



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Член арифметической прогрессии  $a_i = a_0 + d(i-1)$   $d$  - разность прогрессии

$$\Rightarrow (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + 2d$$

Также  $3x^2 = 3x + 3 + 6d \quad | :3$

$$x^2 = x + 1 + 2d$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 &= 3x + 3 + x^2 - x - 1 \\ x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - x^2 + x - 3 + 1 &= 0 \\ x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 &= 0^* \end{aligned}$$

Заметим, что  $x = -1$  обращает выражение в верное равенство  $\Rightarrow -1$  - один из корней

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{x^3 + x^2} \Big|_{x+1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + 3x^2 - 2} \quad * (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 3x^2 \\ -3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Заметим, что при  $x = -1$   $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$  разделим это выражение на  $x+1$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 0x - 2}{x^2 + x^2} \Big|_{x+1} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 + 2x - 2}$$

$$* (x+1)^2 (x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 0x \\ 2x^2 + 2x \\ \hline -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$$

Ответ:  $-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

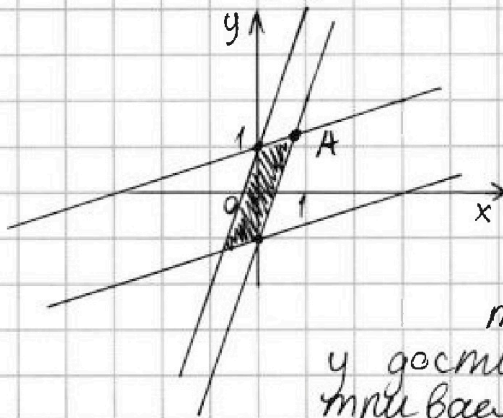
$|x - 3y| \leq 3$  - область на коорд. плоскости, ограниченная

прямыми с уравнениями

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \quad \text{и} \quad x - 3y = 3 \\ x + 3 &= 3y \\ y &= \frac{1}{3}x + 1 \\ y &= \frac{1}{3}x - 1 \end{aligned}$$

Аналогично с  $|3x - y| \leq 1$  : это область между прямыми  $y = 3x - 1$  и  $y = 3x + 1$

По условию дана система  $\Rightarrow$  оба условия выполняются одновременно  $\Rightarrow$  надо найти и рассмотреть пересечение двух областей.



Заметим, что значение выражения  $4y + 8x$  больше, чем  $y$  и  $x$

$\Rightarrow$  заметим, что в точке A (на картинке)  $x$  и  $y$  достигают максимума (рассмотрим выделенную область)

$\Rightarrow$  найдём координаты точки A:

$$y = 3x - 1 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{3}x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1; \quad \frac{8}{3}x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 8x = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Если  $(m;n)$  - решение, то и  $(n;m)$  тоже решение

~~Пусть  $B = 13p^2 \Rightarrow 2mn(m+n-3) = 13p^2 \Rightarrow$~~

Пусть  $A = 13p^2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot p \cdot p$

	$m+n$	$m+n-9$	
1)	1	$13p^2$	1) $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n \geq 2$ , а $m+n=1$ $\textcircled{\times}$
2)	13	$p \cdot p$	2) $m+n=13 \Rightarrow m+n-9 =$
3)	$13p$	$p$	$= 13-9=4$
4)	$p \cdot p$	13	$\Rightarrow 13 \cdot 4 = 13p^2 \Rightarrow p=2$
5)	$13p^2$	1	$\Rightarrow mn(m+n-3) =$
6)	$p$	$13p$	$= mn(13-3) = 10mn = 75q^2$

3)  $m+n = 13p$   
 $\Rightarrow (m+n) - (m+n-9) = 9 =$   
 $= 12p \Rightarrow p = \frac{9}{12}$   
 $p$  - не простое  $\textcircled{\times}$

$\Rightarrow mn(m+n-3) =$   
 $= mn(13-3) = 10mn = 75q^2$   
 $\Rightarrow mn = 30 \Rightarrow$  если такие  $m$  и  $n$  существуют, то они корни ур-я  $x^2 - (m+n)x + mn = 0$ :  
 отсюда  $m$  и  $n$  это 10 и 3  
 и  $q=2$

