



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Дано:

$a$  - арифмет. прогр.

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = (-3x^2)$$

Решение:

1)  $a_7 = x^4 - 8x^3 + 16x^2$

2) назовем  $P$  - разности нашей прогрессии

3) Тогда  $a_7 = a_5 + 2P$ ,  $a_{11} = a_5 + 6P$ ,  $a_{11} = a_7 + 4P$

4)  $a_{11} - a_7 = 4P$  :  $-3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 4P$

5)  $2(a_7 - a_5) = 4P$  :  $2(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18) = 4P$

6)  $-3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36$

$$0 = 3x^4 - 24x^3 + 17x^2 - 12x - 36 \quad | :3$$

$$0 = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$$

$$0 = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$$

$$0 = (x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3)$$

~~0 = (x-2)(x-2)(x-2)(x+1)(x-3)~~

корни  $x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$

7) Заметим, что  $a_7 \geq 0$ ,  $a_{11} \leq 0 \Rightarrow a_5 \geq 0$  т.к. арифмет. прогр. монотонна.

8) Подставим наши  $x$  :  $x_0 = 2$ ;  $x_1 = 2 + \sqrt{7}$ ;  $x_2 = 2 - \sqrt{7}$

для  $x_0$ :

$$a_5 = 30$$

$$a_7 = (4-8)^2 = 16 \quad \left. \begin{array}{l} 2P = 14 \Rightarrow P = 7 \\ 4P = -28 \Rightarrow P = -7 \end{array} \right\}$$

$$a_{11} = -3 \cdot 4 = -12$$

$x = 2$  - не годится

$x_1$ :

$$a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7} \quad \left. \begin{array}{l} 2P = -21 - 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 - 3\sqrt{7} \\ 4P = -42 - 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 - 3\sqrt{7} \end{array} \right\}$$

$$a_7 = (4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = -3(4 + 4\sqrt{7} + 7) = -33 - 12\sqrt{7}$$

$x = 2 + \sqrt{7}$  - не год.

$x_2$ :

$$a_5 = 12 - 6\sqrt{7} + 18 = 30 - 6\sqrt{7} \quad \left. \begin{array}{l} 2P = -21 + 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 + 3\sqrt{7} \\ 4P = -42 + 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 + 3\sqrt{7} \end{array} \right\}$$

$$a_7 = (4 - 4\sqrt{7} + 7 - 8 + 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = -3(4 - 4\sqrt{7} + 7) = -33 + 12\sqrt{7}$$

$x = 2 - \sqrt{7}$  - не год.

Ответ:  $x = 2$ ;  $x = 2 + \sqrt{7}$ ;  $x = 2 - \sqrt{7}$  не годится.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Других корней нет т.к. все они дают отрицательные значения. П. 4, 5, 6 не найдем все решения уравнения из п. 6. => мы найдем все корни.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2:

Дано:

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

Найти:

$$14x + 7y - \min = ?$$

Решение:

1) Две неравенства решим системой:

$$|4x - 3y| \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 4x - 3y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 + \frac{3}{4}y \\ x \leq 1,5 + \frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-1,5 + \frac{3}{4}y; 1,5 + \frac{3}{4}y\right]$$

$$|3x - 4y| \leq 8 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y \geq -8 \\ 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ x \leq 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y; 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right]$$

$$x \in \begin{cases} \left[-1,5 + \frac{3}{4}y; 1,5 + \frac{3}{4}y\right] \\ \left[-2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y; 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right] \end{cases} \quad (I)$$

2)  $14x + 7y = 7(2x + y) \Rightarrow$  если мы хотим, чтобы выражение  $14x + 7y$  было  $\min$ , то это будет выполняться при  $2x + y - \min$  (II)

3) Найдем, для каких  $y$  может выполняться (I):

$$1,5 + \frac{3}{4}y \geq -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \Rightarrow \frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)y \Rightarrow \frac{5}{4} + \frac{8}{3} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{18+32}{12} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{50}{12} = \frac{5}{12}y \Rightarrow y = \frac{50}{5} = 10$$

$$-1,5 + \frac{3}{4}y \leq 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \Rightarrow -\frac{6}{4} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}y \Rightarrow y = \frac{-50}{4} = -12,5$$

