



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $w_1$

$$\begin{cases} a_5 = 6x + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = (-3x^2)^2 \end{cases} \cdot x^{-7} \quad \begin{cases} a_7 - a_5 = 2d \\ a_{11} - a_7 = 4d \end{cases}$$

$d$ -шаг  
Арифметическая  
прогрессия

$$\begin{cases} x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 = 2d \quad | \cdot 2 \\ -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 4d \end{cases}$$

$$1. \quad 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

Уз делителей  
свободного члена  
находим  $x = 2$

$$2. \quad \begin{array}{r|l} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 & x - 2 \\ \underline{-x^4 + 2x^3} & \\ -6x^3 + 17x^2 & \\ \underline{-6x^3 + 12x^2} & \\ -5x^2 - 4x & \\ \underline{-5x^2 - 10x} & \\ 6x - 12 & \\ \underline{6x - 12} & \\ 0 & \end{array}$$

$$3. \quad x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$$

Уз делителей свободного  
члена находим  $x = 2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 & x - 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} & \\ -4x^2 + 5x & \\ \underline{-4x^2 + 8x} & \\ -3x + 6 & \\ \underline{-3x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$4. \quad x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 3 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$\cancel{x^4 - 24x^3} + 5x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = (x-2)(x-2)(x-2-\sqrt{7}) \cdot (x-2+\sqrt{7})$$

Ответ:  $2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

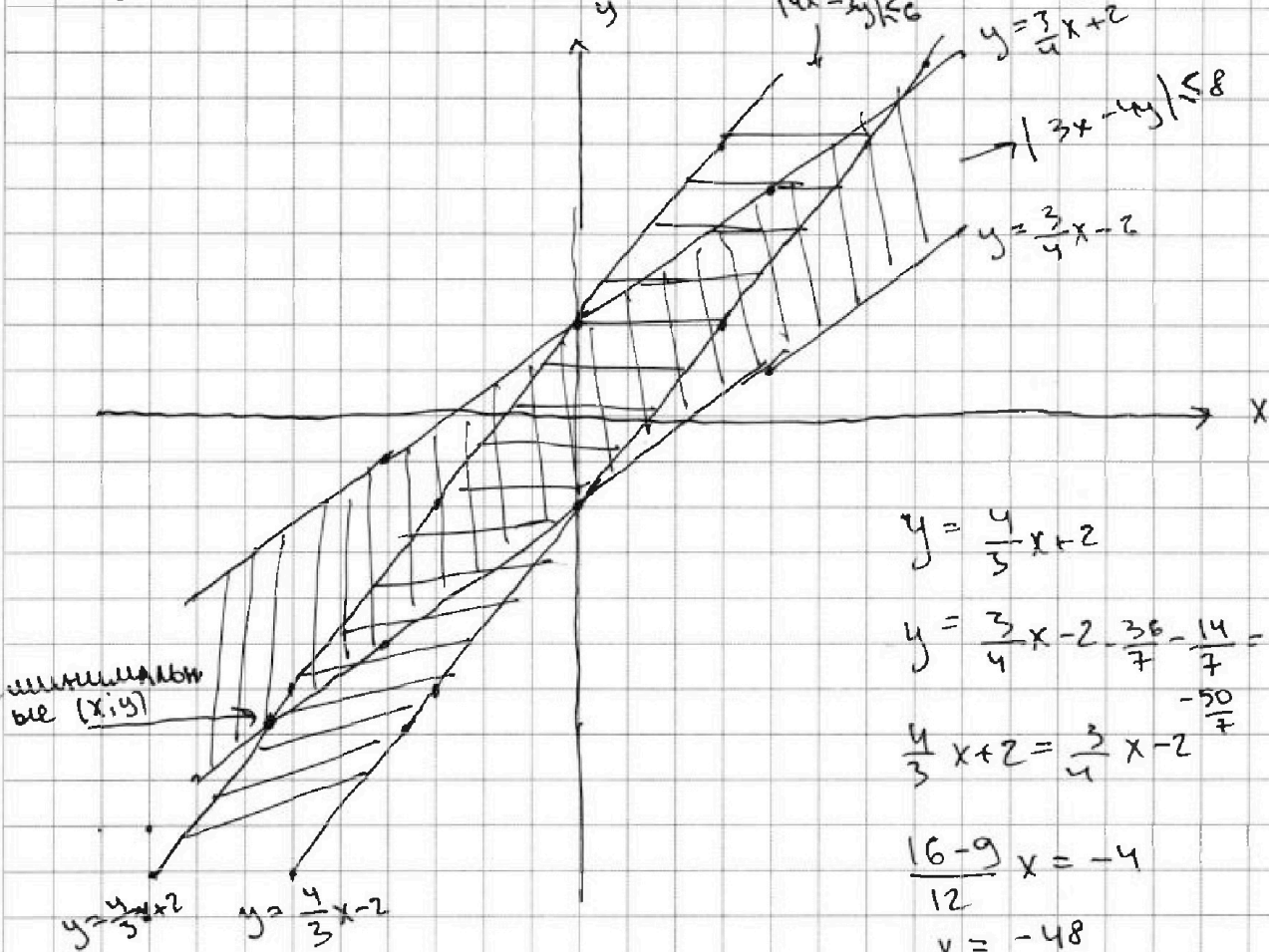
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{w.t. } \begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{4x - 6}{3} \\ y \leq \frac{4x + 6}{3} \\ y \geq \frac{3x - 8}{4} \\ y \leq \frac{3x + 8}{4} \end{cases}$$

