



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 12 - 12x; \quad a_4 = (x^2 + 4x)^2; \quad a_8 = -6x^2;$$

Пусть шаг прогрессии d :

$$\begin{cases} a_4 = a_2 + 2d \\ a_8 = a_4 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x + 2d & (1) \\ -6x^2 = (x^2 + 4x)^2 + 4d & (2) \end{cases}$$

$$\text{Из (2) - (1) \cdot 2: } -6x^2 - 2(x^2 + 4x)^2 =$$

$$= (x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 4d - 4d$$

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0 \quad | :3$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

~~Если $x=0$, то $-8=0 \Rightarrow \emptyset$~~

~~$\emptyset \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$ можем кубе поделить на~~

~~$x^2: x^2 + 8x + 18 + \frac{8}{x} - \frac{8}{x^2} = 0$~~

~~\neq~~

Заметим, что при $x = -2$:

$$16 - 8 \cdot 8 + 18 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 8 = 16 - 64 + 72 - 24 =$$

$$= 88 - 88 = 0$$

$\Rightarrow x = -2$ корень



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получи разложим на ли-ли введем уравнение по x . Будем методом теор. корр-ов:

$$(x+2) | (x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

Найдём корни второй скобки:

Заметим, что при $x = -2$:

$$-8 + 6 \cdot 4 - 12 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ — это корень второй скобки.}$$

\Rightarrow исходное уравнение принимает вид:

$$(x+2)^2 (x^2 + 4x - 2) = 0$$

Найдём корни второй скобки:

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 8 = 24 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Ответ: $x \in \{-2 - \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}; -2\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{40}{3}x + 10 \geq t \geq \frac{40}{3}x - 10 & (1) \\ \frac{35}{2}x + 10 \geq t \geq \frac{35}{2}x - 10 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{35}{2}x + 10 \geq \frac{40}{3}x - 10$$

$$\left(\frac{35}{2} - \frac{40}{3}\right)x \geq -20$$

$$\frac{105 - 80}{6}x \geq -20$$

$$\frac{25x}{6} \geq -20$$

$$x \geq \frac{-120}{25} = -\frac{24}{5}$$

$$\Rightarrow t \geq 35x \quad t \geq \frac{40}{3}x - 10 \geq \frac{-24 \cdot 40}{5} - 10 = -74$$

$$= \sqrt{-8 \cdot 8x - 40} \geq -\frac{40}{5} \cdot \frac{24}{5} - 10 = -74$$

$$\text{Пусть } x = -\frac{24}{5} \text{ и } y = -\frac{26}{5}, \quad 10x + 5y = \text{min} = -74$$

Ответ: -74



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Если $2x \geq 3y$ и $3x \geq 2y$;

$$\begin{cases} x \geq 1,5y \\ x \geq \frac{2}{3}y \\ 2x - 3y \leq 6 \\ 10 + 40x \geq t \geq 40x - 10 \\ 10 + \frac{35}{2}x \geq t \geq \frac{35}{2}x - 10 \end{cases}$$

(Handwritten notes and calculations are present, including $35x \geq 20$ and $x \geq \frac{20}{35}$)

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

Пусть $10x + 5y = t$; тогда $y = \frac{t - 10x}{5}$; найдем минимальное значение t :

$$\begin{cases} -6 \leq 2x - \frac{3}{5}t + 6x \leq 6 \\ -4 \leq 3x - \frac{2}{5}t + 4x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 8x - \frac{3}{5}t \leq 6 \quad (1) \\ -4 \leq 7x - \frac{2}{5}t \leq 4 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow -10 \leq 15x - t \leq 10$

(2) $\Rightarrow -10 - 15x \leq -t \leq 10 - 15x \quad | \cdot (-1)$

$+10 + 15x \geq t \geq 15x - 10$

$\Rightarrow t \geq 15x - 10 \Rightarrow t_{\min} = 15x - 10$

$\Rightarrow 10x + 5y = 15x - 10 \Rightarrow y = x - 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2)$$