4)  $m+n-9 = 13$   
 $\Rightarrow m+n = 22 \Rightarrow mn(22-3) = 19mn = 75q^2$

$19mn = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2 \Rightarrow q = 19 \Rightarrow mn = 3 \cdot 5^2 \cdot 19$   
 Если  $m$  и  $n$  существуют, то это корни ур-я  
 $x^2 - (m+n)x + mn = 0$   $\textcircled{\times} = 22^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19 < 0$   
 $\Rightarrow$  таких  $m$  и  $n$  нет

5)  $m+n-9 = 1 \Rightarrow m+n = 10 = 13p^2$   $p = \sqrt{\frac{10}{13}}$  - не простое  $\textcircled{\times}$

6)  $m+n = p$   $m+n-9 = 13p \Rightarrow (m+n-9) - (m+n) = -9 = 12p$   
 $\Rightarrow p = -\frac{9}{12} < 0$  - не простое  $\textcircled{\times}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $B = 13p^2 \Rightarrow mn(m+n-3) = 13p^2$

Пусть  $m = 1$  ( $m$  и  $n$  взаимно простые  $\Rightarrow$  можно рассмотреть один вариант)

$\Rightarrow n(n-2) = 13p^2 > 0$   
 $\Rightarrow$  ~~каждое~~  $n > 2$

	$n$	$n-2$
1)	$13$	$p^2$
2)	$13p$	$p$
3)	$p^2$	$13$
4)	$p$	$13p$

1)  $n(n-2) = 13 \cdot 11 = 13p^2$   
 $p = \pm\sqrt{11}$  - не прост. число  $\otimes$

2)  $n = 13p$   $n-2 = p$   
 $\Rightarrow n - n + 2 = 2 = 12p$   
 $p = \frac{2}{12}$  - не простое  $\otimes$

4)  $n = p$   $n-2 = 13p$   
 $n-2-n = -2 = 12p$   
 $p = -\frac{2}{12} < 0$  - не простое  $\otimes$

3)  $n-2 = 13 \Rightarrow n = 15$   
 $\Rightarrow n(n-2) = 15 \cdot 13 = 13p^2$   
 $\Rightarrow p = \pm\sqrt{15}$  - не простое  $\otimes$

$\Rightarrow m > 1 \Rightarrow n > 1$

Пусть  $m+n-3 = 1 \Rightarrow m+n = 4 \Rightarrow$  т.к.  $m$  и  $n \in \mathbb{N}$ ,

то  $mn = 3$  или  $mn = 4 \Rightarrow 13p^2 = 3 \Rightarrow p$  - не прост. число  $\otimes$

или  $13p^2 = 4 \Rightarrow p$  - не прост. число  $\otimes$

$\Rightarrow m+n-3 > 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим все варианты  $m$   
( $n$  можно не рассматривать, т.к.  $m$  и  $n$   
взаимозаменяемые)

$m$   
 $n$   
1)  $m = 13 \Rightarrow n = (13 + n - 3) = p$   
 $0 = 10$  (✓)

2)  $m = p \Rightarrow$

a)  $n = 13$

$\Rightarrow m = (13 + m - 3) = p$   
 $0 = 10$  (✓)

б)  $n = p \Rightarrow m + n - 3 = 13$

$\Rightarrow m + n = 16 = 2p \Rightarrow p = 8$

$p$  - не простое  
(✓)

$\Rightarrow$  есть только 2 решения:  
 $(10; 3)$  и  $(3; 10)$

Ответ:  $(10; 3)$  и  $(3; 10)$

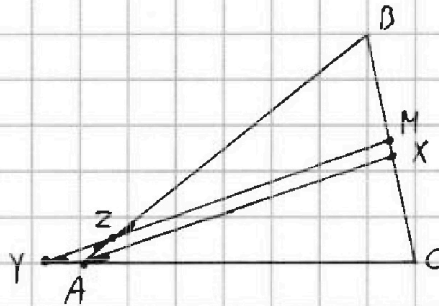


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AX \parallel YM, AZ$  - секущая

$\Rightarrow \angle XAB = \angle YZA$   
как какрест метасице  
у $\Delta$ и $\Delta$

$AX \parallel YM, AY$  - секущая  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZYA = \angle XAC = \angle XAB$  как  
( $AX$ -бисс.) соств. углы

$\Rightarrow \triangle YAZ$  - равнобедр.  $\Rightarrow YA = AZ = 6$

Запишем теорему Чева для  $\triangle ABC$  и секущей  $YM$ :

$$\frac{YA}{YC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1 \quad CM = MB \text{ (M - основание медианы)}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{6+18} \cdot \frac{BZ}{6} = 1 \Rightarrow BZ = 24$$