мин(14x + 7y) - ?

Построим график функции

1.  $y = \frac{4x}{3} - 2$     2.  $y = \frac{4x}{3} + 2$     3.  $y = \frac{3}{4}x - 2$      $y = \frac{3}{4}x + 2$



минимум в (x; y)

$$y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2 \quad \frac{36}{7} - \frac{14}{7} = -\frac{50}{7}$$

$$\frac{4}{3}x + 2 = \frac{3}{4}x - 2$$

$$\frac{16 - 9}{12}x = -4$$

$$x = \frac{-48}{7}$$

$$y = -\frac{50}{7}$$

$$14 \cdot \left(\frac{-48}{7}\right) + 7 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right) = -96 - 50 = -146$$

Ответ: -146





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \begin{cases} A = 3q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ (m-n+3)mn = 13q^2 \end{cases}$$

Пусть  $m-n = 3$   
 $3(12) = 3q^2$   
 $q^2 = 12 \quad \times$

Пусть  $m-n = q^2$   
 $q^2(q^2+9) = 3q^2$   
 $q^2+9 = 3 \quad \times$

Пусть  $m-n = 3q$   
 $3q(3q+9) = 3q^2$   
 $2q = -9 \quad \times$

Пусть  $m-n = 3q^2$   
 $3q^2(3q^2+9) = 3q^2$   
 $3q^2+9 = 1 \quad \times$

Пусть  $m-n = q$   
 $q(q+9) = 3q^2$   
 $q+9 = 3q$   
 $2q = 9 \quad q = 4.5 \quad \times$

Пусть  $m-n = 1$   
 $1 \cdot 10 = 3q^2 \quad \times$

Рассмотрев все варианты мы увидели, что  $m$  и  $n$  удовлетворяющие условиям только один

Ответ:  $m=7, n=3$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 3q^2 \end{cases} \quad \underbrace{(m-n)(m-n+9)}_{\substack{\text{не имеют} \\ \text{делителей кроме} \\ 13; p; p; 1}} = 13p^2 \quad p, q \in \text{простые}$$

Пусть  $m-n = 13$ ,  
тогда  $13 \cdot 21 = 13p^2$   
 $p^2 = 21 \rightarrow$  не суз.

Пусть  $m-n = p^2$   
 $p^2 \cdot (p^2 + 9) = 13p^2$   
 $p^2 + 9 = 13$   
 $p = 2$   
суз.

Пусть  $m-n = p$   
 $p(p+9) = 13p^2$   
 $12p = 9$   
 $p = \frac{3}{4}x$

Пусть  $m-n = 1$   
 $13p^2 = 10x$

$mn = 21n + 4$   
 $n^2 + 4n = 21$   
 $n^2 + 4n - 21 = 0$   
 $D = 16 + 84 = 10^2$   
 $n = \frac{-4 \pm 10}{2} = 3; -7$  (не пог.)  
 $m = 7 \quad n = 3$

Пусть  $m-n = 13p$   
 $13p(13p+9) = 13p^2$   
 $p = 13p + 9$   
 $p = -\frac{9}{13}x$

Пусть  $m-n = 13p^2$   
 $13p^2(13p^2+9) = 13p^2$   
 $13p^2+9 = 1 \quad \emptyset$

Вернемся к  $m-n = p^2$   
тогда  $3q^2 = mn = 7$   
 $q^2 = 7 \Rightarrow q = \sqrt{7}$   
 $3 \cdot 7 = mn = 7$   
 $mn = 21$   
 $m-n = 4$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\sin \angle BAC &= \sin 2\angle BYM = 2\sin \angle BYM \cdot \cos \angle BYM = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\angle BYM &= \cos^2 \angle BYM - \sin^2 \angle BYM = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9} \\ \cos 2\angle BYM &= \cos \angle BAC\end{aligned}$$

По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC \cdot \cos \angle BAC$$

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 180 + \frac{144}{9} =$$

$$180 + 16 = 196 = BC^2$$

$$BC = 14$$

Ответ: 14





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

шч

Дано:

ABC - треугол.