1) Если $A = 17p^2$, $B = 15q^2$. Если A : Если $m - 2n : 2$, то $p = 2$; ~~иначе $17p^2 : 2$~~ \Rightarrow Если $m - 2n \times 2$, то $m : 2 \Leftrightarrow m - 2n + 13 : 2 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow p = 2$

$A = 17 \cdot 4 = 68$; очевидно $m - 2n < m - 2n + 13$;

то $m, n, A = 68$, но $m - 2n$ и $m - 2n + 13$ взаимно простые делителями 68 являются, что мы и имеем разность 13; $68 = 2^2 \cdot 17$

$\Rightarrow m - 2n = 4$; $m - 2n + 13 = 17$; урешим систему

Если $B = mn(m - 2n - 2) = 15q^2 \Rightarrow mn \cdot (4 - 2) = 15q^2 \Rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2 \Rightarrow q = 2$, так как q - не простое число \Rightarrow

$2mn = 4 \cdot 15 \Rightarrow mn = 30$, $m - 2n = 4$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m - 2n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{30}{m} \\ \frac{30}{m} - 2n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ 2n^2 + 4n - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ n^2 + 2n - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 15 \cdot 4}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ n = 3 \\ n = -5 \Rightarrow \text{н.к.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (10, 3)$$

2) Если $A = 15q^2$, $B = 17p^2$. Если A : Аналогично $q : 2$, так как либо $m - 2n$, либо $m - 2n + 13 : 2 \Rightarrow$

$(m - 2n)(m - 2n + 13) = 60$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Заметим, что у 60 нет делителей, между которыми 13 \Rightarrow Ответ: (10, 3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle YZA = \angle ZAX$, т.к. накрест лежащие при секущей AZ и ||-х прямых AX и MY $\Rightarrow \angle ZYA = 180^\circ - \angle YZA - \angle ZAY =$

$= 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha \Rightarrow \triangle YAZ$ р.и.о., т.к. углы при основании равны $\Rightarrow AZ = AY = 6$

3) AX и MY ||-ны $\Rightarrow \triangle YBM \sim \triangle ABX$ по двум углам $\Rightarrow \frac{AB}{AY} = \frac{BX}{MX}$

Заметим, что $CM = MB = 2x$, а $MX = x \Rightarrow$

$\frac{AB}{AY} = \frac{BX}{MX} = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow AB = AY$

$\Rightarrow AB = 6$

4) ИК кос гм $\triangle YAZ$: $YZ^2 = ZA^2 + YA^2 - 2ZA \cdot YA \cdot \cos \angle YAZ$

$\cos \angle YAZ \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)$

$\Rightarrow 64 = 72 + 72 \cdot \cos 2\alpha$, т.к. $\cos(180^\circ - 2\alpha) =$

$= -\cos(2\alpha) \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$

5) ИК кос гм $\triangle ABC$:

$BC^2 = AC^2 + BA^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(2\alpha)$

$BC = \sqrt{36 + 78^2 - 36 \cdot 6 \cos 2\alpha} = \sqrt{36 + 324 + 24}$

$= \sqrt{384} = 2\sqrt{96} = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$ Ответ: $8\sqrt{6}$

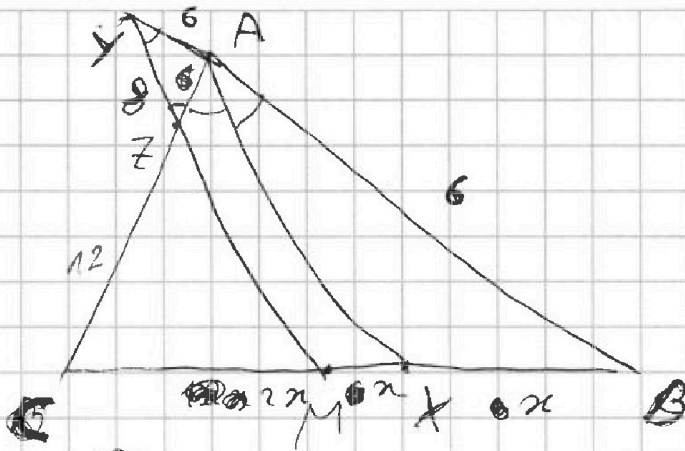


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$;