$\Rightarrow AB = 30$ . Пусть  $\angle CAZ = \alpha \Rightarrow$  найдем  $\cos \alpha$

в  $\triangle YAZ$ :  $\cos \alpha = \frac{YZ^2 + AZ^2 - YA^2}{2 \cdot YZ \cdot AZ} = \frac{8^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \cos \angle BAC = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2 \cdot 4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

Запишем теорему косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha = 18^2 + 30^2 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21} \quad \text{Ответ: } BC = 8\sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}^* \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2^{**} \end{cases}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

1)  $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow 0 \leq x = y$  ;  $y \leq 6$  т.к.  $\sqrt{6-y}$   
иначе не определен

$$\Rightarrow 0 \leq x = y \leq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow 2\sqrt{6+5x-y^2} \geq 6$$

$$\sqrt{6+5x-y^2} = \sqrt{6+5x-x^2} \geq 3$$

$$\Rightarrow 6+5x-x^2 \geq 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 6 \leq -9$$

$$x^2 - 5x + 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow y, x \in \left[ \frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right]$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 - (2\sqrt{6+5x-x^2})^2 =$$

$$= x+1 + 6 - x - 2\sqrt{6+5x-x^2}$$



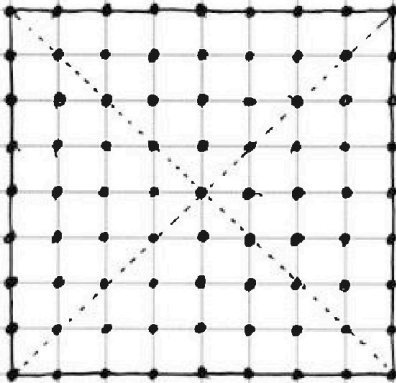


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Разобьем квадрат на 4 части как показано на картинке:  
некоторые узлы принадлежат только одной части, а некоторые - нескольким

П.к. картинки, полученные перекрашиванием считаются одинаковыми, то первый узел для перекрашивания можно сказать, что первый узел для перекрашивания находится в, например, в центральной четвертинке.

Если второй узел тоже находится в этой же четвертинке, то способов выбрать их  $\frac{25 \cdot 24}{2}$  способов

Если второй узел находится не в этой же четвертинке, то он не может соприкоснуться с этой четвертинкой никак  $\Rightarrow$  способов выбрать его - 56. Но тогда первый узел должен принадлежать только одной четвертинке  $\Rightarrow$  способов выбрать его только 16  $\Rightarrow$  всего способов  $16 \cdot 56$

$\Rightarrow$  ~~есть~~ суммарно число способов  $16 \cdot 56 + \frac{25 \cdot 24}{2} = 1196$ .

Ответ: 1196 способов

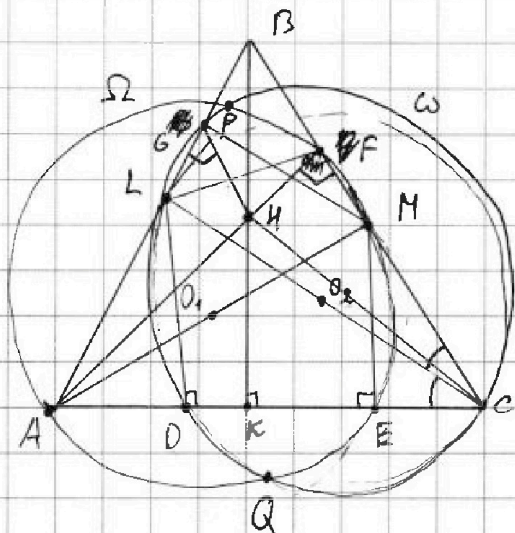


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle LDC$  опир. на диаметр

$\Rightarrow$  ок. прямой.

