



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$gt^2 - g > 0$$

$$g(t^2 - 1) > 0$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$\begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

№1  
Трансформация корней в квадратичном трёхчлене  $gt^2 - g$ , знаем,

$x_1 + x_2 = 4\sqrt{2}t$  При этом, т.к. имеются два корня, то

$x_1 \cdot x_2 = g(t^2 - 1)$  дискриминантом ( $D$ )  $> 0$ , а  $D = \{$  это:

$$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(g(t^2 - 1)) > 0$$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

$$9 - t^2 > 0$$

$$(3-t)(3+t) > 0$$

$$(t-3)(t+3) < 0$$

$$\begin{cases} t < 3 \\ t > -3 \end{cases}$$

Ответ:  $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + (a+b) \cdot 3 = (a+b)(a+b+3)$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$a+b$  и  $a+b+3$  если и имеют общий множитель, то ~~предполо~~

он делит 3. П.к. по алгоритму Евклида;  $\text{НОД}(a+b;$

$a+b) = \text{НОД}(a+b; 3)$ . Значит, если  $p \neq 3$ , то

$a+b$  и  $a+b+3$  взаимнопросты, значит, первое из них  $\neq 1$ , т.е.  $a+b = 1$ , но  $a$  и  $b$  — натуральные, значит  $a \geq 1$  и  $b \geq 1$ , значит  $a+b \geq 2$ , но  $a+b = 1$  — противоречие, значит  $p = 3$ .

Значит, есть два варианта  $p = 3$  и  $p \neq 3$ . Если  $p = 3$ ,

то т.к. одно из чисел делит 3, то и второе тоже.

При этом они не могут оба  $\geq 9$ , т.к. их НОД делит 3.

И.е. либо  $a+b = 3$ ;  $a+b+3 = 19 \cdot 27$ , но  $3+3 \neq 19 \cdot 27$ ,

либо ~~19~~<sup>27</sup>  $a+b = 19$ ;  $a+b+3 = 19 \cdot 3$ , но ~~19~~  $27+3 \neq 19 \cdot 3$

Если  $p \neq 3$ , то  $a+b$  и  $a+b+3$  — взаимнопросты, т.е.

либо  $a+b = 1$ ;  $a+b+3 = 19 \cdot p^4$ , но  $19 \cdot p^4 \geq 19 \cdot 2^4 > 1+3$ ,

либо  $a+b = 19$ ;  $a+b+3 = p^4$ , но  $19+3 = 22 \neq p^4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

лбо  $a+b = 2^4$ ;  $a+b+3=19$  ;  $19-3=16=2^4$ ,  
н<sub>2</sub> (продолжение)

т.е.  $a+b = 2^4 = 16$ .

$$\begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$$

ответ: 14; 2.