Мы знаем это ~~интервал~~, посмотрев на графики.  $\Rightarrow y \in \left[-12,5; 10\right]$  (II)

4) Найдем, что для каждого значения  $y$ , выражение (II)  $\min$ , при наибольшей  $x$ , наименьшей возможной  $x$  при  $y$  удобен (III)

$x = \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right)$ , очевидно, что чем меньше  $y$ , тем меньше  $x \Rightarrow$  вып-ние (III) -  $\min$  при  $x = \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right)$

$$x = \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right) \Rightarrow 14x + 7y = 7 \cdot \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right) + 7y$$

$$x = -\frac{6}{4} - \frac{150}{28} = -\frac{42}{28} - \frac{150}{28} = -\frac{192}{28} = -\frac{48}{7}$$

$$2x + y = -\frac{96}{7} + \frac{50}{7} = -\frac{46}{7} \Rightarrow 14x + 7y = -146$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Проверим, подходит ли  $y = -\frac{50}{7}, x = -\frac{48}{7}$  для усл. :

$$\left| -\frac{102}{7} + \frac{150}{7} \right| = |-6| \leq 6 \quad (\checkmark)$$

$$\left| -\frac{144}{7} + \frac{240}{7} \right| = |-8| \leq 8 \quad (\checkmark)$$

Ответ:  $14x + 7y - \min = -146$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Найти

$(m; n)$ : ~~13; 3~~

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n \quad 13p^2$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn \quad 3q^2$$

Решение:

~~1)  $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3)$~~

~~2)  $A = (m - n)^2 + 9(m - n) = (m - n)(m - n + 9)$~~

~~3) Найдем, что если  $A$  или  $B = 13p^2$  или  $3q^2$ , то будет на ~~только~~ множ. в  $A$  и в  $B$  может быть только 3 ~~раз~~ делится.~~

~~4) Тогда посмотрим на  $B$  ①:  $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3)$  если  $m, n > 1$~~

~~то  $m, n, (m - n + 3)$  - простые числа при чем два из них равны по~~

~~дуге. если  $m = n$ , то  $B = 3m^2$ , если  $m = m - n + 3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow$~~

~~$B = 3m^2$ , если  $n = m - n + 3$ , то  $2n = m + 3$ , а т.к.  $m, n$  - простые,~~

~~то  $m = 13$  или  $m = 3 \Rightarrow 2n = 6$  или  $2n = 16 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$  или~~

~~$2n = 16 \Rightarrow n = 8$  - не может быть  $\Rightarrow$  тогда только  $m = n = 3$ , и тогда  $B = 3m^2$~~

~~• если  $m, n$  или  $(m - n + 3) = 1$ , то~~

~~$m = 1 \quad B = n(4 - n) = 4n - n^2 \Rightarrow n < 4 \Rightarrow n = 2$  или  $n = 3$ , не годит~~

~~$n = 1 \quad B = m(m - 2) = m^2 - 2m \Rightarrow \begin{cases} B = 13 \\ B = 3 \end{cases}$~~

~~3) Найдем, что если  $A = 3q^2 = (m - n)(m - n + 9)$ , то  $m - n : 3$  или~~

~~$m - n + 9 : 3$ , но если  $m - n : 3$ , то и  $m - n + 9 : 3$ , и тогда т.к.  $9 : 3$~~

~~$\Rightarrow A = 3q^2 = 3k \cdot 3 \Rightarrow q^2 = 3k \Rightarrow q = 3 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow A = 27$ , ~~тогда~~ посмо~~

~~трим, как мы можем получить  $A = 27 = k(k + 9) = 3^3 \Rightarrow k = 1, 3, 9$  или~~

~~$-1, -3, -9, (k + 9) = 1, 3, 9$  или  $-1, -3, -9$ , найдем  $m - n = k$  это никак мы не~~

~~можем найти  $k$  и  $k + 9$  в  $\mathbb{Z}$  условию, т.к. они оба на~~

~~9, а среди  $-1, -3, -9, 1, 3, 9$  нет числа отн. на 9  $\Rightarrow A \neq 3q^2 \Rightarrow$~~

