



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парты перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 9t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0$$

x_1, x_2 - корни уравнения

$$9 - t^2 > 0$$

$$0 < x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9$$

$$(3-t)(3+t) > 0$$

$$0 < 9(t-1)(t+1)$$

$$t \in (-3, 3)$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$t \in (-3, 3)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-3, -1) \cup (1, 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(3+a+b)(a+b) = 19p^4$$

$$(15+2b)(12+2b) = 19p^4$$

$$2(15+2b)(6+b) = 19p^4$$

$$\Downarrow 19p^4 \div 2 \quad 19 \div 2 \Rightarrow p^4 \div 2$$

$\Rightarrow p \div 2$ т.к. p простое число

$$p = 2$$

$$2(15+2b)(6+b) = 19 \cdot 2^4$$

$$(15+2b)(6+b) = 19 \cdot 8$$

$$15+2b \text{ нечетно} \Rightarrow 12+2b \div 16$$

$$\Rightarrow 12+2b \geq 16 \Rightarrow b \geq 2 \text{ допустимо} \Rightarrow \text{все } b > 2 \quad 15+2b > 19$$

$$12+2b > 10 \quad 19 \cdot 8 = (15+2b)(12+2b) > 19 \cdot 16 \quad \text{⊗} \Rightarrow 2 \leq b \leq 2$$

$$b = 2 \quad (15+4)(12+4) = 19 \cdot 16 \quad \checkmark$$

$$a = 2 + 12 = 14$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AB = CD$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

$BM = MN = NC = \frac{1}{3}BC = 2$

K - пересечение DM и AB
KM и AN средние

Медианы $\triangle ABC$ и MCD совпадают и проходят через середины соответствующих сторон

$\Rightarrow DA = AC \quad AK = KB$

$AB = CD = 2AC = 2KB \quad KB = AK = AC = DA$

$\angle KAN = \angle DKA = \angle ABK \quad \angle KAC = 2\angle DKA$
 $\angle DAC = 2\angle DKA - \angle DKA = \angle DKA$

$\angle BAC = 2\angle CAN \quad AB = 2AC$

$6^2 = AC^2 + 4AC^2 - 2AC \cdot 2AC \cdot \cos \angle BAC = 5AC^2 + 3AC^2 = 8AC^2$

$\frac{3}{2} = AC^2 \quad AC = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad AB = 2AC = 3\sqrt{2}$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что, если мы какие-то все учеников на один ряд, то их порядок однозначно определен т.к. буквы карт нет, они будут упорядочены по росту. Возьмем учеников с ростом n, m, k . Допустим, они расселись $n \Rightarrow n < m < k$, а так, они упорядочиваются естественным способом.

если в ряду 2 ученика то возможно не рас-
скажем. На этом ряду 4: 3 когда меньший впер-
ди и 1 когда меньший порасту сзади

Всего способов выбрать ряд в картоне с
т.к. учеников 11, а мест 12 \Rightarrow будет 1 пустое место
 \Rightarrow 1 ряд с 2 учениками
способов выбрать такой ряд 4

способов распределить учеников по рядам

$$4 \cdot \left(\frac{11! \cdot 10! \cdot 3!}{0!} \cdot \frac{8! \cdot 7! \cdot 6!}{6!} \cdot \frac{5! \cdot 4! \cdot 3!}{0!} \right) = \frac{11!}{6^3 \cdot 2} \cdot 4 = \frac{11! \cdot 2}{6^3 \cdot 11} \cdot \frac{(11-3)!}{(11-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{(11-6)!}{(11-6)! \cdot 6!} \cdot 4$$

\Rightarrow способов выбрать ряд из 2-ух
способов распределить по
тремя рядам

$$\Rightarrow \text{всего способов } 4 \cdot \left(\frac{11! \cdot 2}{6^3} \right) = \frac{11!}{3^3}$$