AX - биссектриса

(M) - середина BC

MY || AX

Y ∈ BA (прямой)

Z = AC ∩ MY

AC = 12

AZ = 3

YZ = 4

Найти: BC = ?

Решение:

Проведем YC

$\triangle AXB \sim \triangle YMB$

по 2-ым углам

$\angle XAC = \angle BAX$  (биссек)

$\angle XAC = \angle AZY$  (как накрестные)

$\angle AZY = \angle MZC$  (как верш.)

$\angle BYC = \angle BAX$  (пчт пар.)

$\angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AYZ$  - равнобедренный

$AZ = AY = 3$

$ZC = AC - AZ = 9$

Пусть  $MC = x$

$\triangle MZC \sim \triangle AXC$  по 2-ым углам

$$k = \frac{AC}{ZC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$XC = \frac{4}{3}x \quad XM = \frac{4}{3}x - x = \frac{1}{3}x, \text{ а } BX = \frac{BC}{2} - XM =$$

$$\triangle BYM \sim \triangle BAX \text{ (по 2-ым углам)} = x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$$

~~$$k = \frac{BY}{BX} = \frac{x}{\frac{2}{3}x} = \frac{3}{2}$$~~

$$\frac{BY}{BA} = \frac{BM}{BX} = \frac{x}{\frac{2}{3}x} = \frac{3}{2} \quad \frac{BA+3}{BA} = \frac{3}{2}$$

~~$$BA = \frac{2}{3}BA + 3$$~~

$$BA = 6$$

$$\cos \angle AYZ = \frac{AZ^2 + AY^2 - ZY^2}{2 \cdot AZ \cdot AY} = \frac{9 + 9 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-16}{24} = -\frac{2}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \angle AYZ = \frac{AZ^2 + AY^2 - ZY^2}{2 \cdot AZ \cdot AY} = \frac{9 + 9 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-16}{24} = -\frac{2}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle AYZ = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{5-x} - 3$$

$$x+6 = 9 + 5 - x - 6\sqrt{5-x}$$

$$2x - 8 = -6\sqrt{5-x}$$

$$4x^2 - 32x + 64 = -36x + 180$$

$$4x^2 + 4x - 116 = 0$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 116 = 117 = 9 \cdot 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{-1 - 3\sqrt{13}}{2} < 0 \text{ — не подходит}$$

$$\frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2} \wedge 5 \rightarrow 1$$

$$\checkmark \text{ подходит} \quad 3\sqrt{13} \wedge \sqrt{121} \\ 117 < 121$$

$$x = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2} \quad y = \frac{-1 + 3\sqrt{2}}{2} \quad x = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2} \quad y = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$

Ответ:  $\left( \frac{-1 + 3\sqrt{2}}{2}; \frac{-1 + 3\sqrt{2}}{2} \right); \left( \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0.2.3.  
 $x \geq 0$   
 $y \geq 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$4(x^4 - y^4) + (x - y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \quad | \cdot (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}) + (x-y)(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}) + 5(x-y) = 0$$

$$(x-y) \left( 4(x+y)(x^2+y^2)(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}) + (x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}) + 5 \right) = 0$$

всегда  $> 0$  макс }  $\Rightarrow$   
 макс  $x \geq 0$   $y \geq 0$

$$\Rightarrow x - y = 0 \quad x = y$$

$$5 + \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{30-x-x^2} = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

Введем замену  $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = t$ , тогда

$$t^2 = x+6 + 5-x - 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$2\sqrt{(x+6)(5-x)} = 11 - t^2$$

$$t + 5 = 11 - t^2$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 5^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3; 2$$

$$\frac{-1 - 3\sqrt{2}}{2} \text{ не подходит } < 0$$

$$\frac{-1 + 3\sqrt{2}}{2} \wedge 5 \quad 18 < 11^2$$

$$\frac{-1 + 3\sqrt{2}}{2} \wedge 10 \quad \frac{-1 + 3\sqrt{2}}{2} \text{ - подходит}$$

$$\begin{cases} t = -3 & \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$(\sqrt{x+6})^2 = (2 + \sqrt{5-x})^2$$

$$x+6 = 4 + 2\sqrt{5-x} + 5-x$$

$$(2x-3)^2 = (4\sqrt{5-x})^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 80 - 16x$$

