



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = 6x + 18, \quad a_7 = (x^2 - 4x)^2; \quad a_{11} = (-3x^2)$$

$$a_7 - a_5 = 2b; \quad a_{11} - a_7 = 4b$$

$$2(a_7 - a_5) = a_{11} - a_7$$

$$2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18) = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2;$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$\cancel{(x-2)} \quad \cancel{(x-2)}^2(x-)$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 3 = 7 \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } 2; \quad 2 + \sqrt{7}; \quad 2 - \sqrt{7}$$

	1	-8	17	-4	-12
		2	-12	10	+12
2	1	-6	5	16	0
		2	-8	-6	
2	1	-4	-3	0	



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$A = (m-n)(m-n+3)$~~ ; ~~$A = mn(m-n+3)$~~ $A = (m-n)(m-n+3)$; $B = mn(m-n+3)$

1) Пусть $B = 3q^2$

В) Вариант а: $m=3, n=q=m-n+3 \Rightarrow n=6-n \Rightarrow n=3$ но $m>n$ - противоречие

Вариант б: $n=3, m=q=m-n+3 \Rightarrow B=nm^2, n=3, m$ - любое ^{простое} ~~целое~~ больше 3, проверка на А: $(m-n)(m-n+3) = (m-3)(m+6)$ 1) $n=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow m=16$ - противоречие, $m+6=13 \Rightarrow m=7 \Rightarrow m-3=4$ - верно (7;3)

Вариант с: $m=n \Rightarrow mn-3 \Rightarrow m$ - простое, проверка на А $(m-n)(m-n+3), m-n=0, \Rightarrow A=0$, но $A>0$, т.к. p и q - простые - противоречие.

Вариант д: $m=2q, n=q, m-n+3=1$, про $2k+3=1, q>0$ - противоречие

Вариант е: $n=3q, m=q, m-n+3=1, 3-2q$, противор.

$3-2q=1, q=1$ - противоречие

Вариант ф: $n=3q, m=1, m-n+3=q \Rightarrow 4-n+3=n \Rightarrow n=3$

$A<0$
 $n=3$ - противоречие.

Вариант г: $m=3q, n=1, m-n+3=q, 3(m+2)=m \Rightarrow m<0$ - противоречие.

2) Пусть $B = 13q^2$

Вариант а: $m=13, n=q, m-n+3=q, n=16-n, n=8$ - противоречие.

Вариант б: $n=13, m=q, m-n+3=q, m=m-10$ - противоречие.

Вариант с: $m=n=q, m-n+3=3$ - противоречие

Вариант д: $m=1, n=13q, m-n+3=q, 13(4-n)=n, n \notin \mathbb{N}$ - противор.

Вариант е: $m=13q, n=1, m-n+3=q, (4+2)13=m, m \notin \mathbb{N}$ - противор.

Вариант ф: $m=13q, n=q, m-n+3=1, 2q=4, q=2$ - противоречие

Вариант г: $m=13q, n=1, m-n+3=q, 2q=4, q=2$ - противоречие
Значит, ответ только (7;3) Ответ: (7;3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $CM = MB = m$; $MX = n \Rightarrow XB = m - n$

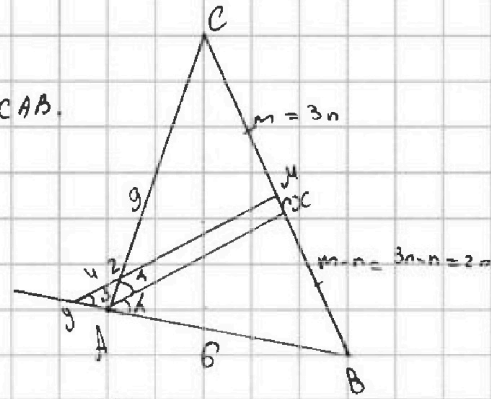
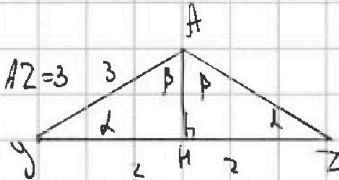
2) $YM \parallel AX$, YB -секунда $\Rightarrow \angle MYB = \angle XAB$.