способов распре-
деления внутри рядов

Ответ: $\frac{11!}{3^3}$

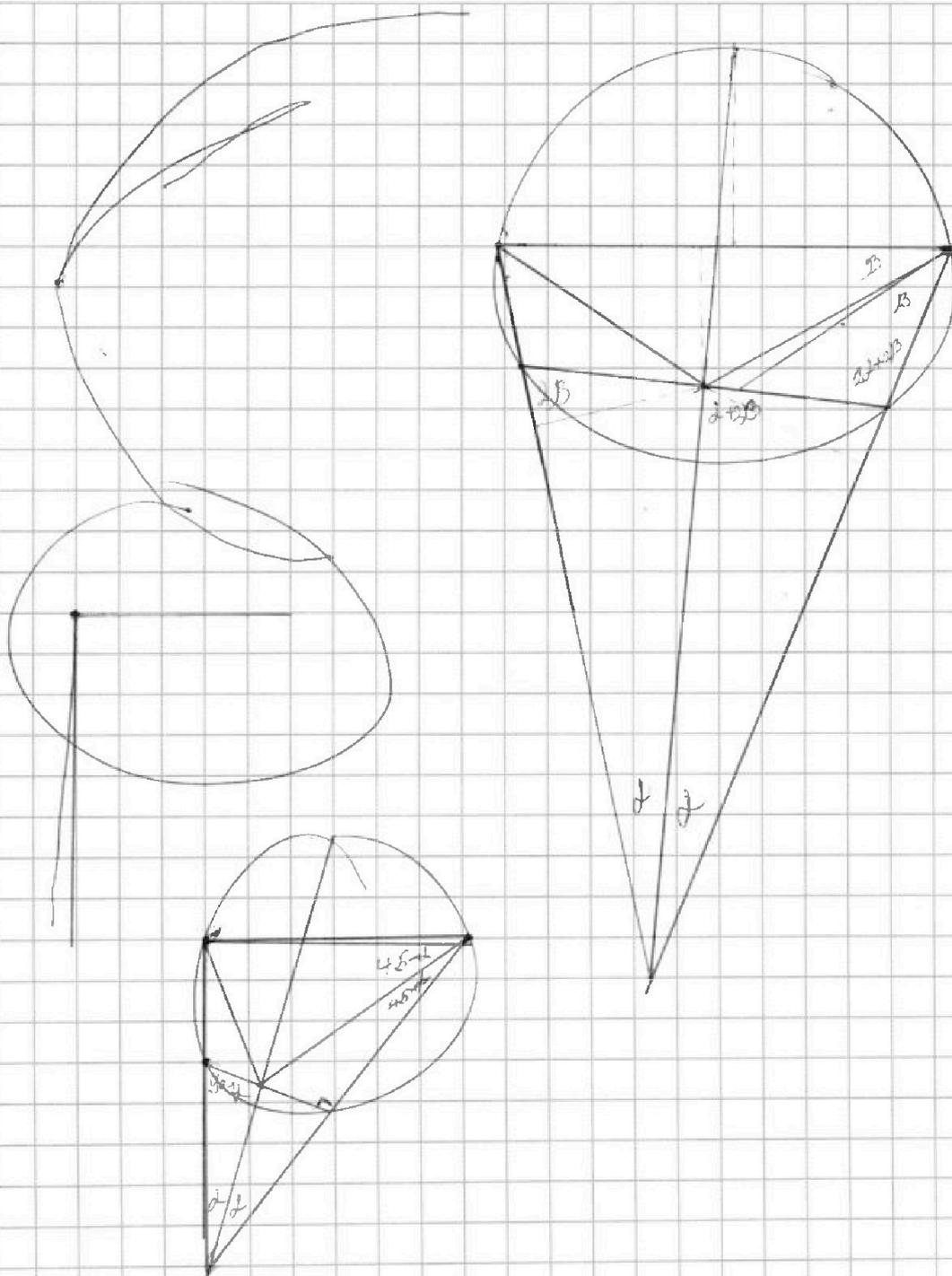


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



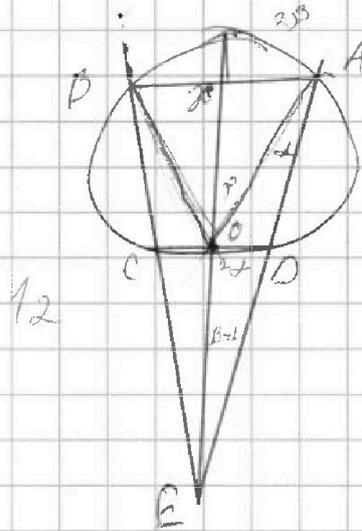
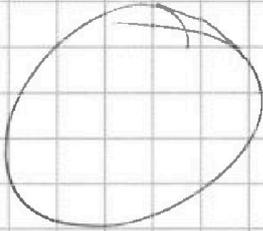


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ХЕЕОПВА

$$\frac{ED \cdot DC}{CE} = \frac{CO}{CO}$$

$$DC = \frac{CO \cdot ED}{CE}$$

$$ED \left(\frac{CE + CO}{CE} \right)$$

$$12 \left(\frac{CE}{AE} + \frac{CO}{AE} \right) = 12 \frac{CE + CO}{AE}$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{AE}{EB} = \frac{CO}{OD} = \frac{AZ}{ZB}$$

$$ED \cdot EA = CE \cdot BE$$

$$ED = \frac{CE \cdot BE}{AE}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{0x}$

$$2x \geq x^2 + 2y + y^2$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$1 \geq |x - y - 1| \Rightarrow x - y - 1 = \pm 1; 0$$

$$\text{если } x - y - 1 = -1$$

$$x = y$$

$$0 \geq x^2 + x^2 + x^2 \Rightarrow x = 0$$

$0 + 0 \neq 2 \Rightarrow$ нет решений

$$\text{если } x - y - 1 = 0$$

