МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x+18$, седьмой член равен $(x^2-4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x+7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x-3y| \leqslant 6, \\ |3x-4y| \leqslant 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Дано:

a - арифм. прог.

$a_5 = 6x + 18$

$a_7 = (x^2 - 4x)^2$

$a_{11} = (-3x^2)$

Решение:

1) $a_7 = x^4 - 8x^3 + 16x^2$

2) назовем P - разность нашей прогрессии

3) Тогда $a_7 = a_5 + 2P$, $a_{11} = a_5 + 6P$, $a_{11} = a_7 + 4P$

4) $a_{11} - a_7 = 4P$: $-3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 4P$

5) $2(a_7 - a_5) = 4P$: $2(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18) = 4P$

6) $-3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36$

$0 = 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 \quad | : 3$

$0 = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$

$0 = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$

$0 = (x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3)$ корни $x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$ $x_1 = 2+\sqrt{7}$, $x_2 = 2-\sqrt{7}$

7) Заметим, что $a_7 \geq 0$, $a_{11} \leq 0 \Rightarrow a_5 \geq 0$ т.к. арифм. прог. монотонна.

8) Подставим получ. x : $x_0 = 2$; $x_1 = 2+\sqrt{7}$; $x_2 = 2-\sqrt{7}$

~~Для~~ x_0:

$a_5 = 30$

$a_7 = (4-8)^2 = 16$ $\quad 2P = -14 \Rightarrow P = -7$

$a_{11} = -3 \cdot 4 = -12$ $\quad 4P = -28 \Rightarrow P = -7$

$x = 2$ – подходит

x_1:

$a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7}$ $\quad 2P = -21 - 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10{,}5 - 3\sqrt{7}$

$a_7 = (4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9$

$a_{11} = -3(4 + 4\sqrt{7} + 7) = -33 - 12\sqrt{7}$ $\quad 4P = -42 - 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10{,}5 - 3\sqrt{7}$

$x = 2+\sqrt{7}$ – подх.

x_2:

$a_5 = 12 - 6\sqrt{7} + 18 = 30 - 6\sqrt{7}$ $\quad 2P = -21 + 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10{,}5 + 3\sqrt{7}$

$x = 2 - \sqrt{7}$ – подх.

$a_7 (4 - 4\sqrt{7} + 7 - 8 + 4\sqrt{7})^2 = 9$

$a_{11} = -3(4 - 4\sqrt{7} + 7) = -33 + 12\sqrt{7}$ $\quad 4P = -42 + 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10{,}5 + 3\sqrt{7}$

Ответ: $x = 2$; $x = 2+\sqrt{7}$; $x = 2-\sqrt{7}$ подходят.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

9) Других корней нет т.к. все они должны удовл. П 4, 5, 6 ≠, а мы нашли все решения ур-ния из П.6. => мы нашли все корни.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2:

Дано:

$$\begin{cases} |4x-3y| \le 6 \\ |3x-4y| \le 8 \end{cases}$$

Найти:

$14x+7y - \min = ?$

Решение:

1) Для начала решим систему:

• $|4x-3y| \le 6 \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y \ge -6 \\ 4x-3y \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1{,}5+\frac{3}{4}y \\ x \le 1{,}5+\frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left[-1{,}5+\frac{3}{4}y ; 1{,}5+\frac{3}{4}y\right]$

• $|3x-4y| \le 8 \Rightarrow \begin{cases} 3x-4y \ge -8 \\ 3x-4y \le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y \\ x \le 2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left[-2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y ; 2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y\right]$

$\Downarrow$

$$x \in \begin{cases} \left[-1{,}5+\frac{3}{4}y ; 1{,}5+\frac{3}{4}y\right] \\ \left[-2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y ; 2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y\right] \end{cases} \quad (I)$$

2) $14x+7y = 7(2x+y) \Rightarrow$ если мы хотим, чтобы выражение $14x+7y$ было min, то это будет выполняться при $2x+y - \min$ (II)

3) Найдем, для каких y может выполняться (I):

$1{,}5+\frac{3}{4}y = -2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y$

$1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3} = \left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)y \Rightarrow \frac{6}{4}+\frac{8}{3} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{18+32}{12} = \frac{7}{12}y \Rightarrow \frac{50}{12} = \frac{7}{12}y \Rightarrow y = \frac{50}{7}$