3) $\angle CAB$ -внешний к $\angle ZAY \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZYA + \angle YZA = 2\alpha$,

$\angle ZYA = \alpha \Rightarrow \angle YZA = \alpha$

4) $\triangle YZA$ $\angle ZYA = \angle YZA = \alpha \Rightarrow AY = AZ = 3$
 $YZ = 4 \Rightarrow AH$ -высота $\Rightarrow YH = HZ = 2$
 $\angle YAH = \angle ZAH = \beta$
 $\beta + \alpha = 90 \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha = \frac{2}{3}$



5) $\triangle ZCM$ со ACZ по лемме о подобии $ZM \parallel AX \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{g}{m} = \frac{12}{m+n} \Rightarrow gm + gn = 12m \Rightarrow m = 3n$

6) $\triangle ABX$ со YBM по лемме о подобии $YM \parallel AX \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{2n} = \frac{3+AB}{3n} \Rightarrow AB = 6$

7) $\cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$

8) по т. косинусов в $\triangle CAB$ $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle CAB \cdot AC \cdot AB} =$
 $= \sqrt{144 + 36 - \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 12} = \sqrt{180 + 16} = \sqrt{196} = 14$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x + \sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + \sqrt[4]{y} \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \nearrow \text{на } [0; +\infty); \quad g(x) = x \nearrow \text{на } [0; +\infty); \quad t(x) = x^4 \nearrow \text{на } [0; +\infty) \Rightarrow$$

\Rightarrow аналогично $f(y) \nearrow; g(y) \nearrow; t(y) \nearrow \Rightarrow x=y$

$$\text{ОДЗ: } \sqrt{x} > 0 \Rightarrow x \geq 0; \quad \sqrt{5-y} = \sqrt{5-x} \Rightarrow x \leq 5$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 11 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} = 6$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + (\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})^2 = 6$$

$$\text{Замени } \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = t$$

$$t + t^2 = 6$$

$$t = -3; t = 2$$

$$\Rightarrow t = -3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{5-x} - 3$$

$$x+6 = 5-x - 6\sqrt{5-x} + 9$$

$$2x - 11 = -6\sqrt{5-x}$$

$$4-x = 3\sqrt{5-x}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9(5-x)$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 116 = 9.13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9.13}}{2} \approx -3\sqrt{13} - 1 < 0 \text{ - нест. кор}$$

$$0 < \frac{3\sqrt{13}-1}{2} < 5$$

$$D = 4 + 71.4 = 9.16.2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{9.16.2}}{4} = \frac{-2 - 12\sqrt{2}}{4} < 0$$

$$\frac{-2 + 12\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2} - 0.5 < 5$$

$$\text{Ответ: } (3\sqrt{2}-0.5; 3\sqrt{2}-0.5); \left(\frac{3\sqrt{13}-1}{2}; \frac{3\sqrt{13}-1}{2}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

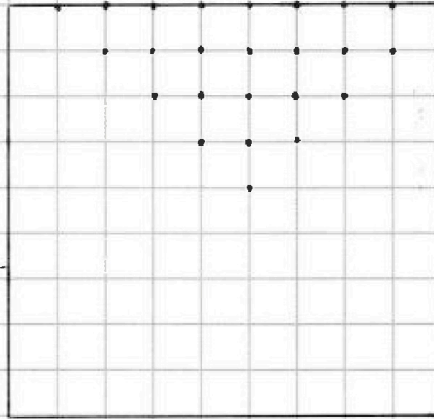
1) Узел на одной четверти тогда, точками помечены узлы одной четверти всего их 25 \Rightarrow кол-во вариантов расставить там 2 точки

$$C_{25}^2 = \frac{25!}{2!23!} = 25 \cdot 12 = 300$$

2) Узлы расположены на соседних четвертях, тогда мы можем поставить в одной четверти узел 25 разными способами $\Rightarrow \lambda = 25^2 = 625$

3) Узлы расположены в противоположных четвертях тогда также $\lambda = 25^2$ вариантов \Rightarrow всего $300 + 625 + 625 = 1250$ вариантов

Ответ. 1250





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} & x, y > 0 \quad 0 \leq y \leq 5 \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y} & f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} \nearrow \Rightarrow x=y \\ (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) (4\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{y^3} + \sqrt[4]{x^3} - y\sqrt[4]{y^3} + 5) \end{cases}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} \quad |^2$$

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$~~

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{36}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 6 + 6(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})^2 = 6$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = t$$

$$t + t^2 = 6$$

$$t^2 + 6 = 6 \Rightarrow$$

$$(t+3)(t-2)$$

$$t = 2$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$x+6 = 4 + 4\sqrt{5-x} + 5-x$$

$$2x-3 = 4\sqrt{5-x}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 16(5-x)$$

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4 + 112}}{4} = \frac{-4 \pm 10.8}{4} = \frac{6.8}{4} = 1.7$$

$$t = -3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$x+6 = 5-x-6\sqrt{5-x}+9$$

$$2x-8 = -6\sqrt{5-x}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9(5-x)$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+116}}{2} = \frac{-1 \pm 10.8}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{13}}{2} \quad \frac{-1+3\sqrt{13}}{2} > 0$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3\sqrt{2}-0.5}{2}, \frac{3\sqrt{2}-0.5}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{57} = \frac{(x^2 - 4x)^2 + (-3x^2)}{2} = \frac{x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 3x^2}{2} = \frac{x^4}{2} - 4x^3 + 6,5x^2$$

$$2a_7 = a_5 + a_9 = 2(x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 + \frac{x^4}{2} - 4x^3 + 6,5x^2$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 = 6x + 18 + \frac{x^4}{2} - 4x^3 + 6,5x^2$$

$$1,5x^4 - 12x^3 + 25,5x^2 - 6x - 18 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) =$$

$$= (x-2)^2(x^2 - 4x - 3) =$$

$$= \frac{D}{4} = 4 + 3 = 7, x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{1}$$