~~$A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2$~~

~~4) Из 1) найдем, что  $(m - n) : 13$  или  $(m - n + 9) : 13$ , а  $m : 3$  или~~

~~$n : 3$  или  $(m - n + 9) : 3$ , причем если  $(m - n + 9) : 3$ , то и  $m - n : 3$  и~~

~~$(m - n + 9) : 3 \Rightarrow A : 9 \Rightarrow A = 13 \cdot 9 = 117$ , при этом  $B = 3q^2 = m \cdot n \cdot 3l \Rightarrow$~~

~~$m \cdot n \cdot l = q^2$~~

~~$\begin{cases} m - n = 13 \cdot 9 \\ m - n + 9 = 13 \cdot 9 \end{cases}$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Попробуем, что  $m > n$ , т.к. если  $m = n$ , то  $A = 0$ , если  $m < n$ , то  $A > 0 \Rightarrow m - n + 9 < 0 \Rightarrow m - n + 3 < 0$ , а  $m, n > 0$  по условию  $\Rightarrow *$

6) (из п. 5) Попробуем, что если  $m > n$ , то  $(m - n + 9) > 9$ ,  $(m - n) \geq 1$ ,  $(m - n + 3) \geq 4 > 3$ , максимум получим, что  $m > 1$

7) Попробуем, что если  $B = 3q^2$ , то либо  $m \equiv 3$ , либо  $n \equiv 3$  либо  $(m - n + 3) \equiv 3$ , тогда пусть  $(m - n) = 3l$   
 $A = 13q^2 = 9l(l+3)$

$l(l+3) = 13$  не имеет решений в  $\mathbb{Z} \Rightarrow (m - n + 3) \not\equiv 3$ .

$\Rightarrow m \equiv 3$  либо  $n \equiv 3$  или  $(m - n) \equiv 3$

8)  $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3) = 3q^2$  если  $n \equiv 3$ , то  $n = 3s$

$$B = m \cdot 3s(m - 3s + 3) = 3q^2$$

$$m \cdot s(m - 3s + 3) = q^2$$

$m - 3s + 3$  простое,  $(m - n + 3)$  тоже простое  $\Rightarrow s = 1$

$$m \cdot (m - 3) = q^2 \Rightarrow m = q, n = 3$$

если  $m \equiv 3$ , то  $m = 3r$

$$B = 3r \cdot n(3r - n + 3) = 3q^2 \Rightarrow 2 \cdot n(3r - n + 3) = q^2$$

$n = 1 \Rightarrow 2(3r + 2) = q^2$   
 ~~$3r + 2$~~   
 не имеет решений в  $\mathbb{Z}$   
 $n - 3$  простое  $\Rightarrow$   
 $r = 1$

Итак, образцы  $n = 3, m = q$  - верно, где  $B = 3q^2$

9) Посмотрим на  $A$ :

$$A = 13p^2 = (m - n)(m - n + 9) \Rightarrow (m - n) \equiv 13 \text{ или } (m - n + 9) \equiv 13$$

если  $m - n \equiv 13$   
 $q - 3 \equiv 13$   $q - 3$  простое,  $q > 3 \Rightarrow q - n \cdot 2 = q - 3 - \text{чет}$ .

$\Rightarrow q - 3 \equiv 13 \cdot 2 \Rightarrow p = 2$ , максимум мы знаем, что  $(m - n + 9) > (m - n) \geq 1 \Rightarrow$

$(m - n + 9)$  простое  $\Rightarrow m - n + 9 = 2$ , чего не может быть т.к.  $(m - n) > 0$ .

$(m - n + 9) \equiv 13$   $(q + 6) \equiv 13$   $q = 7$   $A = (7 - 3)(7 - 3 + 9) = 13 \cdot 4 \Rightarrow$  (не подходит)

$A = (q - 3)(q + 6) = q^2 + 3q - 18 = 13p^2$   $q > 7 \Rightarrow (q + 6)$  больше, чем простое (или больше простое делится).

