



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть первый элемент прогрессии =  $a$ , а шаг =  $b$ .

Тогда:

$$\begin{cases} a + b = 12 - 12x \\ a + 3b = (x^2 + 4x)^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \\ a + 7b = -6x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 - (12 - 12x) \\ 4b = -6x^2 - (x^4 + 8x^3 + 16x^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 &= 4b = -x^4 - 8x^3 - 22x^2 \\ 3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 &= 0 \\ x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Заметим, что  $x = -2$  — корень уравнения  $\Rightarrow$  по теореме Безу:  
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$

Заметим, что  $x = 2$  — корень  $x^2 + 6x^2 + 6x - 4 \Rightarrow$  по теореме Безу:  
 $(x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = (x + 2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$

Решим уравнение  $x^2 + 4x - 2 = 0$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 24$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$\Downarrow$

Наше исходное уравнение имеет корни:

$$\begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \{-2 - \sqrt{3}; -2; -2 + \sqrt{3}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Возьмем  $m = (x+y)/2$  и  $\alpha = x-m = m-y$

Тогда перепишем условие:

$$10x + 5y = 10(m+\alpha) + 5(m-\alpha) = 15m + 5\alpha = \min$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| = |2(m+\alpha) - 3(m-\alpha)| = |-m + 5\alpha| \leq 6 \\ |3x - 2y| = |3(m+\alpha) - 2(m-\alpha)| = |m + 5\alpha| \leq 4 \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} -6 \leq -m + 5\alpha \leq 6 \\ -4 \leq m + 5\alpha \leq 4 \end{cases}$$

⇓

$$-4 - 6 \leq (m + 5\alpha) - (-m + 5\alpha) \leq 4 + 6$$

$$-10 \leq 2m \leq 10$$

$$-5 \leq m \leq 5$$

⇓

$$15m + 5\alpha = 14m + (m + 5\alpha) \geq -5 \cdot 14 + (-4) = -70 - 4 = -74$$

⇓

$$15m + 5\alpha \geq -74$$

Равенство достигается при  $m = -5$ ;  $\alpha = \frac{1}{5}$

⇓

$$10x + 5y \geq -74 \text{ и } 10x + 5y = -74 \text{ при } x = -5 + \frac{1}{5} = -\frac{24}{5} \text{ и } y = -5 - \frac{1}{5} = -\frac{26}{5}$$

Мы оценили функцию снизу и нашли точку, где она минимум достигает  $\Rightarrow$  мы нашли минимум

Ответ: -74



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle BAX = \angle CAZ$  - биссектриса ~4

$AX \parallel MU$

$\Downarrow$

$\angle XAZ = \angle YZA$  - накрест лежащий

$\angle BAX = \angle BUM$  - соответственный

$\Downarrow$

$\angle AYZ = \angle YZA$

$\Downarrow$

$\triangle AYZ$  - равнобедренный

$\Downarrow$

$AU = AZ = 6$

Пусть  $\angle YAZ = \alpha$ , тогда найдем  $\cos \alpha$  по теореме косинусов:

$$YZ^2 = AU^2 + AZ^2 - 2 \cos \alpha \cdot AU \cdot AZ$$

$$8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6$$

$$64 = 72 - 72 \cos \alpha$$

$$72 \cos \alpha = 8 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

Пусть  $BC = 4\lambda \Rightarrow MC = 2\lambda$

Рассмотрим  $\angle ACB$ .  $AX \parallel MU \Rightarrow$  по теореме Фалеса:

$$\frac{ZC}{AZ} = \frac{MC}{XM} \Rightarrow \frac{18-6}{6} = \frac{2\lambda}{XM} \Rightarrow XM = 2\lambda \cdot \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow X \text{ середина } BM$$

$AX \parallel MU$  и  $BX = XM = \lambda \Rightarrow AX$  средняя линия для  $\triangle UBM$

$\Downarrow$

$BA = AU = 6$

$$\angle BAC = 180 - \angle YAZ = 180 - \alpha \Rightarrow \cos \angle BAC = \cos 180 - \alpha = -\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