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 71 = 16 \cdot 72 = 4 \cdot 6 \cdot 2$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 24\sqrt{2}}{8} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

$$-3(4 \pm 4\sqrt{7} + 7)$$

$$-12 \mp 12\sqrt{7} - 21$$

$$-33 \mp 12\sqrt{7}$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$y = \frac{4x}{3}$$

$$y = \frac{3x}{4}$$

$$4x + 7y \text{ min}$$

$$2 \pm \sqrt{7}$$

$$12 \pm 6\sqrt{7} + 18 = 30 \pm 6\sqrt{7}$$

$$4 \pm 4\sqrt{7} + 7 - 4(2 \pm \sqrt{7}) =$$

$$= 4 \pm 4\sqrt{7} + 7 - 8 \mp 4\sqrt{7}$$

$$3^2 = 9$$

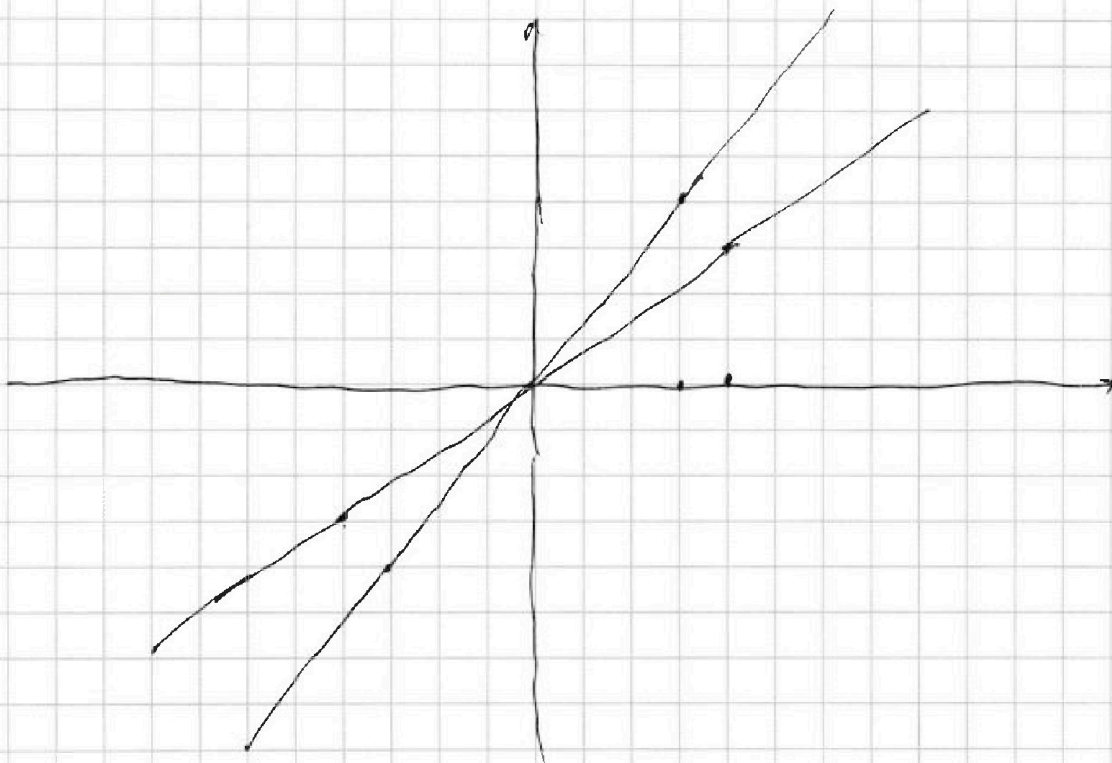
$$9 - (30 \pm 6\sqrt{7}) =$$

$$= -21 \mp 6\sqrt{7}$$

$$4x \geq 3y$$

$$-10.5 \mp 3\sqrt{7}$$

$$-42 \mp 12\sqrt{7}$$







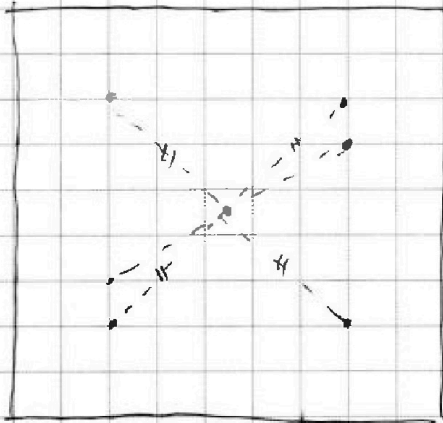
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

шб



Всего в квадрате  $9 \times 9$   
100 точек.