$-1{,}5+\frac{3}{4}y = 2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y \Rightarrow -\frac{6}{4}-\frac{8}{3} = \frac{7}{12}y \Rightarrow y = -\frac{50}{7}$

$-\frac{50}{7}; \frac{50}{7}$

Мы сделали это ~~....~~, посмотрев на границы. $\Rightarrow y \in [\ldots]$ (III)

4) Найдем, что для каждого значения y, выражение (II) явл. min, при наименьшем x, наименьший возможный x при y удовл (III)

$x = \max\left(-1{,}5+\frac{3}{4}y ; -2\frac{2}{3}+\frac{4}{3}y\right)$, очевидно, что чем меньше y, тем меньше $x \nearrow \Rightarrow$ выр-ние (III) $-$ min при ~~...~~

~~...~~ $y = -\frac{50}{7}$, $x = -1{,}5+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{50}{7}\right)$

$x = -\frac{6}{4} - \frac{150}{28} = -\frac{42}{28} - \frac{150}{28} = -\frac{192}{28} = -\frac{96}{14} = -\frac{48}{7}$

$2x+y = -\frac{96}{7} - \frac{50}{7} = -\frac{146}{7} \Rightarrow 14x+7y = -146$.

5) Проверим, подходит ли $y = -\frac{50}{7}$, $x = -\frac{48}{7}$ в нач. усл.:

$\left|-\frac{192}{7} + \frac{150}{7}\right| = |-6| \leq 6$ V

$\left|-\frac{144}{7} + \frac{200}{7}\right| = |-8| \leq 8$ V

Ответ: $14x + 7y - \min = -146$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Найти

$(m;n)$:

$A = m^2-2mn+n^2+9m-9n \qquad 13p^2$

$B = m^2n-mn^2+3mn \qquad 3q^2$

Решение:

1) $B = m\cdot n(m-n+3)$ (I)

2) $A = (m-n)^2+9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$ (II)

~~3) Заметим, что если A или B = $13p^2$ или $3q^2$, то в разл. на множ. в A и в B может быть ровно 3 прост. числа.~~

~~4) Тогда посмотрим на B (I): $B = m\cdot n\cdot(m-n+3)$ если $m, n, m-n+3 > 1$ то $m, n, (m-n+3)$ – простые числа при чем два из них равны между собой. если $m=n$, то $B = 3m^2$, если $m = m-n+3 \Rightarrow n=3 \Rightarrow B = 3m^2$, если $n = m-n+3$, то $2n = m+3$, а т.к. m, n – простые, то $m = 13$ или $m = 3 \Rightarrow 2n = 6$ или $2n=16$ (не может быть) $\Rightarrow 2n=6 \Rightarrow n=3$ или $2n=16 \Rightarrow n=8$ – не может быть $\Rightarrow$ подх. только $m=n=3$, и тогда $B = 3m^2$~~

~~• если m, n или $(m-n+3) = 1$, то~~

~~$m=1$ $\quad B=4 \quad B=3$~~

~~$B = n(4-n) = 4n-n^2 \Rightarrow n<4 \Rightarrow n=2$ или $n=3$, ни одно n не подх~~

~~$n=1$~~

~~$B = m(m-2) = m^2-2m \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B \vdots 13 \\ B \vdots 3 \end{array}\right.$~~

3) Заметим, что если $A = 3q^2 = (m-n)(m-n+9)$, то $m-n \vdots 3$ или $m-n+9 \vdots 3$, но если $m-n \vdots 3$, то и $m-n+9 \vdots 3$ и наоборот т.к. $9 \vdots 3$ $\Rightarrow A = 3q^2 = 3k\cdot 3 \Rightarrow q^2 = 3k \Rightarrow q=3 \Rightarrow k=3 \Rightarrow A = 27$, посмотрим, как мы можем получить $A = 27 = k(k+9) = 3^3 \Rightarrow k = 1,3,9$ или $-1,-3,-9$, $(k+9) = 1,3,9$ или $-1,-3,-9$, $m-n=k$ заметим что никак мы не можем найти k и $k+9$ в $\mathbb{Z}$ удовл. условию, т.к. они отл. на 9, а среди $-1,-3,-9,1,3,9$ нет чисел отл. на 9 $\Rightarrow A \neq 3q^2 \Rightarrow$ $A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2$