AX — бис-са; $AZ = 6$

$CM = MB$; $M \in [CB]$

$MZ \parallel AX$; $AC = 18$; $AZ = 6$

Найти: $BC = ?$

Решение

1. Так как $AX \parallel ZM$ по условию, $\triangle AMX \sim \triangle ZBM$

$\Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{BM}{MX}$; В то же время AX —

бис-са угла $\angle CAB \Rightarrow$ по св-ву бис-сы

$\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB}$. Прямые пропорциональные два отноше-

ние: $\frac{AC}{AX} = \frac{CX}{MX}$

1) $AC = 18$; $AZ = 6 \Rightarrow ZC = AC - AZ = 12$

$\Rightarrow \frac{CZ}{ZA} = \frac{2}{1}$; $ZM \parallel AX \Rightarrow \triangle ZCM \sim \triangle AAX$ (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{CM}{MX} \Rightarrow \frac{CM}{MX} = 2 \Rightarrow CM = 2x$
 $MX = x$

2) $\angle CAZ = \alpha$; $\angle XAB = \angle CAZ = \alpha$; $\angle YAC = 180^\circ - 2\alpha$ как смежные с $\angle CAB = \angle CAZ + \angle XAB = 2\alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$U_{\max} \begin{cases} ab=3 \\ ab=\frac{3}{2} \\ a^2+b^2=7 \end{cases}; \quad 1) \begin{cases} ab=3 \\ a^2+b^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{a} \\ a^2+\frac{9}{a^2}=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4 - 7a^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow D = 49 - 36 = 13$$

$$a^2 = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$= \text{отбросить}$$

$$\Rightarrow x+4 = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+8 = 7 + \sqrt{13} \\ 2x+8 = 7 - \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq 3 \\ x = \frac{-\sqrt{13}-1}{2} \Rightarrow \text{отбросить} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right);$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right)$$

$$2) \begin{cases} ab=\frac{3}{2} \\ a^2+b^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2a} \\ a^2+\frac{9}{4a^2}=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a^4 - 28a^2 + 9 = 0$$

$$D_4 = 196 - 36 = 160$$

$$a^2 = \frac{7 \pm 4\sqrt{10}}{4}$$

$$\Rightarrow x+4 = \frac{7 \pm 4\sqrt{10}}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+16} = 7 \pm 4\sqrt{10}$$

$$\begin{cases} 4x+16 = 7 + 4\sqrt{10} \\ 4x+16 = 7 - 4\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} - \frac{1}{2} \leq 3 \\ x = -\sqrt{10} - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{отбросить} \end{cases}$$

$$x = -\sqrt{10} - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{отбросить}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left(\sqrt{10} - \frac{1}{2}, \sqrt{10} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\sqrt{10} - \frac{1}{2}, \sqrt{10} - \frac{1}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (1) \quad x^2 - 4y \leq 3 \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x + 4y^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2): 2x^5 + 4x^2 - 2y^5 - 4y^2 = \sqrt[4]{3y} - \sqrt[4]{3x}$$

$$2 \cdot (x-y) \cdot (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + 4 \cdot (x-y) \cdot (x+y) = \sqrt[4]{3} \cdot (\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{x})$$

$$(x-y)(2x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4 + 4x + 4y) = \sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{x})$$

(2): Заметим, что это уравнение симметрично относительно x и $y \Rightarrow$ можем предположить, что $x \geq y$: $2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 = \sqrt[4]{3y} - \sqrt[4]{3x}$

Также заметим, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$,

т.к. по корням центральной степени смо-

жем $3y$ и $3x$; Если $x \geq y$, то $2x^5 \geq 2y^5$ и

$4x^2 \geq 4y^2$, т.к. $x \geq 0$ и $y \geq 0$ ~~и тогда~~ ~~и тогда~~.