$q > 7$ :  
 $A = (q - 3)(q + 6)$ ,  $q + 6$  больше чем простое  $\Rightarrow q - 3$  - простое.

$$(q + 6) = 13 \cdot m : A = 13 \cdot m \cdot (q - 3) = 13p^2 \Rightarrow m(q - 3) = p^2$$

$m \neq 1, m > 1$   
 $m$  простое  
 $q - 3$  ~~простое~~  $q > 7, q - 3$  простое  
 $\Rightarrow q - n \cdot 2 \Rightarrow q - 3 - \text{чет}, q - 3 > 4 \Rightarrow$   
 $q - 3$  - больше чем простое  $\Rightarrow$   
 $m(q - 3) \neq p^2 \Rightarrow q \leq 7 \Rightarrow q = 7$

Ответ:  $m = q = 7, n = 3$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Дано:

$$\ell \parallel AX$$

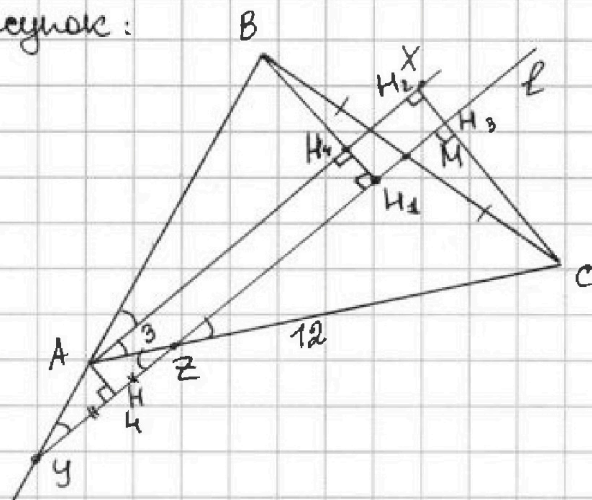
$$|AZ| = 9$$

$$|AC| = 12$$

$$|YZ| = 4$$

$$|BC| = ?$$

Рисунок:



Решение:

1) П.к.  $\ell \parallel AX \Rightarrow \angle BAX = \angle BYZ$ ,  $\angle CAX = \angle AZY = \angle BAX \Rightarrow \triangle YAZ \sim \triangle BAX$  по двум углам.

2) Тогда найдем высоту в  $\triangle YAZ$ , проведя из  $A$  перпендикуляр к  $YZ$ . По Тл. Пифагора и св-ву

$$h/\delta \triangle AH = \sqrt{AZ^2 - YZ^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

3) Проведем  $\perp$  из  $B$  на  $\ell$ , получим  $\{H_2\}$  и из  $C$  на  $AX$ , получим  $\{H_4\}$ , обозначим за  $\{H_3\}$  и  $\{H_4\}$  пересек.  $CH_2$  с  $\ell$  и  $BH_1$  с  $AX$  соответственно.

4)  $\angle AZY = \angle MZC$  как вертикальные  $\Rightarrow \triangle H_3CZ \sim \triangle H_2CA$  по тр-ву 3х углов

$$k_1 \text{ подобие} = \frac{CZ}{CA} = \frac{AC - AZ}{AC} = \frac{12 - 9}{12} = \frac{3}{4} = k_1$$

5)  $\angle BAN_4 = \angle BAH_1 \Rightarrow \triangle ABH_4 \sim \triangle YBH_1$  по тр-ву 3х углов,  $k_2$  подобие =  $\frac{BH_4}{BH_1}$

6) Имеем, что  $|H_1H_4| = |AH_1| = |H_2H_3| = \sqrt{5}$ ,  $|H_2C| \cdot k_1 = |H_3C| \Rightarrow |H_2C| - |H_1H_3|$

$$|H_2C|(k_1 - 1) = -|H_1H_3| = -\sqrt{5} \Rightarrow |H_2C| = \frac{-\sqrt{5}}{\frac{3}{4} - 1} = 4\sqrt{5} \Rightarrow |H_3C| = 3\sqrt{5}$$

7)  $\angle BMH_1 = \angle CMH_3 \Rightarrow \triangle BMH_1 \sim \triangle CMH_3$  по двум углам ( $\angle BMH_1 = \angle CMH_3$  и  $\angle BHM_1 = \angle CMH_3$ ) и стороне ( $|BM| = |CM| = \frac{1}{2}BC$ )  $\Rightarrow |CH_3| = |BH_1| = 3\sqrt{5}$ .