~~4) Из п.3 заметим, что $(m-n) \vdots 13$ или $(m-n+9) \vdots 13$, и $m \vdots 3$ или $n \vdots 3$ или $(m-n+3) \vdots 3$, причем если $(m-n+3) \vdots 3$, то и $m-n \vdots 3$ и $(m-n+9) \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 9 \Rightarrow A = 13\cdot 9 = 117$, при этом $B = 3q^2 = m\cdot n\cdot 3l \Rightarrow$ $m\cdot n\cdot l = q^2$~~

$\left[\begin{array}{l} m-n = 13\cdot 9 \\ m-n+9 = 13\cdot 9 \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5) Поймем, что $m > n$, т.к. если $m = n$, то $A = 0$, если $m < n$, то $A > 0 \Rightarrow m - n + 9 < 0 \Rightarrow m - n + 3 < 0$, а $m, n > 0$ по усл $\Rightarrow$ ✗

6) (Из П.5) Поймем, что если $m > n$, то $(m - n + 9) > 9$, $(m - n) \geq 1$, $(m - n + 3) \geq 4$, также поймем, что $m > 1$

7) Поймем, что если $B = 3q^2$, то либо $m \vdots 3$, либо $n \vdots 3$ либо $(m-n+3) \vdots 3$
если $(m - n + 3) \vdots 3$, то $(m - n) \vdots 3$ и $(m - n + 9) \vdots 3$ тогда пусть $(m - n) = 3l$

$A = 13q^2 = 9\underbrace{l(l+3)}_{13}$ $l(l+3) = 13$ не имеет решений в $\mathbb{Z} \Rightarrow (m-n+3) \not\vdots 3$.

$\Rightarrow m \vdots 3$ либо $n \vdots 3$ при чем $(m - n) \not\vdots 3$

8) $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3) = 3q^2$ если $n \vdots 3$, то $n = 3s$

$B = m \cdot 3s(m - 3s + 3) = 3q^2$

$m \cdot s(m - 3s + 3) = q^2$

m - хотя бы прост, $(m-n+3)$ тоже хотя бы прост $\Rightarrow s = 1$

$m \cdot (m) = q^2 \Rightarrow m = q$, $n = 3$

если $m \vdots 3$, то $m = 3r$

$B = 3r \cdot n(3r - n + 3) = 3q^2 \Rightarrow r \cdot n\underbrace{(3r - n + 3)}_{\text{хотя бы прост}} = q^2$

$n = 1 \Rightarrow r(3r+2) = q^2$ не им. реш. в $\mathbb{Z}$

n - хотя бы прост $\Rightarrow$ $r = 1$

$n(6 - n) = q^2$

$6 - n = n \Rightarrow n = 3 = q$

этот случай уже разобр.

Таким образом $n = 3$, $m = q$ - усл. для B. $q > 3$ (из П.5)

9) Посмотрим на A:

$A = 13p^2 = (m - n)(m - n + 9) \Rightarrow (m - n) \vdots 13$ или $(m - n + 9) \vdots 13$

если $m - n \vdots 13$

$q - 3 \vdots 13$ q - прост., $q > 3 \Rightarrow q$ - н.2 $\Rightarrow q - 3$ - чет.

$\Rightarrow q - 3 \vdots 13, \vdots 2 \Rightarrow p = 2$, также мы знаем, что $(m - n + 9) > (m - n) \geq 1 \Rightarrow$ $(m - n + 9)$ хотя бы прост $\Rightarrow m - n + 9 = 2$, чего не может быть т.к. $(m - n) > 0$.

$(m - n + 9) \vdots 13$ $(q + 6) \vdots 13$

$q = 7$ $A = (7-3)(7-3+9) = 13 \cdot 4 \Rightarrow$ (подх)

$q > 7 \Rightarrow$ $(q+6)$ больше, чем прост (мн. больше прост. делит.)

$A = (q - 3)(q + 6) = q^2 + 3q - 18 = 13p^2$

$q > 7$:

$A = (q - 3)(q + 6)$, $q + 6$ больше чем прост $\Rightarrow$ $q - 3$ - прост.