Выбрать две  
можно  $C_{100}^2$  способами.

Можно заметить,  
то ~~каждый~~ выбор  
две точки и сделать  
четыре оборота  
мы возвращаемся  
в исходное положение.

Иногда мы возвращаемся в исходное положение уже через два оборота. Это происходит тогда, когда повернув точки и получив две новые точки, мы получаем квадрат, если соединим все четыре точки. При этом пересечение диагоналей уже находится в центре внутреннего квадрата. А значит точки лежат симметрично относительно центра. Способов во всех случаях такая ситуация у нас получается 4 расхождения, а не 2.

Способов выбрать точки симметрично лежащих относительно центра =  $\frac{100}{2} \rightarrow$  так

как выбор точки мы автоматизировали выбором второй.

Всего вариантов:  $\frac{C_{100}^2 - 50}{4} + \frac{50}{2} = \frac{100 \cdot 99 - 100}{2 \cdot 4}$

$$= \frac{50 \cdot 99 - 50}{4} + 25 = \frac{50 \cdot 98}{4} + 25 = 25 \cdot 49 + 25 =$$

Ответ: 1250

$$= 25 \cdot 50 = 1250$$

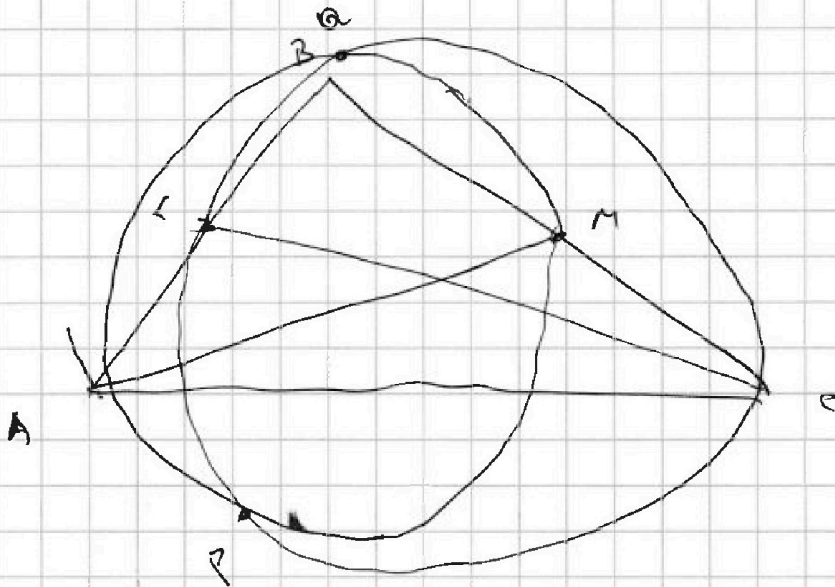
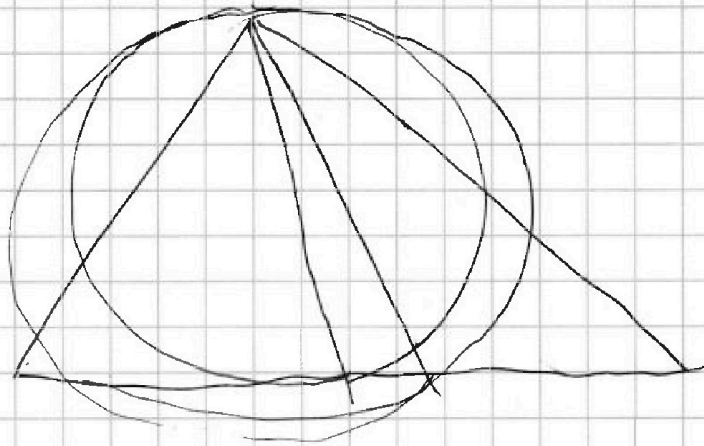


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ \sqrt{x^4+x} - 5\sqrt[4]{y} = 4\sqrt[4]{y} - 5\sqrt{x+y} \end{cases}$$

$$4x^4 - 4y^4 + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} + x - y = 0$$

$$4(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2 + y^2) + 5$$

$$(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2 + y^2)(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) + 5(x-y)$$

$$+ (x-y)(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$$

$$(x-y) \left( 4(x+y)(x^2 + y^2)(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) + 5 + (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) \right) = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$t = \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}$$

$$t^2 = x+6 + 5-x - 2\sqrt{30-x-x^2} =$$

$$-11 - t^2$$

$$11 - t^2$$

$$t + 5 = 11 - t^2$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 5^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = t_1 = 2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m(m-n+3) = 13p^2$$