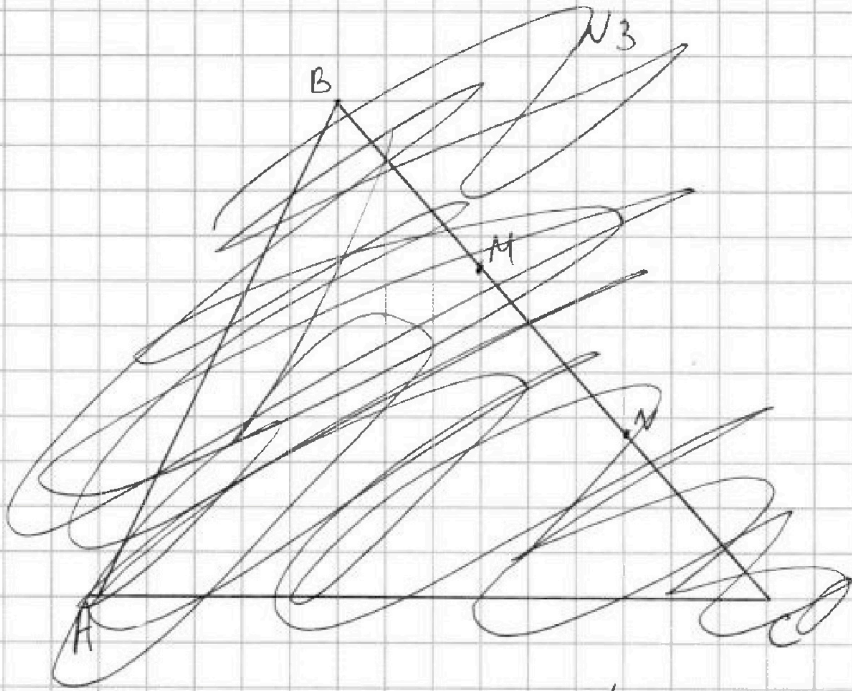


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

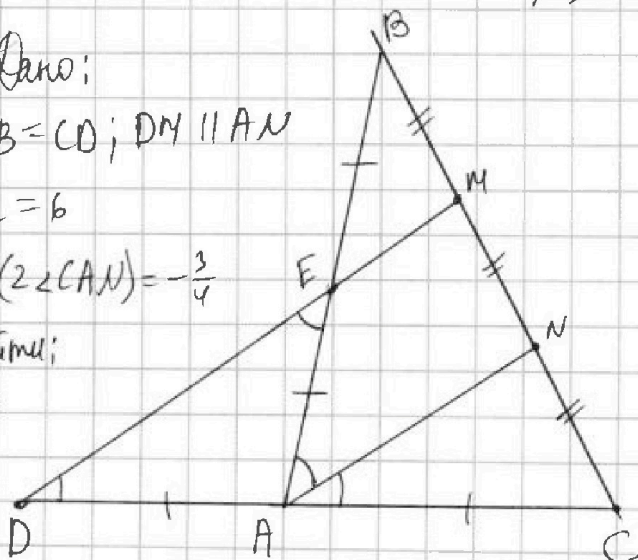
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  
 $AB = CD$ ;  $DM \parallel AN$   
 $BC = 6$   
 $\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$   
 Найти:  
 $AB$



~~Решение~~  
~~...~~  
~~...~~  
~~...~~  
~~...~~  
~~...~~

Решение: Пусть E - точка пересечения AB и DM

1) м.к.  $AN \parallel DM$ ; а  $NC = NM$ , то  $AN$  - ср. лк.  $\triangle CDM$ ,  
 значит  $AD = AC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$  ( $AB = CD$ )



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

2) т.к. ~~DM~~  $DM \parallel AN$ , то  $EM \parallel AN$ , более того  $BM = MN$ ,  
значит  $EM$  - ср. лин.  $\triangle ANB \Rightarrow EB = EA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ .

~~$AD = AE$~~ , значит  $EB = EA = AD = AC$

3) т.к.  $AD = AE$ , то  $\angle ADE = \angle DEA$

4) т.к.  $DM \parallel AN$ , то  $\angle DEA = \angle EAN$  (как накр. лежа, с секущей  $EA$ )

5) т.к.  ~~$DM$~~   $DM \parallel AN$ , то  $\angle EDA = \angle NAC$  (как соответств., с секущей  $AD$ )

6) получим  $\angle NAE = \angle DEA = \angle ADE = \angle NAC$ , значит

$$\angle BAC = \angle NAE + \angle NAC = 2\angle CAN \Rightarrow \cos \angle BAC = \cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

7) по теореме косинусов:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

$$\text{также } AC = \frac{1}{2}AB; \cos \angle BAC = -\frac{3}{4} \mid BC = 6 \text{ (по условию)}$$

$$\text{значит } 36 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - 2 \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$36 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{3}{4}AB^2$$

$$36 = 2AB^2$$

$$AB = 3\sqrt{2} \quad (AB > 0, \text{ т.к. } AB - \text{сторона треугольника})$$

Ответ:  $3\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

размеры учеников по росту:  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