$$x = y + 1$$

$$2y + 2 = 2y - y^2 - 2y - 1 - y^2 \geq 0$$

$$1 - 2y^2 - 2y \geq 0$$

$$\sqrt{1 - 2y^2 - 2y} = 2y(y + 1)$$

$$\sqrt{1 - 2y^2 - 2y} + 1 = 2$$

$$\sqrt{1 - 2y^2 - 2y} = 1$$

$$1 - 2y^2 - 2y = 1$$

$$2y^2 + 2y = 0$$

$$2y(y + 1) = 0$$

$$y = 0; -1$$

$$(1; 0) \text{ и } (0; -1)$$

$$\text{если } x - y - 1 = 1$$

$$x = y + 2$$

$$\sqrt{4 - 2y^2 - 4y - 4} + \sqrt{1 - 1} = 2$$

$$\sqrt{-2y(y + 2)} = 2$$

$$-2y(y + 2) = 4$$

$$y(y + 2) = -2$$

$$\text{если } y \geq 0 \quad y(y + 2) \geq 0 \text{ (⊗)}$$

$$\text{если } y \leq -2 \quad y(y + 2) \geq 0 \text{ (⊗)}$$

$$\Rightarrow y = -1$$

$$-1 \cdot 1 \neq -2$$

ответ: $(1; 0)$ $(-1; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

представим задачу в виде графа дерева - вершины, доречи - ребра.

n - всего деревьев

Значит по условию граф связный. Допустим

в нем есть цикл \Rightarrow если взять 2 дерева из этого цикла способом копирования из одной в другую будет хотя бы 2 \Rightarrow этот граф без циклов