$$(m-n)(m-n+9) = 3q^2$$

$$q+9 = 3q$$

$$q = 4,5$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{145}}{13} = \frac{9}{3} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{9}{3 \cdot 13} = \frac{3}{13}$$

$$\frac{2}{3}x : \frac{1}{3}x = 2$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= 2 \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{13} \end{aligned}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$9 = 9 + 16 - 2 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-16}{-24} = \frac{2}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x^2 = 16 + 81 + 2 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3}$$

$$97 + 48 = 145$$

cos

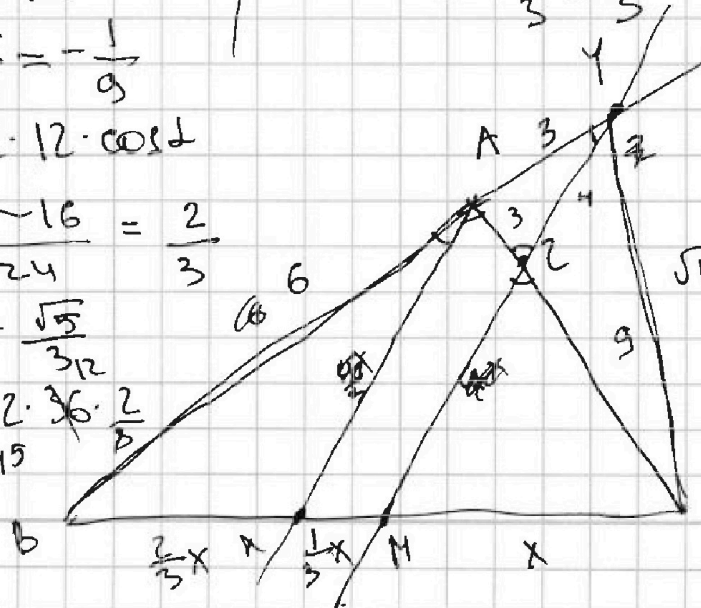
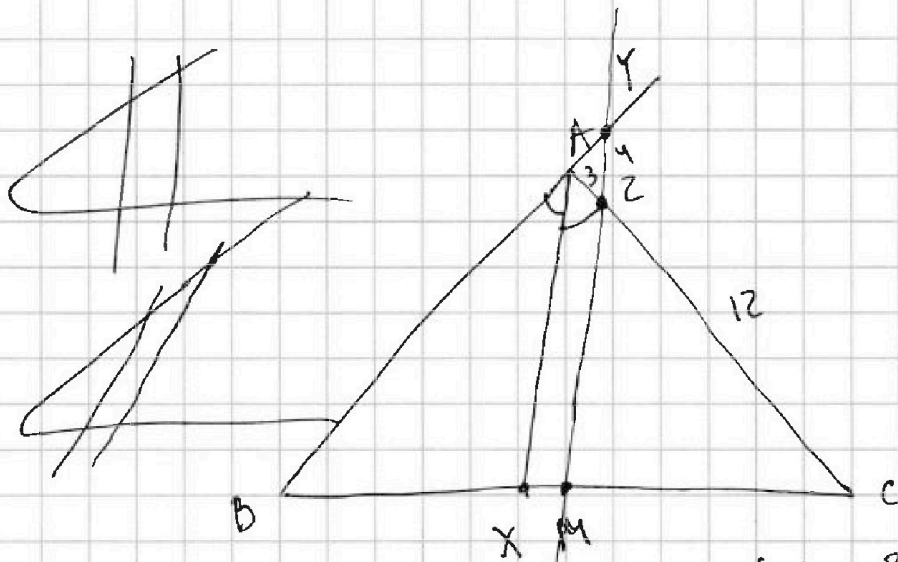
$$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$\sqrt{145}$

$$56 + 81 + 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$117 + 12 = 129$$

$$x : \frac{3}{2}x = \frac{2}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2 = x^2(x-4)^2 = x^2(x^2 - 8x + 16)$$

$$a_{11} = (-3x^2) = -3x^2$$

$$a_7 - a_5 = 2d$$

$$a_{11} - a_7 = 4d$$

$$\begin{cases} x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 = 2d & | \cdot 2 \\ -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 4d \end{cases}$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2$$

$$\begin{cases} -3x^2 - x^2(x-4)^2 = 4d \\ x^2(x-4)^2 - (6x+18) = 2d & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$-3x^2 - x^2(x-4)^2 = 2x^2(x-4)^2 - 2(6x+18)$$

$$3x^2(x-4)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$3x^2(x^2 - 8x + 16) + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 48x^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \neq 0 \quad | \cdot x - 2$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 \\ -6x^3 + 17x^2 \\ -6x^3 + 12x^2 \\ -5x^2 - 4x \\ 5x^2 - 10x \\ 6x - 12 \end{array}$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