$a_{11}$ , где  $a_{11}$  - самый высокий ученик, а  $a_1$  - самый

низкий. При этом, заметим, что т.к. парты

12, а учеников 11, то ровно одна парты останется

в пустой. Школьники не видят доску только в

том случае, если на ближайшей парте спереди него сидит

ученик выше, чем он сам. Таким как во всех

оставших случаях он доску видит. (ученик ниже; нет

ученика; нет парты). То есть каждый ученик видит

доску в трёх случаях из четырёх. То есть количество

способов, умноженное на  $\frac{3}{4}$  есть количество способов,

в которых ученики хорошо видят доску. Всего

способов расставить 11 различных школьников на 12 различных

мест это  $12!$ ; т.е. ответ будет  $12! \cdot \frac{3}{4} = 11! \cdot 9$

Ответ: ~~12!~~  $11! \cdot 9$

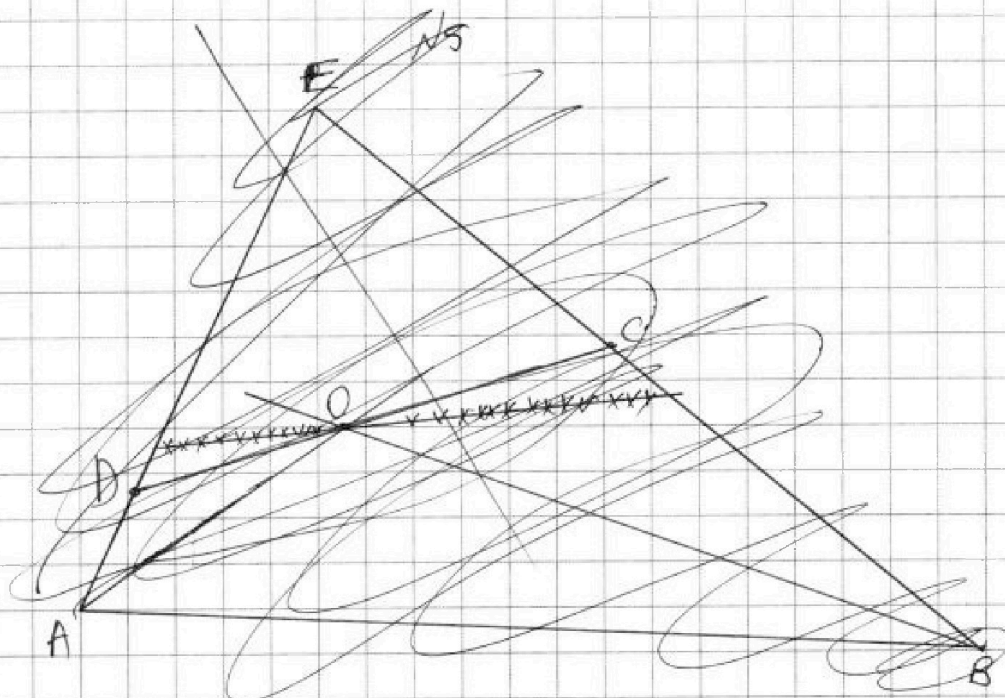


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

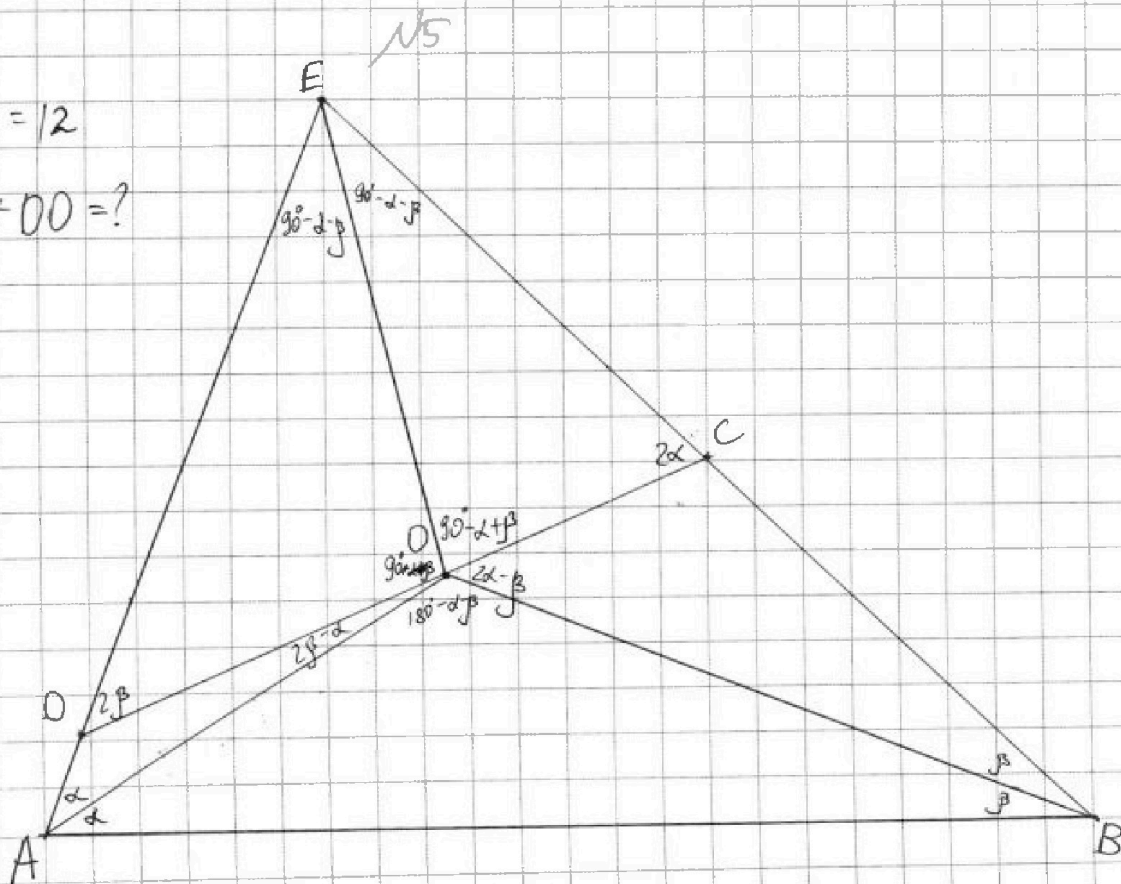
- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$BE = 12$   
 $ED + DO = ?$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть  $n$  - количество деревьев, из которых выведет по одной дороге. Тогда всего дорог -

$$\frac{5+6+7+9+n}{2}, \text{ т.к. каждую дорогу мы посчитали}$$

дважды (как исходящую и как входящую).

