну дорогу



Если это больше так, то существо-
вует все еще дерево с $n > 1$
Если из деревни дорогами

~~можно проехать по
группе из 3-х дорог
из каждой деревни выходит n~~

Из деревни с числом дорог > 1
выходит k дорог в деревни с числом
дорог $n > 1$. $k \geq 1$ но $k \leq 4$;

Если $k = 0$; значит из деревни
с $n > 1$ дорогами нельзя попасть
в группу ~~из~~. Так как из деревни

с 1 дорогой можно попасть только
обратно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

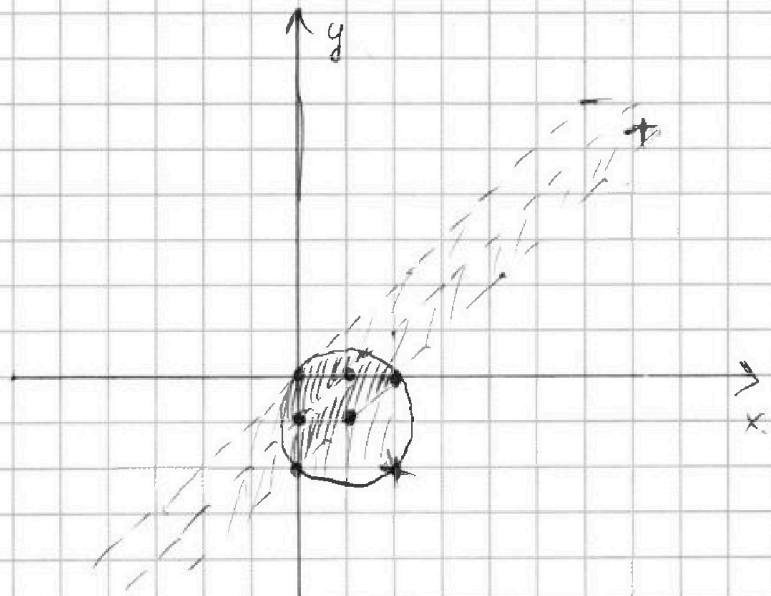
Графически определим область определе-
ния

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \text{ - окружность с центром } (1; -1)$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ 1 - x + y + 1 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 1 + x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$$



В указанной

области 6 точек точек $(0; 0)$ $(1; 0)$ $(2; 0)$

$(0; -1)$ $(1; -1)$ $(0; -2)$ точки, лежащие

на окружности: $\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 0$, диаметр

для границы касая на

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2 \text{ из 6 точек}$$

подходит 2: $(1; 0)$ $(0; -1)$ Ответ: $\begin{cases} (1; 0) \\ (0; -1) \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

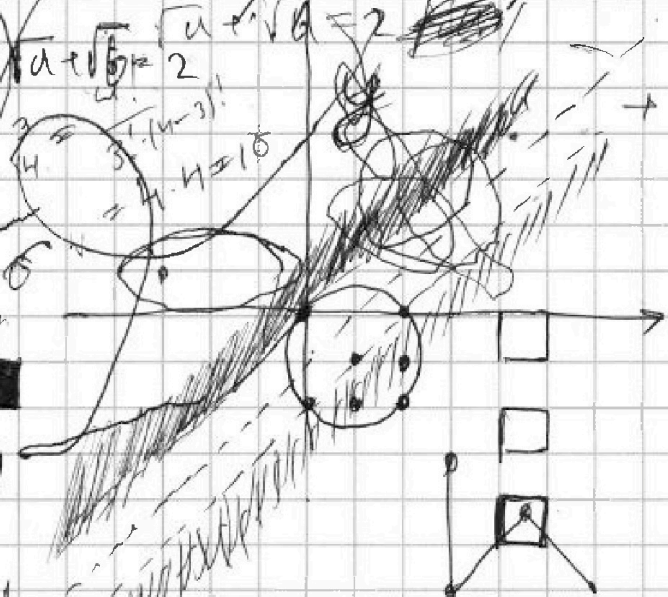
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 $y = \sqrt{1 - |x - y - 1|}$ или $y^2 = \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$
 $y^2 = 1 - |x - y - 1|$ $y^2 =$
 Коррелируем несколько значений по формуле $y^2 = 4y + 4 \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 = -y^2$
 $2y^2 + 4y + 4 = 0$ $2x - 2y - x^2 - y^2 = -y^2$
 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ $N_{\text{пар}} = 12$
 $2x^2 + 2(y+1)^2 + (x+1)^2$

на первые 4 партия: можно посадить a_1, a_2, a_3, a_4 . Если посадить a_5 и больше, то не получится т.к. посадимся как минимум 2 свободные партия

1	2	3	4
5	4	3	8



$\sqrt{1 - |x - y - 1|} \geq 0$
 $|x - y - 1| \geq 1$
 $x - y - 1 \geq 1$ $x - y \geq 2$
 $x - y - 1 \leq -1$ $x - y \leq 0$
 $y \geq x - 2$
 $-x + y + 1 \geq x$