$$8) |BH_4| = |BH_1| - |H_1H_4| = 2\sqrt{5}$$

9) Из п. 5, 8  $k_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \Rightarrow |BY| \cdot k_2 = |BH_4| \Rightarrow |BY| = \frac{3}{2} |BH_4| = 3$

$$|BY| \cdot \frac{2}{3} = |BY| - |AY| \Rightarrow -\frac{1}{3}|BY| = -|AY| \Rightarrow |BY| = 9 \Rightarrow |AB| = 6$$

10) По Тл. Пифагора в  $\triangle ZCH_3$ :  $|ZH_3| = \sqrt{|ZC|^2 - |CH_3|^2} = \sqrt{81 - 45} = \sqrt{36} = 6$ .

11) По Тл. Пифагора в  $\triangle YBH_1$ :  $|YH_1| = \sqrt{|YB|^2 - |BH_1|^2} = \sqrt{81 - 45} = \sqrt{36} = 6$ .

$$12) |H_1H_3| = 2|H_1M| = |YH_3| - |YH_1| = |YZ| + |ZH_3| - |YH_1| = 4 \Rightarrow |H_1M| = 2 = |MH_3|$$

13) По Тл. Пифагора в  $\triangle MH_3C$ :  $|CM| = \sqrt{|MH_3|^2 + |CH_3|^2} = \sqrt{4 + 45} = \sqrt{49} = 7$ .

$$14) |CM| = \frac{1}{2}|BC| \text{ (по ант.)} \Rightarrow |BC| = 2|CM| = 14$$

Ответ:  $|BC| = 14$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

Решение:

$$1) 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$4x^4 + 5\sqrt{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y$$

$$4x^4 - 4y^4 = (2y^2 + 2x^2) \cdot (2y^2 - 2x^2) = 4(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 4(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

ОДЗ: (по картинке):

$$x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$y \geq -6; y \leq 5 \Rightarrow y \in [0; 5]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

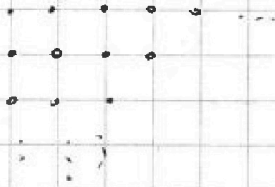
Задача 6

Дано:

квадрат  $9 \times 9$

$N$  раскрасок - ?

Рисунок:



Решение:

- 1) Найдем, что всего узлов в таком квадрате 100 (посчитаем их несложно: ~~100 - 99~~ в каждой строке их 10, строк тоже 10)
- 2) Тогда посмотрим, сколько способов их можем выбрать 2 узла пот. будем красить:  $\frac{100 \cdot 99}{2} = N$  так, чтобы изнач. (дв. вариантов раскраски были отличались)
- 3) Теперь рассмотрим повороты: они будут совершаться отн. центра поворотной симметрии квадрата (перес. диаг.) на  $90^\circ$ , очевидно, что при повороте большинства раскрасок на  $\frac{\pi}{2}$  (кроме некоторых, их мы разберем далее) мы будем получать раскраску отлич. от начальной  $\Rightarrow N' = \frac{N}{4}$  (т.к. поворот осущ. -ся 4 раза).
- 4) Теперь найдем, что еще будут раскраски, переходящие сами в себя при повороте на  $\pi$ , где  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$  такой раскраски нет, т.к. у нас красится 2 узла, а тогда 2 точки перешли бы на свои места тогда их раск. от центра было одинак. и тогда они сразу же сразу перешли бы из центра симм. Это  $180^\circ$ , и тогда они при любом повороте перейдут только на свое же место, но никак одновременно не поменяются местами.
- 5) Кол-во раскрасок подг. под  $(\pi, 4)$  - ~~1250~~ для 50 пар т.к. каждому узлу соотв. равно 1 симм. элемент отн. центра  $\Rightarrow$  в  $N$  мы посчитали 50 пар раскрасок, но их нужно делим пополам т.к. поворот на  $\pi$  и на  $\frac{3\pi}{2}$  дает нам уже пары раскраски.  $\Rightarrow N' + \frac{N}{4} = \text{итог} = \frac{100 \cdot 99}{8} + 12.5 = 1250$