Представим задачу в виде графа, где вершины - деревья, а ребра - дороги. Тогда по условию в этом графе нет циклов, т.к. иначе между двумя деревьями в цикле есть хотя бы два пути: в одну сторону цикла и в другую. Но при этом граф связен, т.к. из любой вершины можно добраться в любую. А связный граф без циклов - это дерево, которое имеет ребер на один меньше, чем вершин, т.е. в нашем случае  $n+4 - 1 = n+3$ .

Тогда 
$$\frac{5+6+7+9+n}{2} = n+3.$$

$$2n+6 = 27+n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 21$$

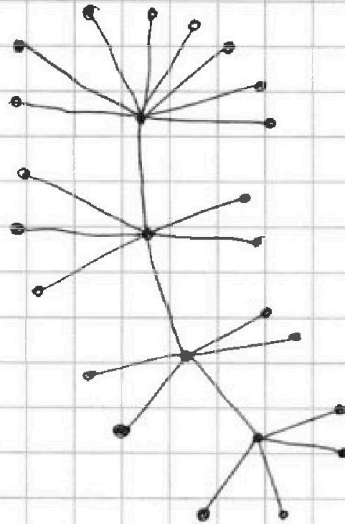
№ (продолжение)

$$2) n + 4 = 25 \text{ (всего деревьев на острове)}$$

~~Пример:~~

Пример:

Пример их  
ровно 25 и они  
удовлетворяют условию.



Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{7}$

$$\left. \begin{aligned} 2x - x^2 &= -(x-1)^2 + 1 \\ -2y - y^2 &= -(y+1)^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x - 2y - x^2 - y^2 &\leq 2, \\ \text{т.к. } (x-1)^2 &\geq 0 \\ (y+1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$1 - |x - y - 1| \leq 1, \text{ т.к. } |x - y - 1| \geq 0.$$

При этом, т.к.  $x$  и  $y$  целые, то и  $2x - 2y - x^2 - y^2$ , и  $1 - |x - y - 1|$  принимают только целые значения. Но  $2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$ , и  $1 - |x - y - 1| \geq 0$ , т.к. подкоренное выражение неотрицательно. Ил.е.  $\leq 2x - 2y - x^2 - y^2$  принимает значения ~~0~~ 0; 1; 2, а  $1 - |x - y - 1|$  — значения 0 и 1. Если первое выражение = 2, а второе = 1, то  $\sqrt{2+1} \neq 2$ ; если первое = 2, а второе = 0, то  $\sqrt{2} < 2$ , нет равенства; если первое = 1, а второе = 1, то  $2 = 2$  подходит; если первое 1, а второе 0, то  $1 < 2$  не подходит; если первое 0, второе 1, не подходит, если первое 0 и второе 0, <sup>то</sup> тоже не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7 (продолжение)

Ит.е. мы выяснили что  $\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 - |x - y - 1| = 1 \end{cases}$

т.е.  $\begin{cases} -(x-1)^2 + 1 - (y+1)^2 + 1 = 1 \\ 1 - |x - y - 1| = 1 \end{cases}$

Заметим, что  $-(x-1)^2$  и  $-(y+1)^2$  — целые, т.е.

они ~~приним~~ но при этом и  $-(x-1)^2$  ; и  $-(y+1)^2$

больше  $-1$ , т.к. если хотя бы одно из них  $< -1$ , то второе — больше  $0$ , а это невозможно,

т.к. квадрат — неотрицателен, значит ~~или~~ квадрат неотрицателен. Значит,  $-(x-1)^2$  и  $-(y+1)^2$  принимают

значения  $-1$  и  $0$ . При этом одно из них  $-1$ ,

а другое  $0$ , т.к. ~~никогда~~ в сумме они  $= -1$ .

Вспомогательная теперь второе урав. сист.:  $1 - |x - y - 1| = 1$

$$-|x - y - 1| = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$x = y + 1$$

Вернемся к первому. Есть два случая:  $\begin{cases} -(x-1)^2 = 0 \\ -(y+1)^2 = 0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В первом случае  $x=1$ ; во втором  $y=-1$ ,  
<sup>№7 (продолжение)</sup>

т.е. 
$$\begin{cases} x=1 \\ x=y+1 \\ y=-1 \\ x=y+1 \end{cases}$$
 но есть 
$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Это и будут ответы.

~~Ответ:  $x=1, y=0$  и  $x=0, y=-1$~~

Ответ:  $(1; 0)$  и  $(0; -1)$

~~Ответ:  $x=1, y=0$  и  $x=0, y=-1$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS

~~max(ED+DO)=?~~

$$\max(ED+DO)=?$$

$$BE=12$$