~~и тогда~~ ~~и тогда~~; Но в то же время $\sqrt[4]{3y} \leq$

$\leq \sqrt[4]{3x} \Rightarrow$ левая часть ≥ 0 , а правая ≤ 0

значит $y \geq x \Rightarrow$ ~~и тогда~~ ~~и тогда~~ $\Rightarrow y = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3x} = 2x^5 - \sqrt[4]{3x + 4x^2} \\ x^2 - 4, x \leq 3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{72-x-x^2} \\ x \geq 0; x \geq -4; x \leq 3 \end{cases}$$

Сделаем замену $a = \sqrt{x+4} \geq 0$ и $b = \sqrt{3-x} \geq 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} \\ x \geq 0; x \geq -4; x \leq 3 \end{cases} \text{ и не забываем}$$

Замена $a = \sqrt{x+4} \geq 0$, $b = \sqrt{3-x} \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 & (3) \\ a - b + 5 = 2ab & (4) \end{cases}$$

$5a^2 + 5b^2 + 7a - 7b - 14ab = 0$

$(3) + (4): a^2 + b^2 - 2ab + a - b = 2$

$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 + a - b = 2$

$(4): a - b = 2ab - 5$

$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2 - 20ab + 25b = 2ab - 9$

$a^2 + b^2 = 7$

$a \geq b$

$a \leq 3$

$ab = 3$

$a^2 + b^2 = 7$

$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2 - 20ab + 25b = 2ab - 9$

$a^2 + b^2 = 7$

$ab = 3$

$a^2 + b^2 = 7$

Замена: $a = \sqrt{x+4} \geq 0$

и $b = \sqrt{3-x} \geq 0$

$$\begin{cases} a - b + 5 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2ab - 5 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2 - 20ab + 25b \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a^2 b^2 - 18ab + 18 = 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 b^2 - 9ab + 9 = 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ ab = 1,5 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

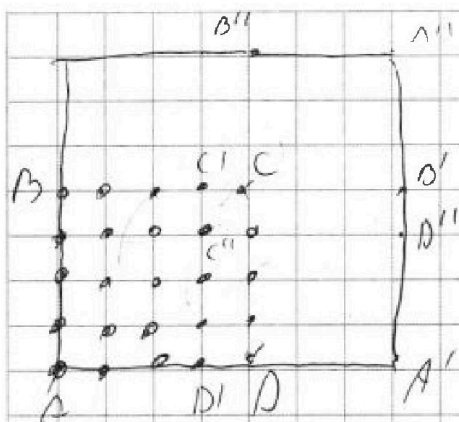


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

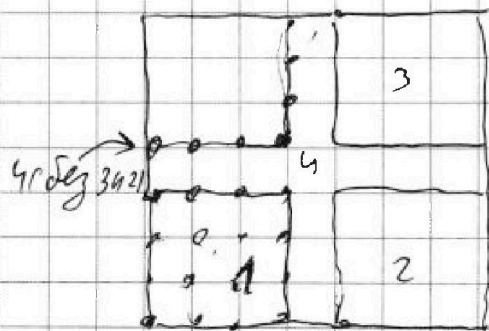
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



71 Заметим, что принципиально раскраски разные возможны и так: либо оба белых узла в одной четверти малом узле $\square ABCD$, либо будут красные узлы в квадрате $ABCD$ и узлы в $A'B'C'D'$, либо одна в $\square ABCD$ и другая в $\square C''B''A''D''$

21 В первом случае способов 25

Во втором



I: способов: $16 \cdot 16 = 256$

II: способов: $16 \cdot 16 = 256$

III: способов: $16 \cdot 7 = 112$

IV: способов: $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$

Заметим, что принципиально раскраски различаются по узлам.

I одна белая в 1, другая в 3

II одна в 1, другая в 2

III одна в 1, другая в 4 (без 3 и 2)

IV обе в 1

Остальные способы получаются поворотами.