$(q + 6) = 13 \cdot m$: $A = 13 \cdot m \cdot (q - 3) = 13p^2 \Rightarrow m(q - 3) = p^2$

$m \neq 1, m > 1$

m хотя бы прост,

$q - 3$ ~~...~~ : $q > 7$, q - прост.

$\Rightarrow q$ - н.2 $\Rightarrow q - 3$ - чет, $q - 3 > 4 \Rightarrow$

$q - 3$ - больше чем прост $\Rightarrow$

$m(q - 3) \neq p^2 \Rightarrow q \leq 7 \Rightarrow q = 7$

Ответ: $m = q = 7$, $n = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Дано:

$l \parallel AX$

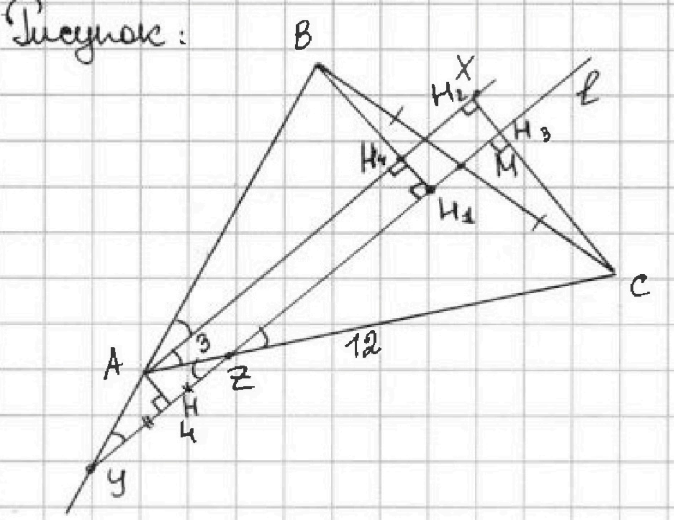
$|AZ| = 3$

$|AC| = 12$

$|YZ| = 4$

$|BC| = ?$

Рисунок:



Решение:

1) Т.к. $l \parallel AX \Rightarrow \angle BAX = \angle BYZ$, $\angle CAX = \angle AZY = \angle BAX \Rightarrow \triangle YAZ$ – р/б (по призн.)

2) Тогда найдем высоту в $\triangle YAZ$, пров из $\{A\}$: По Th. Пифагора и св-ву р/б $\triangle$ $AH = \sqrt{AZ^2 - \frac{YZ^2}{4}} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

3) Проведем $\perp$ из $\{B\}$ на l, получим $\{H_1\}$ и из $\{C\}$ на AX, получим $\{H_2\}$, обозначим за $\{H_3\}$ и $\{H_4\}$ пересеч. CH_2 с l и BH_1 с AX соответственно.

4) $\angle AZY = \angle MZC$ как вертикальные $\Rightarrow \triangle H_3CZ \sim \triangle H_2CA$ по р-ву 3х углов k_1 подобия $= \frac{CZ}{AC} = \frac{AC - AZ}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = k_1$

5) $\angle BAH_4 = \angle BYH_1 \Rightarrow \triangle ABH_4 \sim \triangle YBH_1$ по р-ву 3х углов, k_2 подобия $= \frac{BH_4}{BH_1}$

6) Заметим, что $|H_1H_4| = |AH| = |H_2H_3| = \sqrt{5}$, $|H_2C| \cdot k = |H_3C| = |H_2C| - |H_2H_3|$
$|H_2C|(k-1) = -|H_2H_3| = -\sqrt{5} \Rightarrow |H_2C| = \frac{-\sqrt{5}}{-\frac{1}{4}} = 4\sqrt{5} \Rightarrow |H_3C| = 3\sqrt{5}$

7) $\angle BMH_1 = \angle CMH_3 \Rightarrow \triangle BH_1M = \triangle CH_3M$ по 2м углам ($\angle BMH_1 = \angle CMH_3$ и прямому) и стороне ($|BM| = |MC| = \frac{1}{2}BC$) $\Rightarrow |CH_3| = |BH_1| = 3\sqrt{5}$.

8) $|BH_4| = |BH_1| - |H_4H_1| = 2\sqrt{5}$.