\Rightarrow граф - дерево \Rightarrow всего ребер $n-1$

$$\text{но из условия } \frac{(n-4) \cdot 1 + 5+6+7+8+9}{2} = \frac{n+23}{2} = n-1$$

$$n+23 = 2n-2$$

$$n = 25$$

Ответ: 25

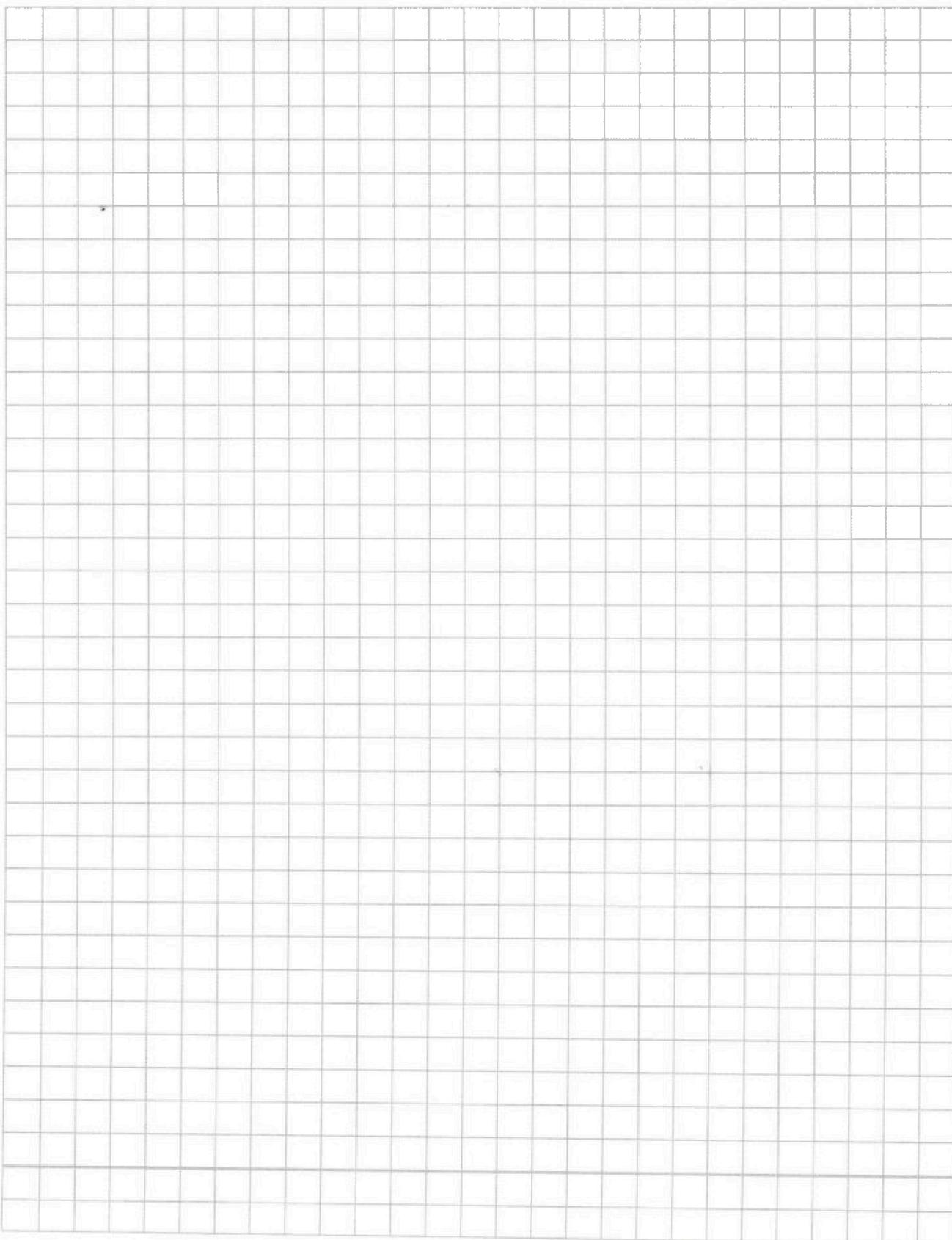


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