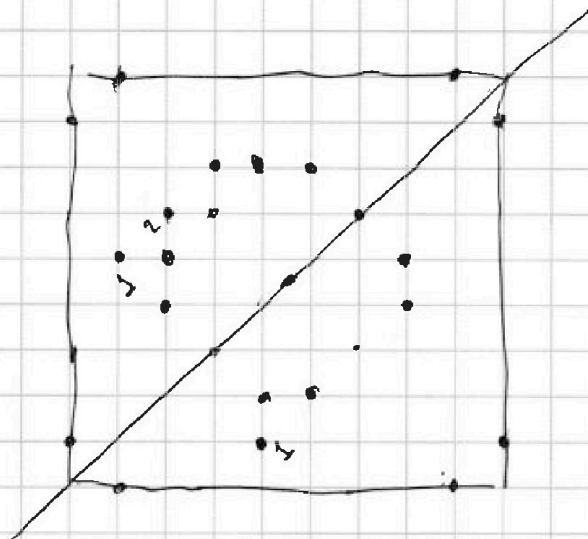


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если  
Проверим и  
получим квадрат,  
то : 2, если нет  
то : 4

$$C_{100}^2$$

$$\frac{100}{2} = 50$$

$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99$$

$$\frac{50 \cdot 99}{4} = 50 \cdot \frac{99}{4}$$
$$25 \cdot 49 + 25$$
$$25 \cdot 50$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$x+6 = 4 + 5-x + 2\sqrt{5-x}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$2x-3 = 4\sqrt{5-x}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 80 - 16x$$

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 71 = 16(1+71) = 16 \cdot 72 = 4 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 24\sqrt{2}}{8} = \frac{-1 \pm 6\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2} = -0,5 + 3\sqrt{2} + 6$$

$$5,5 + 3\sqrt{2}$$

$$5,5 - 3\sqrt{2}$$

[-6; 5]

$$\rightarrow -1 + 6\sqrt{2} \quad 10$$

$$x+6 = 9 + 5-x - 6\sqrt{5-x}$$

$$6\sqrt{2} < 11$$

$$2x-8 = -6\sqrt{5-x}$$

$$780 + 36x = 4x^2 - 32x + 64$$

$$-1 - 6\sqrt{2} - 12$$

$$-6\sqrt{2} > -11$$

$$4x^2 + 4x - 116 = 0$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 116 = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

$$\frac{11}{2} + 3\sqrt{2} + \frac{11}{2} - 3\sqrt{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