Аналогично  $\angle AEM =$

$= \angle AFM = \angle CP \perp L = 90^\circ$

$\Rightarrow CP, AF$  - высоты  $\triangle ABC$

$PQ$  - радикальная ось окруж-

ностей  $\Omega$  и  $\omega \Rightarrow O_1 O_2 \perp PQ$

По условию  $PQ \parallel BK$ ,  $BK \perp AC \Rightarrow O_1 O_2 \perp AC$

$\Rightarrow$  ~~по~~ по т. Фалеса  $LM \parallel AC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

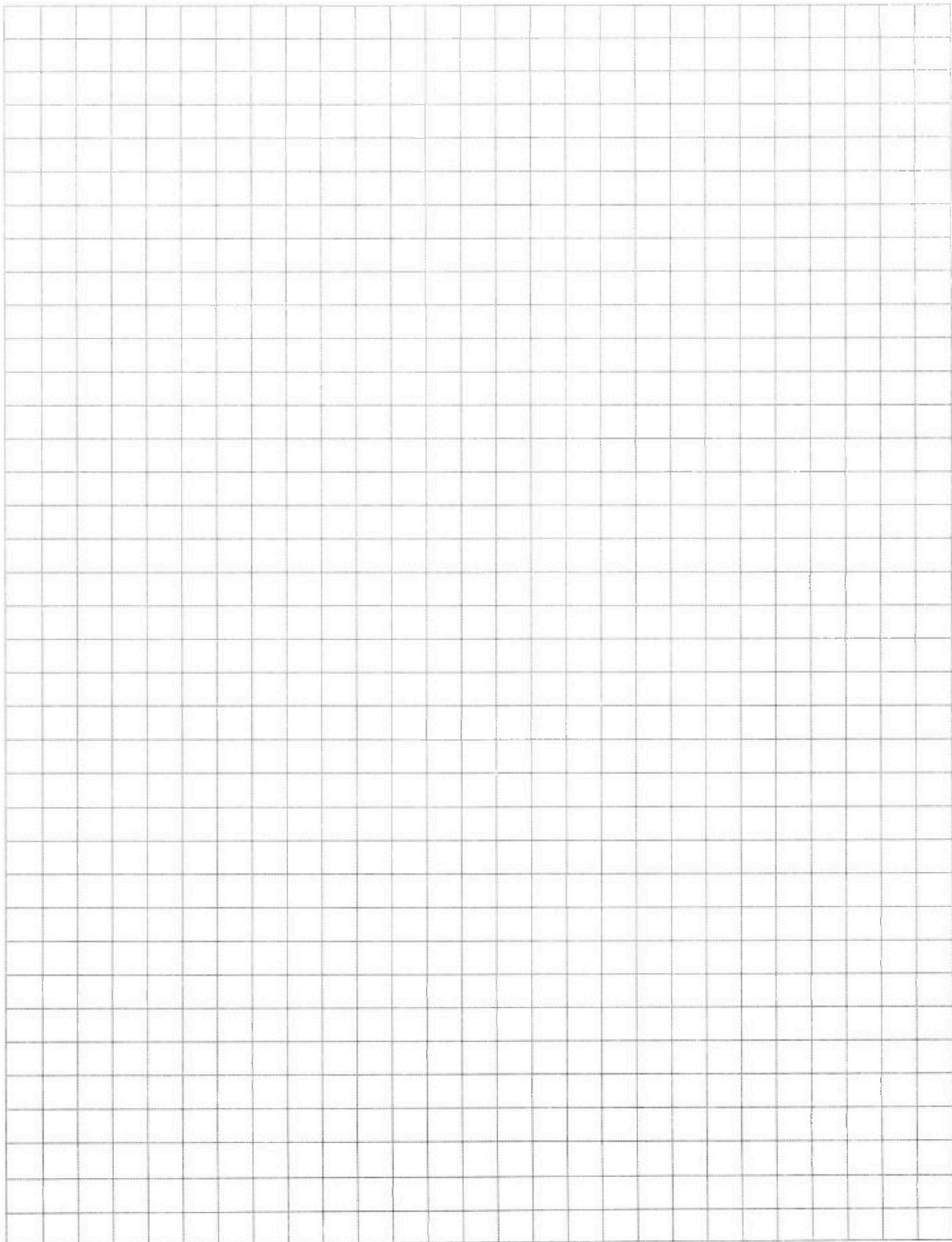
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
# ИЗ #

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3  $3v+3$

4

5  $(x^2+2x)^2 = 3x+2d + 3 \cos^2 \alpha$

6

7  $\frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

8  $3x - y = -1$

9  $3x^2 = 3x + 3 + 3d$

$x^2 - x - 1 = 2d$

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 \cdot x - 1$

$x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$

$x - 3y = 3$

$\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$3 \pm 3y \leq 3$

$13 \cdot 4$   
 $16$

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

$-1 - 1 + 3 - 2 = 0$

$\frac{8}{3}x = 2$

$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

$y = 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$

$5 + 6 = 11$

$\frac{5}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

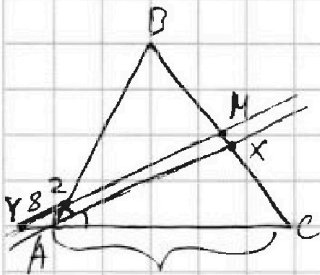
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x - 3y| < 3$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$4 \geq |x - 3y| + |3x - y| \geq |4x - 4y|$$