9) Из п. 5, 8 $k_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \Rightarrow |BY| \cdot k = |AB|$, $|AB| = |BY| - |AY|$
$|BY| \cdot \frac{2}{3} = |BY| - |AY| \Rightarrow -\frac{1}{3}|BY| = -|AY| \Rightarrow |BY| = 9 \Rightarrow |AB| = 6$

10) По Th. Пифагора в $\triangle ZCH_3$: $|ZH_3| = \sqrt{|ZC|^2 - |CH_3|^2} = \sqrt{81-45} = \sqrt{36} = 6$.

11) По Th. Пифагора в $\triangle YBH_1$: $|YH_1| = \sqrt{|YB|^2 - |BH_1|^2} = \sqrt{81-45} = \sqrt{36} = 6$.

12) $|H_1H_3| = 2|H_1M| = |YH_3| - |YH_1| = |YZ| + |ZH_3| - |YH_1| = 4 \Rightarrow |H_1M| = 2 = |MH_3|$

13) По Th. Пифагора в $\triangle MH_3C$: $|CM| = \sqrt{|MH_3|^2 + |CH_3|^2} = \sqrt{4+45} = \sqrt{49} = 7$.

14) $|CM| = \frac{1}{2}|BC|$ (по опр) $\Rightarrow |BC| = 2|CM| = 14$.

Ответ: $|BC| = 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y \end{cases}$$

ОДЗ: (по корням):

$x \geq 0$; $y \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \geq 0$

$y \geq -6$; $y \leq 5$ $\quad$ $y \in [0; 5]$

Решение:

1) $4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y$

$4x^4 + 5\sqrt[4]{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt[4]{y} + y$

$4x^4 - 4y^4 = \cancel{(2y^2+2x^2)(2y^2-2x^2)}\ 4(x^2+y^2)(x^2-y^2) = 4(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

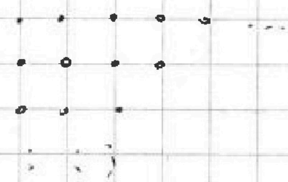
Задача 6

Дано:

квадрат 9×9

N раскрасок – ?

Рисунок:



Решение:

1) Заметим, что всего узлов в таком квадрате 100 (посчитать их несложно: ~~...~~ в каждой строке их 10, строк тоже 10)

2) Тогда посмотрим, сколькими способами мы можем выбрать 2 узла кот. будем красить: $\frac{100 \cdot 99}{2} = N$ так, чтобы изначально (до поворотов раскраски были отличающиеся)

3) Теперь рассмотрим повороты: они будут совершаться отн. центра поворотной симметрии квадрата (пересеч. диаг) на 90°, очевидно, что при повороте большинства раскрасок на $\frac{\pi}{2}$ (кроме некоторых, их мы разберем далее) мы будем получать раскраску отлич. от начальной $\Rightarrow N' = \frac{N}{4}$ (т.к. поворот осущ.-ся 4ре раза).

4) Теперь заметим, что сущ-вуют раскраски, переводящиеся сами в себя при повороте на π, для $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$ такой проблемы нет, т.к. у нас красятся 2 ~~...~~ узла, а чтобы 2 точки перешли ~~...~~ друг в друга нам нужно чтобы их расст. от центра было одинак. и чтобы угол между напр. из центра симм. был 180°, иначе они при любом повороте перейдут только на свое же место, но никак одновременно не поменяются местами.

5) Кол-во раскрасок подх. под (П.4) – ~~...~~ 50 шт. т.к. каждому узлу соотв. ровно 1 симм. ему отн. центра $\Rightarrow$ в N мы насчитали 50 таких раскрасок ^{n}, но их нужно делить пополам т.к. поворот на π и на $\frac{3\pi}{2}$ дает нам уже получ. ранее раскраски. $\Rightarrow N' + \frac{n}{4} = $ итог $= \frac{100 \cdot 99}{8} + 12.5 = 1250$

Ответ: $N_{\text{раскрасок}} = 1250$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Дано:

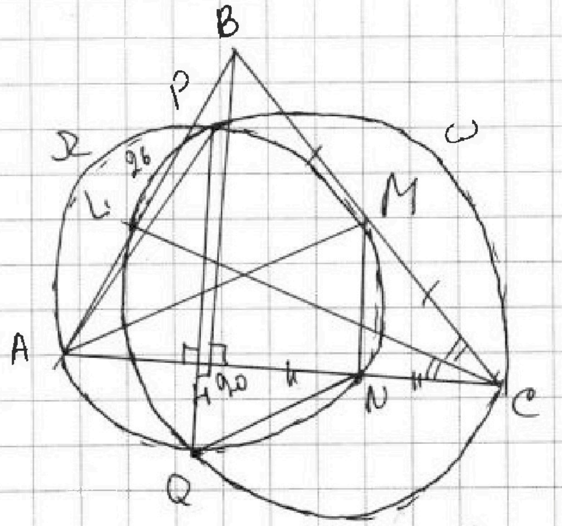
AN = 20

AB = 26

AC = ?

BC = ?

Рисунок:



Решение:

1) $MN \perp AC$ т.к $\angle ANM$ опир. на диаметр $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$

2) $\angle MNC = \angle ANM = 90^\circ = 180 - \angle ANM$

3) $\triangle BHC \sim_\triangle MNC$ по 2м углам, k подобия $= \frac{1}{2}$

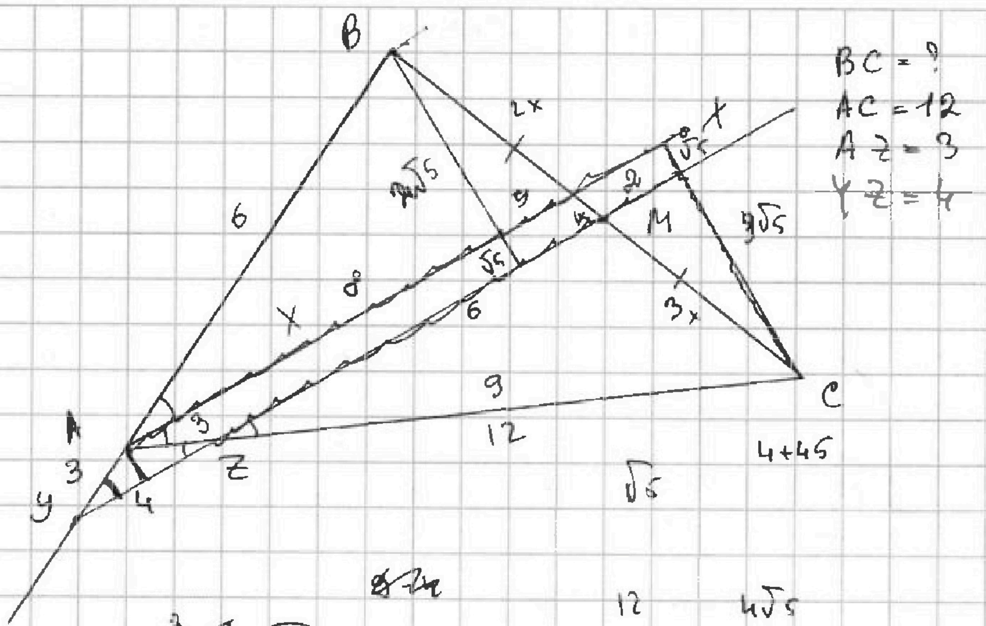
4) ~~[illegible]~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