Ответ:  $N_{\text{раскрасок}} = 1250$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Дано:

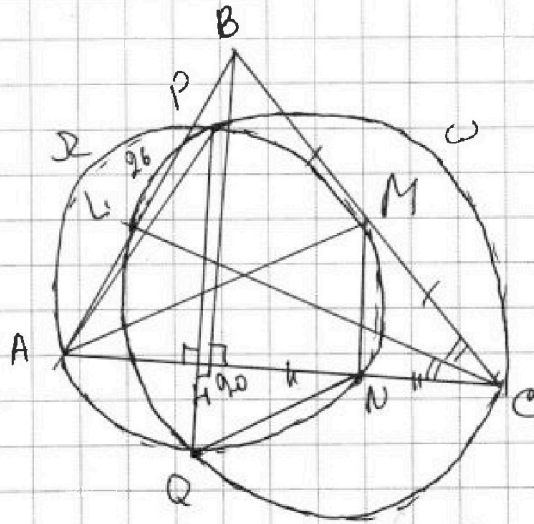
$$AP = 20$$

$$AB = 26$$

$$AC = ?$$

$$BC = ?$$

Рисунок:



Решение:

- 1)  $MN \perp AC$  т.к.  $\angle ANM$  опир. на диаметр  $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$
- 2)  $\angle MNC = \angle ANM = 90^\circ = 180^\circ - \angle ANM$
- 3)  $\triangle BNC \sim \triangle MNC$  по 2м углам, к подобие =  $\frac{1}{2}$
- 4)  ~~$AP = 20$~~

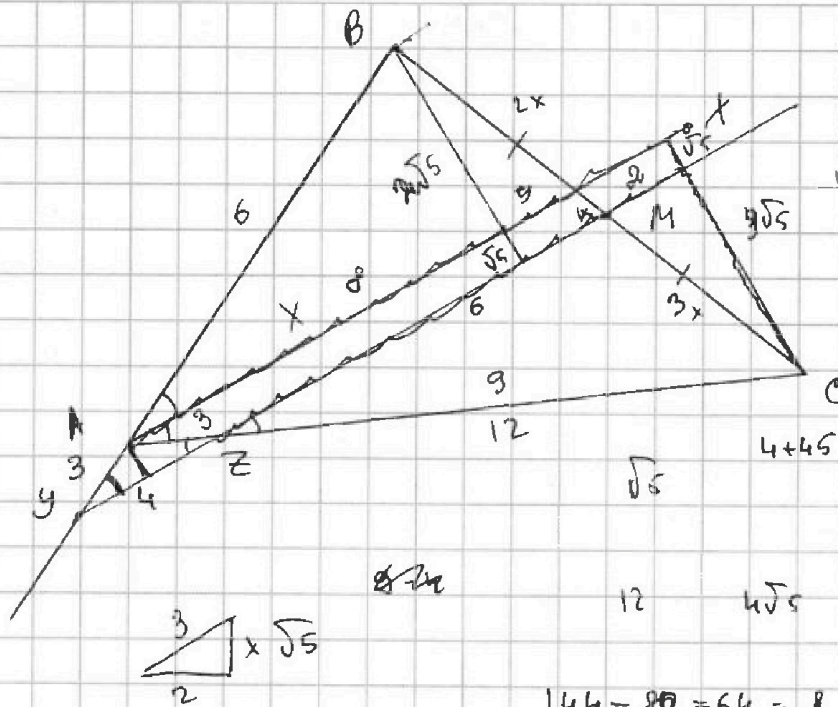


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

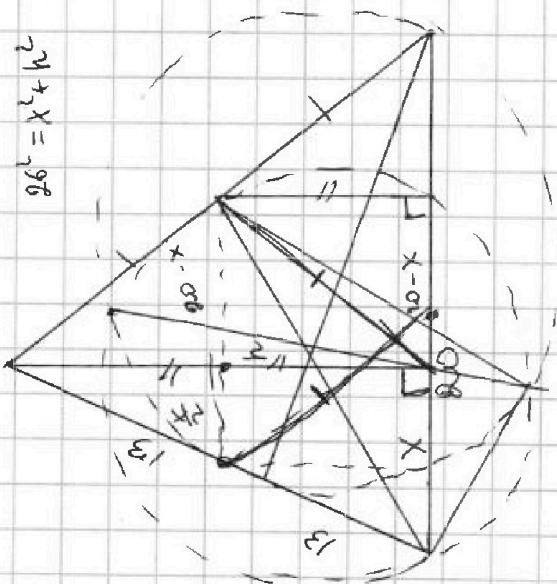
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