\Rightarrow Ответ: $256 + 256 + 112 + 120 = 512 + 232 = 744$

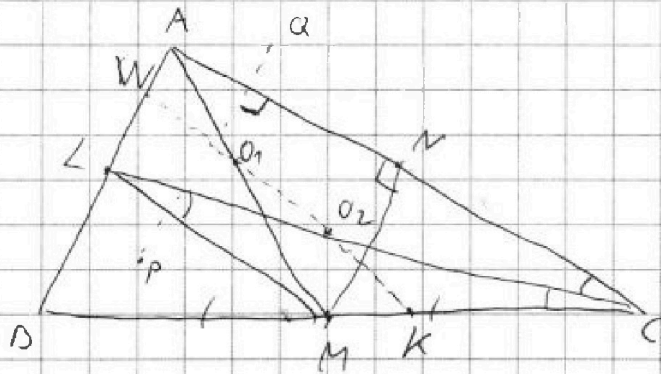


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$, $\omega \cap BC = \{P, Q\}$
 $P, Q, A, M \in \Omega$ (опр-ть с диаметром AM); $L, Q, P \in \omega$ (опр-ть с диаметром LM); $AN = 5$
 $AB = 6$; $PQ \parallel$ высоте $\triangle ABC$

1) $PQ \parallel$ высоте из B на $AC \Rightarrow PQ \perp AC$

В то же время PQ - хорда ω и $\Omega \Rightarrow PQ \perp$ линии центров \Rightarrow линии центров \perp на AC .

Носимая пусть $O_1 - \omega$; $O_2 - \omega$. Пусть $(O_1 O_2) \cap BC =$

$= K$; $(O_1 O_2) \cap AB = W$; тогда $O_2 K$ - ср. линия в $\triangle LAC \Rightarrow$

$LW = WA$ и $O_2 K$ - ср. линия в $\triangle ACM \Rightarrow MK = KC \Leftrightarrow$

$KC = MK$ и $CO_2 = O_2 C \Rightarrow O_2 K$ - ср. линия в $\triangle ACM \Rightarrow$

$O_2 K \parallel LM \Rightarrow O_1 O_2 \parallel LM \parallel AC \Rightarrow AC \parallel LM$

2) $\angle MLC = \angle LCM$ как углы при основании LM в равнобедренном $\triangle LMC$; $\angle ACL = \angle ECB$, т.к. CL - биссектриса

$\Rightarrow \triangle LCM = \triangle CMB$, т.к. равны две стороны при основании \Rightarrow

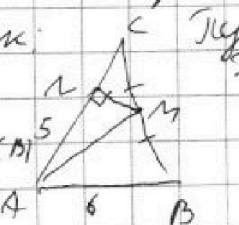
$LM = MC$. Но в то же время $BM = MC \Rightarrow BM = MC = LM$ и

$\triangle BLC$ - равнобедренный (т.к. медиана равна половине гипотенузы) $\Rightarrow \angle C$ - биссектриса, и высота \Rightarrow

$\triangle ACB$ - $\text{rt} \triangle$;

3) $\angle ANM = 90^\circ$, т.к. AM - диаметр Ω

Переделаем рисунок:



Пусть $\angle ANM = \alpha \Rightarrow \angle ACB = 180 - 2\alpha$
 $\angle ANM = \alpha \Rightarrow \angle M = \frac{\pi + 5}{2}$
 $\cos \angle NCM = \frac{\pi}{\pi + 5} \Rightarrow \cos \angle ACB = \frac{2\pi}{\pi + 5}$

Т.к. \cos в $\triangle ACB$:

$$36 = 2 \cdot (7 + 5)^2 - 2(7 + 5)^2 \cdot \cos \angle ACB$$

$$18 = (7 + 5)^2 - (7 + 5)^2 \cdot \frac{2\pi}{\pi + 5} \Rightarrow 18 = \pi^2 + 10\pi + 25 - 2\pi^2 - 10\pi$$

$$\pi^2 = 7 \Rightarrow \pi = \sqrt{7}$$

Ответ: $AB = 6$; $BC = AC = 5 + \sqrt{7}$