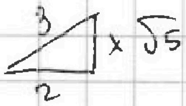


BC = ?
AC = 12
AZ = 3
~~YZ = 4~~

4+45

√5

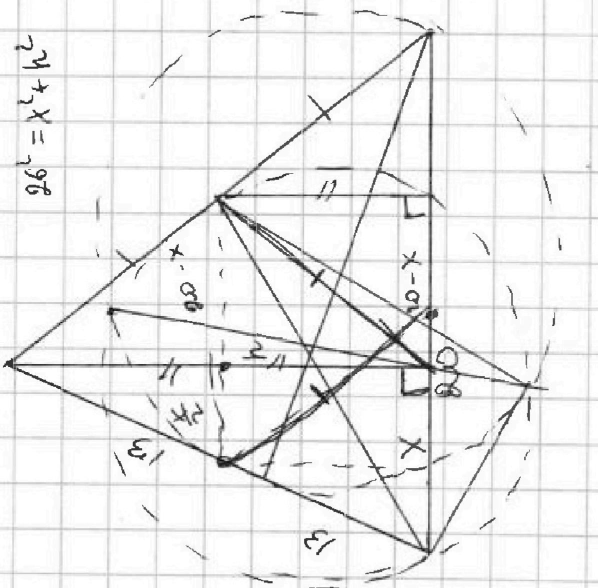
12 4√5

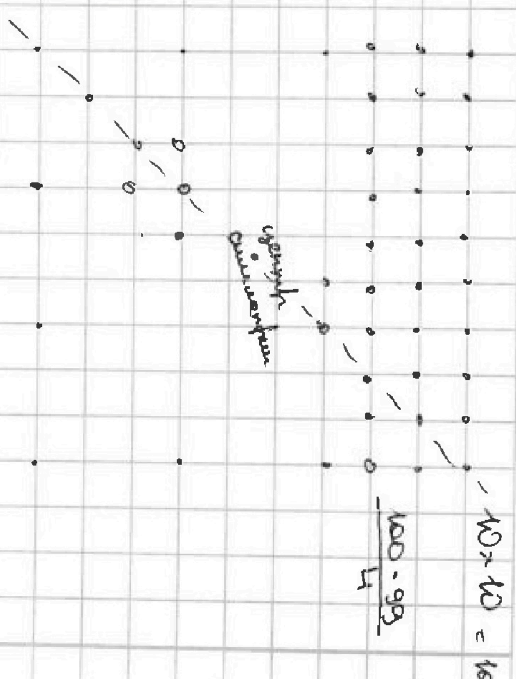


144 − 80 = 64 = 8

81 −

$$\begin{cases}\sqrt{x+6}-\sqrt{5-y}+5=2\sqrt{30-x-y^2}\\ 4x^4+x-5\sqrt[4]{5}=4y^4-5\sqrt[4]{x}+y\end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^4-8x^3+17x^2-4x-12$

x^4-2x^3

$-6x^3+12x^2$

$+5x^2-10x$

$+6x-12$

x^3-6x^2+5x+6

x^3-2x^2

$-4x^2+8x$

$-3x+6$

$(x-2)(x^3-6x^2+5x+6)=$

$=x^4-2x^3-6x^3+12x^2+5x^2-10x+6x-12$

$x^4-8x^3+17x^2-4x-12$

x^2-4x-3

$\frac{4\pm\sqrt{16+12}}{2}$

$2\pm\sqrt{7}$

28×7: 56, 14, 196

$\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{16-9}{12}=\frac{7}{12}$

$|-36-30|\le6$

$|-27+40|$

13

$x=\max\left(-1{,}5+\frac{3}{4}\cdot\frac{-50}{7}\right.$

$x=\max\left(-1{,}5+\frac{3}{4}\cdot-\frac{50}{7}\right.$

$2\cdot3-(2)$

$|4k+30|\le6$

$|3k+40|\le8$

$-\frac{42}{7}=-6$

$13\cdot9=90+27$

117

$48\cdot2=96$

$48\cdot4=192$

$48\cdot3=144$

$\left|-\frac{192}{7}+\frac{150}{7}\right|\le6$

$\left|-\frac{144}{7}+\frac{200}{7}\right|\le8$

-56

$B=3p^2$

$A=13q^2$

d

$A=13q^2=\underset{\vdots 3}{(m-n)}\underset{\vdots 3}{(m-n+9)}$

$B=3p^2=m\cdot n\cdot(m-n+3)$

$\vdots 3$

$A=9k(k+3)$

$k^2+3k=13$

$3\pm\sqrt{9+51}$

$4\cdot13=42$

$B=m\cdot n\cdot(m-n+3)=3q^2$

$A=(m-n)(m-n+9)=13p^2$

$\vdots 13$ $\left[\begin{array}{l}m-n\vdots13\\ m-n+9\vdots13\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}m\vdots3\\ n\vdots3\\ m-n\vdots3\end{array}\right.$

$B=m\cdot n\cdot(m-n+3)=13p^2 \Rightarrow$

$A=\underset{\vdots 3}{(m-n)}\underset{\vdots 3}{(m-n+9)}=3q^2$