



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть a_1, a_2, \dots - арифм. прогрессия, d - ее разность. Тогда по условию $a_3 = 3x+3$, $a_5 = (x^2+2x)^2$, $a_9 = 3x^2$. Известно, что

$$\begin{cases} a_5 = a_3 + 2d \\ a_9 = a_5 + 4d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_9 - a_5 = 2(a_5 - a_3) \\ a_9 - 3a_5 + 2a_3 = 0 \end{cases} \text{ Решим это ур-е.}$$

$$3x^2 - 3(x^2+2x)^2 + 2(3x+3) = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - (x^2+2x)^2 + 2x+2 = 0$$

$$x^2 - 4x^2 - x^4 - 4x^3 + 2x + 2 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Заметим, что $x = -1$ - корень, разложим на множители:

~~$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$$~~

~~$$(x+1)(x+1)(x^2+2x-2) = 0$$~~

~~$$(x+1)^2(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) = 0$$~~

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Проверим полученные значения x :

~~$$x = -1: a_3 = 0, a_5 = 1, a_9 = 3 \text{ - арифм. пр.}$$~~

~~$$x = -1 + \sqrt{3}: a_3 = 3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 12 - 6\sqrt{3} \text{ - арифм. пр.}$$~~

~~$$x = -1 - \sqrt{3}: a_3 = -3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 12 + 6\sqrt{3} \text{ - арифм. пр.}$$~~

Ответ: $x \in \{-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ 3 \geq 3y-9x \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -3 \leq 3y-9x \leq 3 \end{cases} \oplus \quad \begin{cases} -6 \leq -8x \leq 6 \\ 6 \geq 8x \geq -6 \end{cases}$$

~~получим ограничение на x~~
получим ограничение на x

$$\begin{cases} +3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \cdot (-3)$$

$$\begin{cases} 9 \geq 9y-3x \geq -9 \\ -3 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -9 \leq 9y-3x \leq 9 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \oplus \quad \begin{cases} +10 \leq 8y \leq 10 \\ -5 \leq 4y \leq 5 \end{cases}$$

~~получим ограничение на y~~
получим ограничение на y.

Нам необходимо максимизировать $4y+8x$.

$$\begin{cases} -5 \leq 4y \leq 5 \\ -6 \leq 8x \leq 6 \end{cases} \oplus \quad 4y+8x \leq \boxed{11}$$

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

1. Если $A = 13p^2$, $B = 45q^2$:

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

а) либо $m+n = 13 \cdot k$, где k - натуральное число

б) либо $m+n-9 = 13 \cdot k$, где k - натуральное число

а): $13k(13k-9) = 13p^2$

$$k(13k-9) = p^2$$

$$k=1, 13k-9=p^2 \\ 4=p^2 \\ p=2$$

$$13k-9=1, k=p^2 \\ 13k=10, k=p^2 \\ p^2 = \frac{10}{13}$$

$$k=13k-9=p \\ 9=12k \\ k = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Эти два варианта не подходят, т.к. p и q - простые.

Т.е. $m+n=13$. (в этом случае)

б): $13k(13k+9) = 13p^2$

$$k(13k+9) = p^2$$

$$k=1, 13k+9=p^2 \\ 22=p^2$$

$$13k+9=1, k=p^2 \\ 13k=-8 \\ p^2 = -\frac{8}{13}$$

$$k=13k+9=p \\ 12k=-9 \\ p = -\frac{9}{12}$$

Разобрав варианты, получим, что $m+n=13$.
Тогда:

$$m \cdot n \cdot 10 = 45q^2$$

$$m \cdot n \cdot 2 = 15q^2$$

$$m \cdot n \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2mn = 60 \Rightarrow mn = 30$$

Получим систему:

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m \cdot n=30 \end{cases}$$

Т.к. $m, n \in \mathbb{N}$, то 30 в произв. 2^x натур. дают 1 и 10, 2 и 15, 3 и 10, 5 и 6.

Заметим, что подходит только пара (3, 10) и (10, 3).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Если ~~...~~ $A = 75q^2$, $B = 13p^2$:

$$\begin{cases} m \cdot n (m+n-9) = 13p^2 \\ (m+n)(m+n+9) = 75q^2 = 5 \cdot 5 \cdot 3q^2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow (m+n)(m+n-9) : 3$$

$$\begin{aligned} \text{Если } m+n \not\div 3, \text{ то } m+n-9 \not\div 3 &\Rightarrow m+n : 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m+n)(m+n-9) : 9 &\Rightarrow q^2 : 3 \Rightarrow q = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (m+n)(m+n-9) &= 75 \cdot 9 \\ (m+n)^2 - 9(m+n) - 75 \cdot 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$(m+n) = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 75 \cdot 9}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{2481}}{2} \notin \mathbb{N}$$

\Rightarrow такой вариант невозможен.

Ответ: (3, 10) и (10, 3).



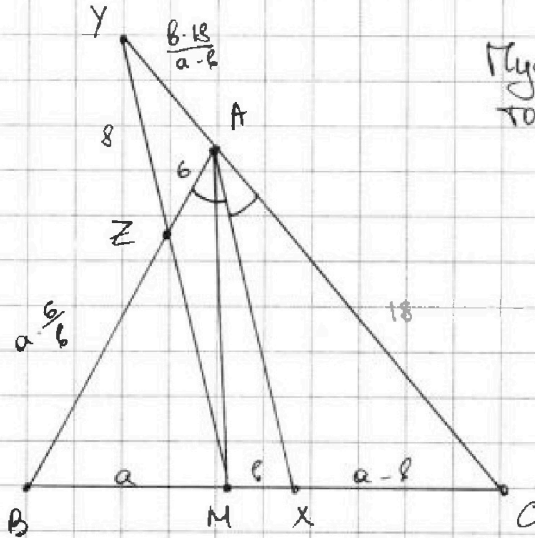
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4



Пусть $BM = a$, $MX = b$,
тогда $XC = a - b$.