$\Downarrow$

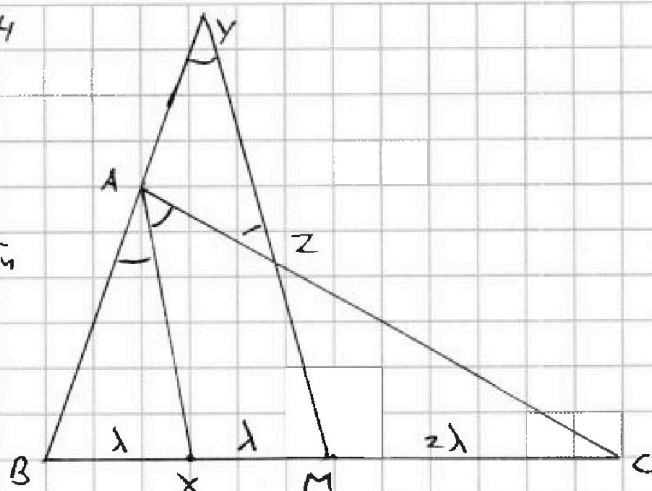
По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AB \cdot AC$$

$$BC^2 = 6^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 6 = 36 + 324 + 24 = 384$$

$$BC = \sqrt{384}$$

Ответ:  $\sqrt{384}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

Посмотрим на уравнение:

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2$$

Возьмем  $a = \sqrt[4]{3x}$  и  $b = \sqrt[4]{3y}$ , тогда:

$$2 \cdot \frac{a^{20}}{3^5} + 4 \cdot \frac{a^8}{3^2} + a - 2 \cdot \frac{b^{20}}{3^5} - 4 \cdot \frac{b^8}{3^2} - b = 0$$

Распишем как разности  $n$ -ых степеней:

$$\frac{2}{3^5} (a-b)(a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2} (a-b)(a^7 + a^6b + \dots + b^7) + a - b = 0$$

Вынесем  $(a-b)$ :

$$(a-b) \left( \frac{2}{3^5} (a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2} (a^7 + a^6b + \dots + b^7) + 1 \right) = 0$$

Заметим, что  $a$  и  $b$  - корни четной степени  $\Rightarrow a \geq 0$  и  $b \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  во 2 скобке выражение  $\geq 1$  (там все знаки - плюсы)

$\Downarrow$

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt[4]{3x} = \sqrt[4]{3y} \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$$

Тогда запишем 1 уравнение:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{12-x-x^2} - 5$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 48 - 4x - 4x^2 - 20\sqrt{12-x-x^2} + 25$$

$$18\sqrt{(x+4)(3-x)} = 56 - 4x - 4x^2$$

$$9\sqrt{(x+4)(3-x)} = -(2x^2 + 2x - 33)$$

$$81(-x^2 - x + 12) = 4x^4 + 4x^3 - 66x^2 + 4x^3 + 4x^2 - 66x - 66x^2 - 66x + 33^2$$

$$4x^4 + 8x^3 - (132 + 81)x^2 - (132 + 81)x + 1089 - 392 = 0$$

$$4x^4 + 8x^3 - 51x^2 - 51x + 117 = 0$$

Производная

$$16x^3 + 24x^2 - 102x - 51 = 0$$

В  $x=2$  меньше 0, в  $x=3$  больше  $\Rightarrow$  экстремум между ними

Но в этом отрезке  $117 + 4x^4 + 8x^3 <$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что если узлы сетки, которые мы  
выбрали, симметричны относительно центра квадрата,  
то они при поворотах дают 2 различные картинки,  
которые мы считаем одинаковыми. Если они несимметрич-  
ны, то 4 различные, так как при повороте узлы не могут  
занять места друг друга  $\Rightarrow$  вариантов всего =  
 $=$  симметричных  $/ 2 +$  несимметричных  $/ 4 = \frac{64}{2} / 2 +$   
 $+ \left( \frac{64 \cdot 63}{2} - \frac{64}{2} \right) / 4 = \frac{64}{4} + \frac{64 \cdot 62}{8} = 16 + 8 \cdot 62 =$   
 $= 496 + 16 = 512$