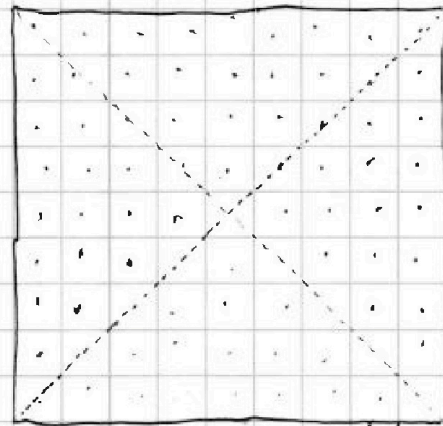
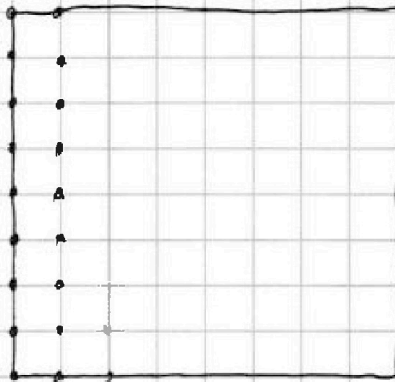
$$1 \geq |x - y|$$



$$AZ = 6$$

$$AZ = 18$$

$$AZ = 8$$



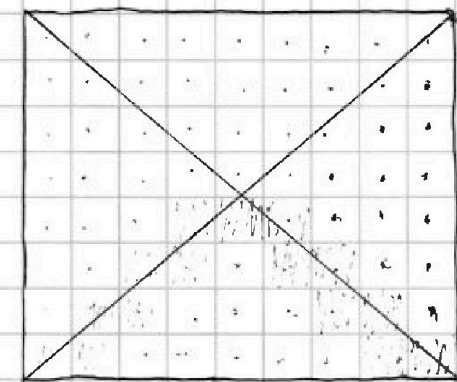
16  
15  
336  
+56  
896

25  
12  
50  
+25  
300

1196

9+8+5+3+1  
16-11-24/25

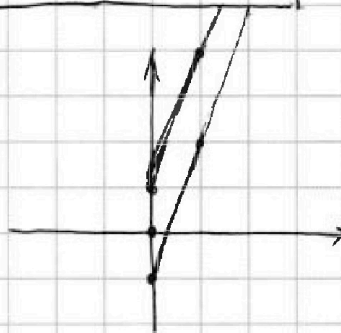
25-24  
2 ⊕  
16-56  
~~16-56~~



$$\frac{12 \cdot 11}{2}$$

$$\frac{24 \cdot 23}{2}$$

$$\frac{48 \cdot 9}{2}$$



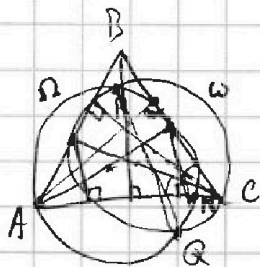


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 13p^2 = 13 \cdot p \cdot p$$

$$mn(m+n-3) = 45q^2 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) = 13p^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 = 13 \cdot p \cdot p$$

$$\frac{45q^2 - 6mn}{3} = \frac{mn(m+n-9)}{3}$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot p \cdot p$$

$$mn(m+n-3) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \Rightarrow x+1+y=0$$

$$6+5x-x^2 \geq 36$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq -36$$

$$m+n-9$$

$$m+n-m-n+9$$

$$9 = 13p - p$$

$$= 12p$$

$$p = -12p$$

$$mn(m+n-9)$$

$$x^2 - 5x + 30 \leq 0$$

$$13+9=22$$

$$m+n=22$$

$$mn = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

$$mn = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 19$$

$$15 \cdot 19 \cdot 5$$

$$m+n=22$$

$$m+n : 13$$

$$m+n-9 \stackrel{13}{=} 4$$

$$m+n-3 \stackrel{13}{=} 10$$

$m+n$	$m+n-9$
-------	---------

13	PP
----	----

17p	p
-----	---

pp	17
----	----

p	13p
---	-----

$$13-9=4$$

$$p=2$$

$$10mn = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

$$mn = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

$$m+n=13$$

$$15 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 3$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$1 \leq x$$

$$6 + 5x - y^2 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 1344 \sqrt{2} \\ 672 \sqrt{2} \end{array}$$