5

$$-2\sqrt{\frac{121}{4} - 18}$$

$$11 - 2\sqrt{\dots}$$

$$-1 + 3\sqrt{13} < 10$$

$$+ 3\sqrt{13} < -11$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

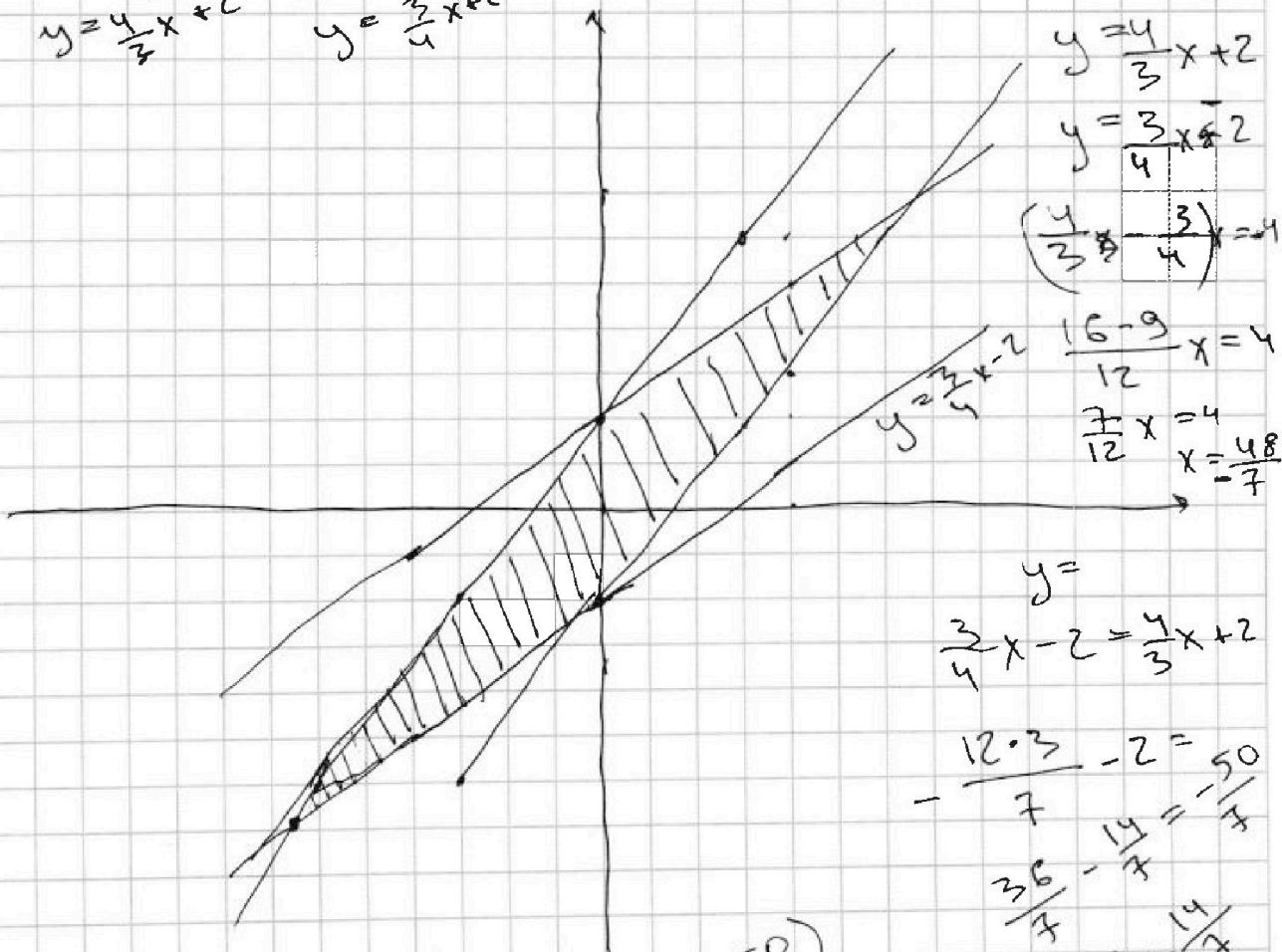
$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases} \begin{cases} y \geq \frac{4x-6}{3} \\ y \leq \frac{4x+6}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \begin{cases} y \leq \frac{3x-8}{4} \\ y \geq \frac{3x+8}{4} \end{cases}$$

$$y = \frac{4}{3}x - 2 \quad y = \frac{3}{4}x - 2$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad y = \frac{3}{4}x + 2$$



$$y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right) = 4$$

$$\frac{16-9}{12}x = 4$$

$$\frac{7}{12}x = 4$$

$$x = \frac{48}{7}$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2$$

$$-\frac{12 \cdot 3}{7} - 2 = \frac{50}{7}$$

$$\frac{36}{7} - \frac{14}{7} = \frac{22}{7}$$

$$-\frac{16 \cdot 4}{7} + \frac{14}{7}$$

$$7 \cdot 2 \left(\frac{-48}{7}\right) + 7 \left(\frac{-50}{7}\right)$$

$$-96 - 50 = -146$$

$$\left(-\frac{48}{7}, -\frac{50}{7}\right)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = 13p^2$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = 3q^2$$

$$(m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) = A = 13p^2$$

$$mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$mn(m-n+3) = 3 \cdot 9 \cdot 9$$

$$(m-n)(m-n+9) = 52$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p \cdot p$$

$$m-n = p^2$$

$$p^2 + 9 = 13$$

$$p = 2$$

$$mn = 3$$

1.  $m=1$   $n=3$     2.  $m=3$   $n=1$     1.  $3 \cdot 5$   
 $n=3 \rightarrow n=1$     2.  $3 \cdot 1 = 3$

$$13p + 9 = p^2$$

$$12p + 9 = 0$$

$$p + 9 = 13p$$

$$12p = 9$$

$$p = \frac{3}{4}$$

$$mn = 9$$

$$m-n+3 = 3q$$

$$m-n = 3q-3$$

$$(3q-3)(3q-3+9) = (3q-3)(3q+6)$$

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ mn = 21 \\ m-n+9 = 13 \end{cases}$$

$$m = 4+n$$

$$n^2 + 4n = 21$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$D = 16 + 84 = 100$$

$$n = \frac{-4 \pm 10}{2} = 3 \quad m = 7$$

$$mn \cdot 7 = 3q^2$$

$$mn = 3q \quad q = 7$$

$$12 = mn$$