Ответ: 512



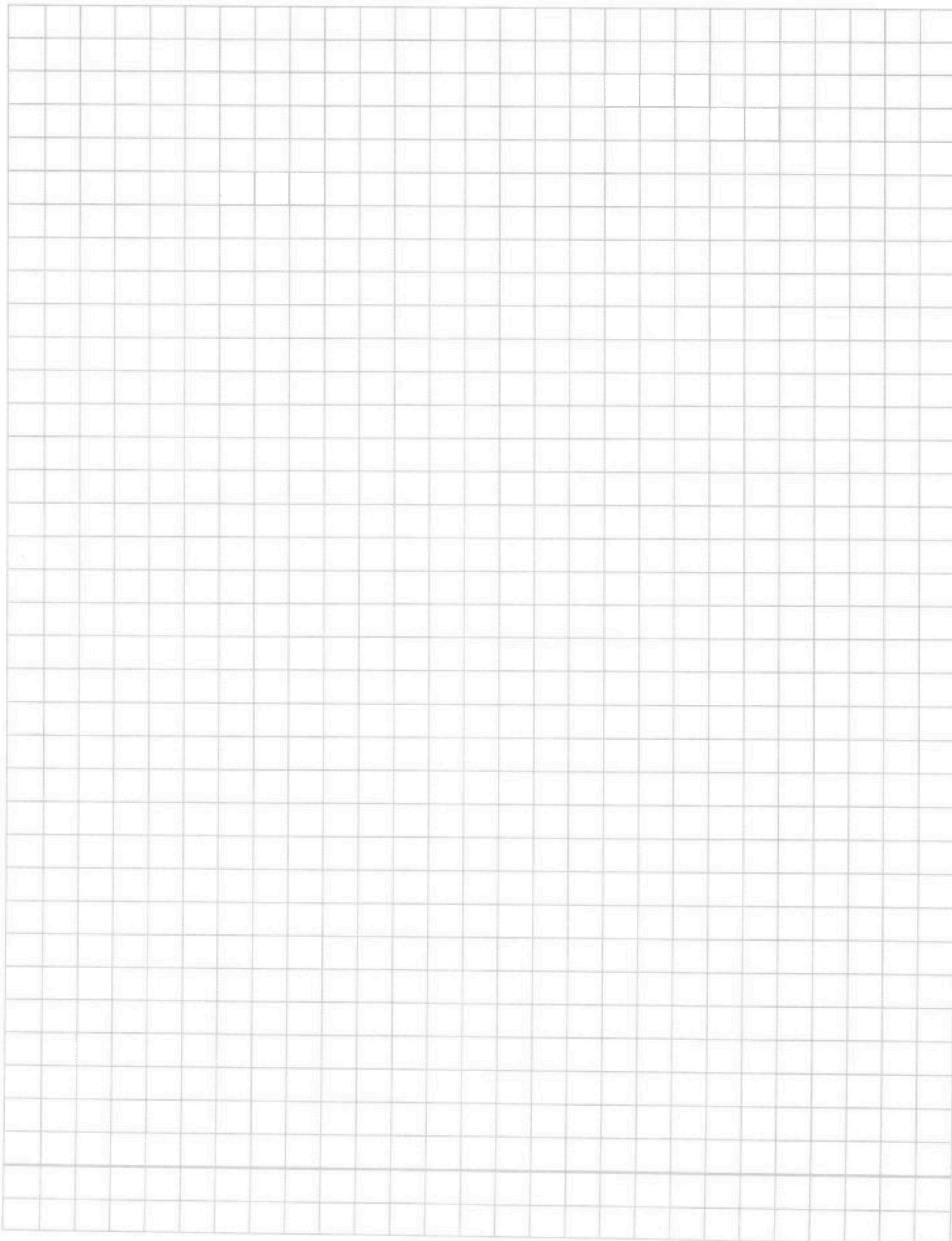


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 12 - 12x \quad 36 \quad 12 + 24 - 12x \quad 36 - 12x$$

$$a + 3b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \quad 14 \quad 2(a - b) = c - b$$

$$a + 7b = -6x^2 \quad -24 \quad 3b - c - a = 0 \quad c + b - 2a = 0$$

$$c - 3b + 2a = 0 \quad (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x - 2)$$

$$2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 \quad (x - 4x + 4)$$

$$4b = -x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 6x^2 \quad (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 12x - 2)$$

$$2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$16 \quad -64 \quad 72 \quad -16 \quad -8$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \mid x + 2 \\ \underline{x^4 + 2x^3} \phantom{+ 16x^2 + 8x - 8} \\ 6x^3 + 16x^2 \phantom{+ 8x - 8} \\ \underline{-6x^3 + 12x^2} \phantom{+ 8x - 8} \\ 6x^2 + 8x \phantom{- 8} \\ \underline{-6x^2 + 12x} \phantom{- 8} \\ -4x - 8 \end{array}$$