	1	-8	17	-4	-12
		2	-6	10	12
2	1	-6	5	+6	0
2x ² -5x+2		2x-11	-8	-6	
2	1	-4	-3	0	

$$2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$3x^4 - 24x^3 + 44x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n, \quad B = 3m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

1) $m > n$

2)

пусть $A = Bp^2$

$$\text{Тогда } 1) (m-n) : B \Rightarrow (m-n) : p^2$$

$$(m-n) = B, \text{ т.к. } m-n > 3m-n$$

$B = 3mn$ - не подходит,
второе $(m-n) : p^2 \Rightarrow p \leq 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{t}{3-n} = \frac{12}{m+n} = \frac{9}{3n} = \frac{t+4}{3n} \Rightarrow$$

$$\frac{t}{3-n} = \frac{12}{m+n} \Rightarrow \frac{9}{3n} = \frac{12}{m+n} \Rightarrow \frac{t}{3-n} = \frac{t+4}{3n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{3n} = \frac{t+4}{3n} \Rightarrow t+4 = 9 \Rightarrow t=5$$

~~$$\frac{5}{3-n} = \frac{9}{m+n}$$

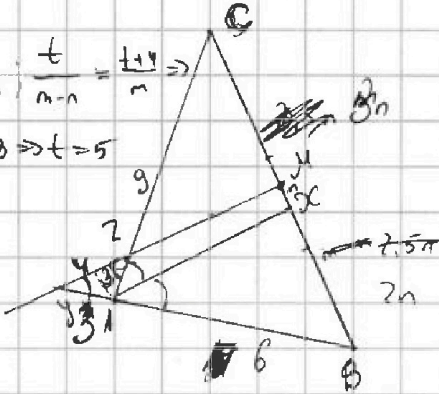
$$9m + 9n = 5m + 5n$$

$$4m = 4n$$

$$m = n$$~~

~~$$\frac{5}{3-n} = \frac{9}{m+n}$$~~

30



$\sin 120^\circ = \frac{2}{3} \Rightarrow$
 $\rightarrow \cos A = \frac{2}{3}$

$$\frac{9}{m} = \frac{12}{m+n}$$

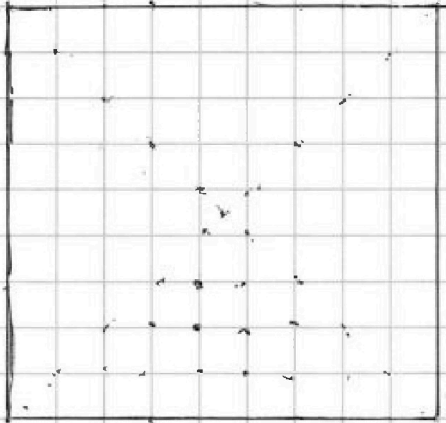
$$9m + 9n = 12m$$

$$m = 3n$$

$$\sqrt{14436 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 6} =$$

$$= \sqrt{180 - 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 2} =$$

$$= \sqrt{12(15-8)} = 2\sqrt{21}$$



1) на **одной** **четверти**
тогда $C^1_{30} = \frac{30!}{20!10!} = 15 \cdot 28 = 210$ вариантов

2) на **соседних** **сторонах**

$C^2_{10} = \frac{10!}{5!5!} = 10$, т.к. **порядок**
на **двух** **сторонах** **стороне** $30 \cdot 25$

$$N = 210 + 30(45) = 30(52) = 30 \cdot 20$$

$$= 1560 \text{ вариантов}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)(m-n+3) \quad m > n$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$P_{y \in \mathbb{N}} B = 3q^2 \quad , \text{ тогда}$$

$$m-n+3 = n = q \Rightarrow m = 2n-3 = 2q-3$$

$$n = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$A = 0 \Rightarrow m = 3, \text{ тогда } n = 3$$

$$m = m-n+3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{A} = (m-n)(m-n+3) = (m-3)(m+6) \quad m > 3 \Rightarrow m \geq 7 \Rightarrow m-3 \geq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m-3 - 2^2 = 4 \Rightarrow m = 7 \Rightarrow (m-3)(m+6) = 4 \cdot 13 = 52 = 2^2 \cdot 13 \Rightarrow (7, 3)$$