1	2	$a + b = 2$
	3	
1	3	
2		

$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$ $2x - 2y - x^2 - y^2$
 $x^2 - 2x + y^2 + 2y \leq 0$ $+ \sqrt{1 - |x - y - 1|}$
 $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$



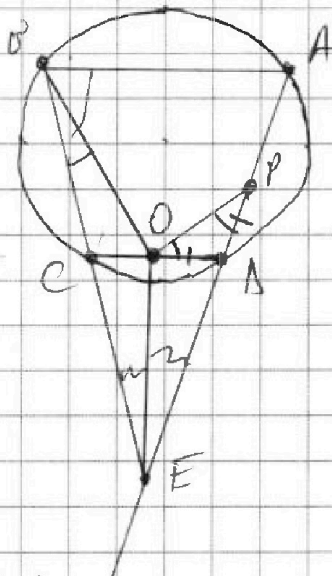
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5



Отложим на AD P

$$PA = OA$$

точка O лежит

на биссектрисе угла

$$\angle AOE$$

$$\angle CBO = \angle OPA$$

$$\angle CPA = \angle CDE \text{ м.к. } ABCA$$

- вписанный

$\triangle OPA$ - равнобедренный \triangle

$$\angle DOP = \frac{\angle CAE}{2}$$

$$\triangle BOE \sim \triangle POE \text{ м.к. } \angle EBO = \angle OPE;$$

$$\angle BEO = \angle PEO$$

$$\frac{OE}{OE} = \frac{BE}{PA + AE} = 1$$

$$BE = OA + AE = 12$$

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
8 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Докажем, что число дорог между
большими деревьями 3: Если белая
тем 3, то из одной обязательно
можно попасть в группу 2-ух
способами если дорога меньше
тем 3 то в одну большую целозу
попасть из группы, т.к. группа
содержит 4 дерева нужно 3 дороги

$$N_{\text{деревья}} = 4 + 5 + 5 + 7 + 9 - 2 \cdot 3 = 25$$

Докажем, что существует только
один маршрут из концы в
концы. Концы маленькие деревья
содержат в только с 1 большой
А любая две большие содержат
~~только~~ можно пройти только
1 способ.

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 черновик

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 2 - \sqrt{1-|x-y-1|}$
 $180 - \alpha + 180 - (180 - 2\alpha + \beta)$
 $+ 180 - (180 - 2\beta + \alpha)$
 2180
 $x \geq -x+y+1$
 $y \leq x$
 $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{AE} = \frac{OE}{AE}$
 $\frac{OE}{CE} = \frac{OE}{AE} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{AE}$
 $\frac{PA+PE}{BE} = \frac{OP}{OB} \geq |x-y-1| \geq 0$
 $\frac{OP}{OB} \geq x-y-1$
 $x^2+y^2-2x+2y \leq 0 \quad (5+5+7+9+11) \cdot 2$
 $2 \leq \sqrt{1-|x-y-1|}$
 $4 = 1 - |x-y-1|$
 $4 = 1 - x + y + 1 \quad 2 = -x + y$
 $2 \geq x - y$
 $y \geq x - 2$

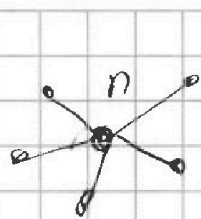


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

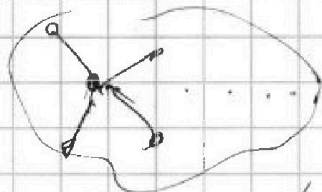
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если $k=0$



$$y + x - y - \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} \geq 0$$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

$$- \sqrt{|x - y - 1|} = 2$$

Пусть $k=3$, тогда (для определенности из дерева $n=5$) можно показать

в каждую вершину ($n=5, n=7, n=9$)

конвергентно. $x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq 5$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

Вершина = $\sqrt{2+3} + 4 + (5-3) + (5-1) + (7-1)$

$$+ (9-1) = 25 \quad | - |x - y - 1| \geq 0 \quad | - x$$

Если это была вершина с $n=5$; то Вершина

то же. $Вер = 4 + (5-3) + (5-1) + (7-1) + (9-1) = 25$

Пусть $k=2$ тогда (для определенности из дерева $n=5$) можно показать то же в 2

вершина с $n > 1$ (пусть будут $n=7, n=9$)

из орды $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2x - 2y - x^2 - y^2 = 4$

$$x - y - 1 \geq 0 \quad | - |x - y - 1| - 0 = 2 - \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

$$| - x + y + 1 \geq 0 \quad \sqrt{-(x+y)^2} \geq -x - 2$$

$$y \leq x - 1 \quad | + x + y + 1 \geq 0 \quad y \geq -x - 2$$