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$-8 \quad 24 \quad -12 \quad -4$$

$$3x^2 + 12x + 6 = 0$$

$$(x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 2 = 8$$

$$(x+2)^2 \left( \right)$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$13p^2 - 15q^2$$

$$16(p^2 - q^2) + q^2 + p^2$$

$$\left| x - \frac{3}{2}y \right| \leq 3$$

$$\left| x - \frac{2}{3}y \right|$$

$$m^2 - 4nm + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n)$$

$$(m - 2n + 13)(m - 2n)$$

$$mn(m - 2n - 2) \quad 12 \mid$$

$$\left| y - \frac{2}{3}x \right| \leq 2$$

$$\left| y - \frac{1}{2}x \right| \leq 4$$

$$x(x+13) = 12p^2$$

0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49







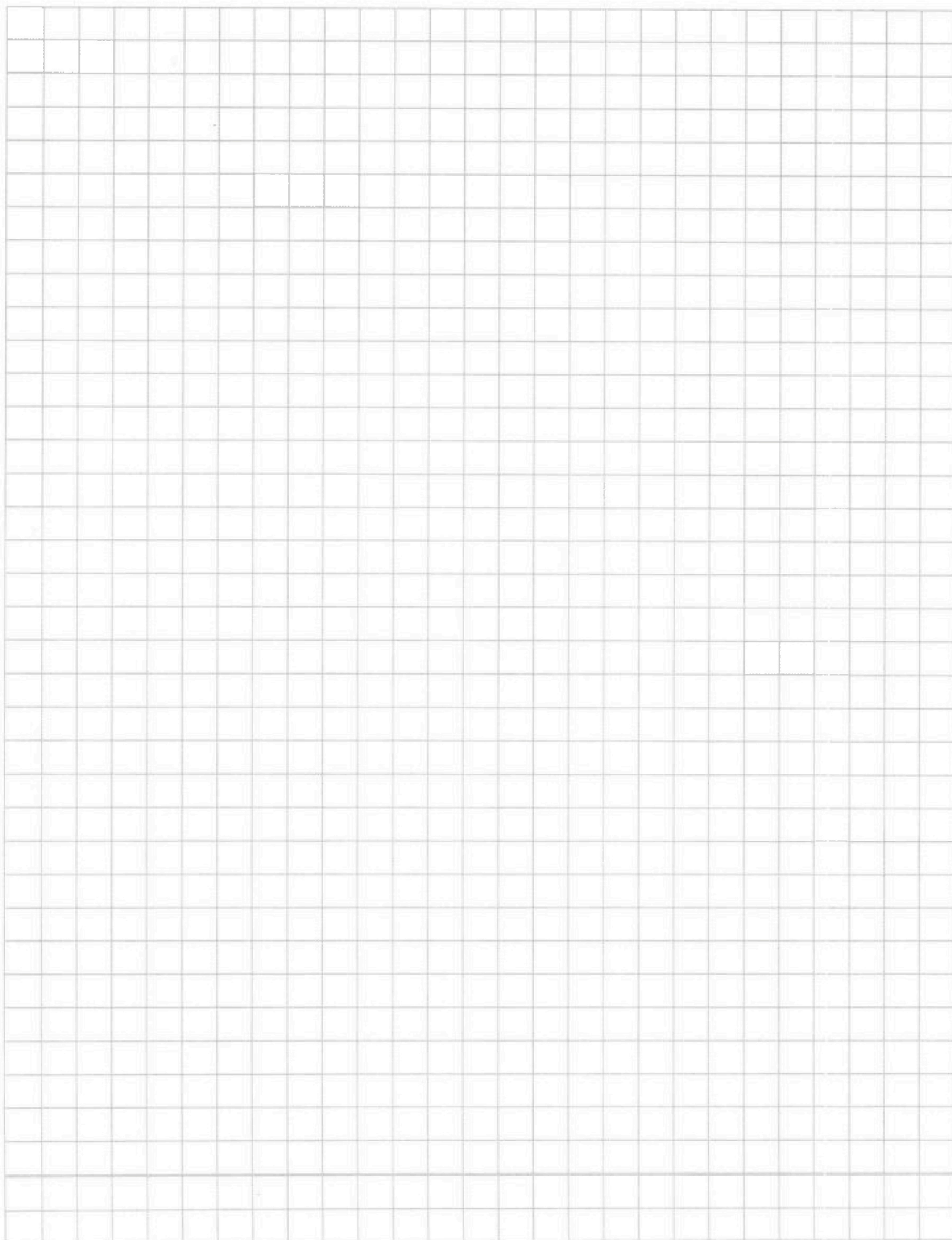
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