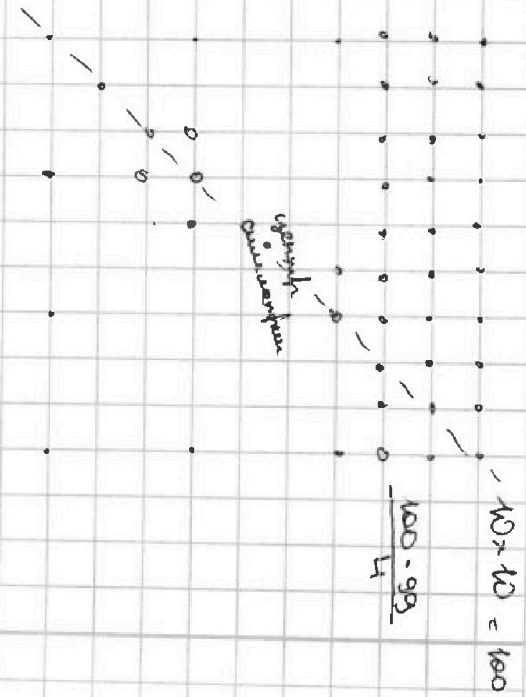
$BC = 9$   
 $AC = 12$   
 $AB = 6$   
 $yz = 4$

$144 - 80 = 64 = 8$   
 $81 -$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$   
 $4x^2 + x - 5\sqrt{5} = 4y^2 - 5\sqrt{x} + y$



$2y^2 + x = 96$



$10 \cdot \sqrt{10} = 100$   
 $\frac{100 \cdot 99}{4}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \\ x^4 - 2x^3 \\ \hline -6x^3 + 12x^2 \\ \phantom{-6x^3} + 5x^2 - 10x \\ \phantom{-6x^3} + 6x - 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} (x-2)(x^3 - 6x^2 + 12x + 6) = \\ = x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 12x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12 \\ x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 + 8x \\ \phantom{-4x^2} - 3x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4x - 3 \\ 4 \pm \sqrt{16+12} \\ \hline 2 \\ 2 \pm \sqrt{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad 28 \\ \hline 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{16-9}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{array}{l} |-36 - 30| \leq 6 \\ |-27 + 40| \\ 13 \end{array}$$

$$x = \max\left(-1.5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{50}{7}\right)$$

$$2 \cdot 3 \cdot (2)$$

$$|4k + 30| \leq 6$$

$$|3k + 40| \leq 8$$

$$-\frac{42}{2} = -6$$

$$x = \max\left(-1.5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{50}{4}\right)$$

$$13 \cdot 9 = 90 + 27 = 117$$

$$48 \cdot 2 = 96 \quad \left| -\frac{192}{4} + \frac{150}{4} \right| \leq 6$$

$$48 \cdot 4 = 192$$

$$48 \cdot 3 = 144 \quad \left| -\frac{144}{7} + \frac{100}{4} \right| \leq 8$$

$$A = 13q^2 = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = 3p^2 = m \cdot n \cdot (m-n+3)$$

$$A = 9k(k+9)$$

$$\begin{array}{l} k^2 + 3k = 13 \\ 3 \pm \sqrt{9+51} \\ 4 = 13 - 42 \end{array}$$

$$B = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 3p^2$$

$$A = (m-n)(m-n+9) = 13q^2$$

$$\begin{cases} m-n : 13 \\ m-n+9 : 13 \end{cases} \quad \begin{cases} m : 3 \\ n : 3 \\ m-n : 3 \end{cases}$$

$$B = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 3p^2 \Rightarrow$$

$$A = (m-n)(m-n+9) = 13q^2 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} B = 3p^2 \\ A = 13q^2 \end{array}$$