IV  
II

$$\begin{array}{r} 1344 \\ \times 13 \\ \hline 144 \\ 168 \\ \hline 324 \\ + 900 \\ \hline 1224 \\ + 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ \hline 1344 \\ 4 \cdot 20 \end{array}$$

$$\begin{aligned} m^2 n + mn^2 - 3mn &= \\ &= mn(m+n-3) = 13p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = p = 13 + n - 3 \\ n = 13 \\ m = m + 13 - 3 = m + 10 \\ n = p = 13 \\ \Rightarrow m + n - 3 = 13 \\ m + n = 16 \\ m = 8 = n \end{aligned}$$

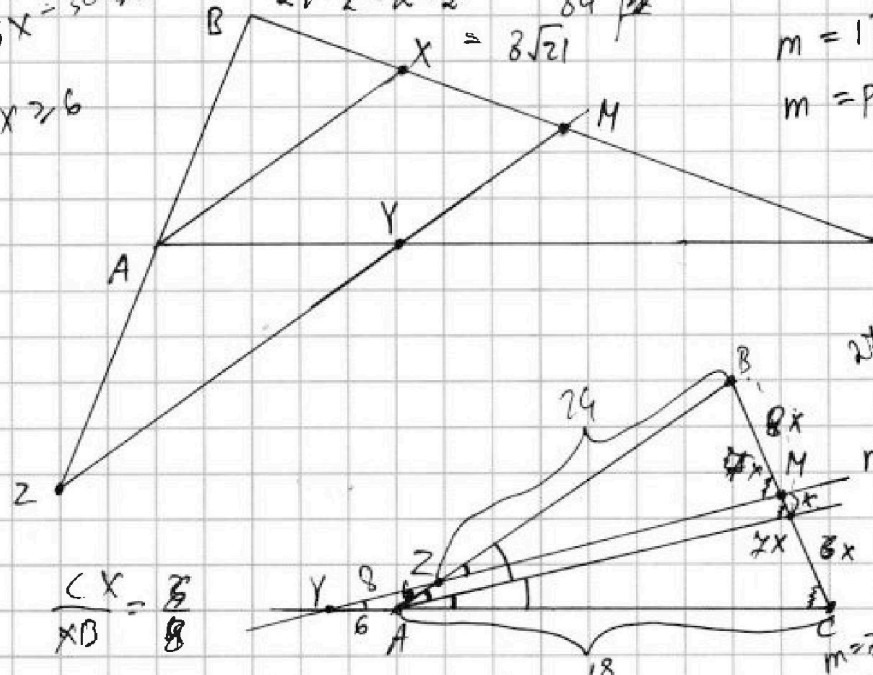
$$\begin{aligned} mn(m+n-3) &= 45q^2 \\ mn(m+n-3) &= 3 \cdot 3 \cdot 5q^2 \\ m^2(2m-3) &= 45q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^2(2m-3) &= 45q^2 \\ 3 \cdot 3 \cdot 5^2 &= m^2(2m-3) \\ m &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^2 + 2mn - n^2 - 9m - 9n &= 13p^2 \\ (m+n-3)(m+n-3) &= 13p^2 \\ m^2 + mn - 3m + nm + n^2 - 3n - 3m - 3n &= 13p^2 \\ m^2 + 2mn + n^2 - 6m - 6n + 9 &= 13p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x &\leq 6 \\ x &\geq 20 \\ 5x + 6 &\geq 20 \\ 5x &\geq 30 \\ x &\geq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 84 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \\ 168 \sqrt{2} \\ 84 \sqrt{2} \\ x = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XA} &= 1 \\ \frac{6}{6+18} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{8}{6} &= 1 \\ 24 \cdot 8x = 30 \cdot 4x \cdot \frac{6}{6+18} \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{8}{6} &= 1 \\ 12 \cdot 8x = 15 \cdot 4x \cdot \frac{6}{6+18} &= 1 \\ 12 \cdot 8 &= 15 \cdot 4 \cdot \frac{6}{6+18} \\ BZ &= 24 \end{aligned}$$