$XM \parallel AX \Rightarrow$ по т. о пропорц. отрезках: $\frac{BM}{BZ} = \frac{MX}{AZ}$

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{6}$$

$$BZ = a \cdot \frac{6}{6}$$

$AX \parallel YM \Rightarrow$ по т. о пропорц. отрезках: $\frac{MX}{YA} = \frac{XC}{AC}$

$$\frac{b}{YA} = \frac{a-b}{18}$$

$$\frac{b}{YA} = \frac{a-b}{18}$$

$$AY = \frac{18b}{a-b}$$

~~по т. о пропорц. отрезках~~ т.

По Менелая:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

$$\frac{6}{a} \cdot \frac{18b}{a-b} = 1$$

$$\frac{6}{a} \cdot \frac{18a}{a-b} = 1$$

$$18b = a - b$$

$$17b = a$$

~~Сделав замену $a = 17b$ в формулу $\frac{6}{a} \cdot \frac{18b}{a-b} = 1$ получим $\frac{6}{17b} \cdot \frac{18b}{17b-b} = 1$
 $\frac{6}{17} \cdot \frac{18}{16} = 1$
 $\frac{108}{272} = 1$
 $\frac{27}{68} = 1$
 $27 = 68$
 $27(a-b) = 68(a-b)$
 $27a - 27b = 68a - 68b$
 $41b = 41a$
 $b = a$~~

~~Значит, $BM = 17MX$.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2): \quad & x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ & (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(x-y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \\ & (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \\ & (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \\ & \quad + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \\ & (\sqrt{x} - \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} & (3) \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Заметим, что $x, y \geq 0$ (т.к. стоят под корнем), то $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$, $x+y \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow (4)$ ур-е не имеет корней.

$$x = y, \quad x, y \geq 0 \text{ (запомним это!)}$$

$$\begin{aligned} (1): \quad & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \\ & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + x+1 + 6-x - 2 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \end{aligned}$$

Пусть $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{6-x}$:

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$a - b + (a-b)^2 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a - b = 1 & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \\ a - b = -2 & \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \end{cases}$$

Подставим в ур-е (1):

$$\begin{cases} \begin{cases} 6 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \\ 3 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} \\ 6-x \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} 3 = \sqrt{(6-x)(x+1)} & |^{\wedge 2} \\ 3 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} & |^{\wedge 2} \\ x \leq 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 9 = 6+5x-x^2 \\ 9 = 12+10x-2x^2 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 10x - 3 = 0 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2} \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}), (\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}), (\frac{5+\sqrt{31}}{2}, \frac{5+\sqrt{31}}{2}), (\frac{5-\sqrt{31}}{2}, \frac{5-\sqrt{31}}{2})$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Всего покрашено в чёрный цвет 81 узел. Чтобы выбрать 2 узла разных для покраски в белый цвет ~~существует~~ существует C_{81}^2 способа, при этом ~~не~~ перестановки этих 2-х узлов местами уже учтено. У квадрата ~~есть~~ 4 стороны \Rightarrow есть 4 поворота, при котором узлы этого квадрата переходят друг в друга \Rightarrow полученное число способов необходимо поделить на 4, т.к. каждую пару узлов мы считаем 4 раза:

$$\frac{C_{81}^2}{4} = \frac{81 \cdot 80}{2! \cdot 79! \cdot 4} = \frac{80 \cdot 81}{8} = 810 \text{ способов.}$$

Ответ: 810.

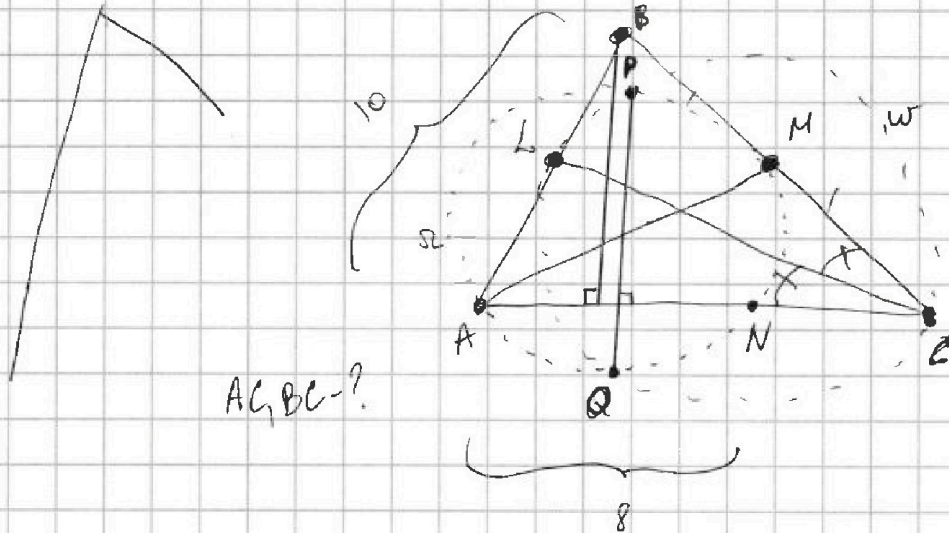


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$A = m^2 + 2mn + n^2 - g(m+n) = (m+n)(m+n-g)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

Если: $(m+n)(m+n-g) = 13p^2$

$$m+n = 13k$$

$$13k(13k-g) = 13p^2$$

$$k(13k-g) = p^2$$

либо $k=1, 13k-g=p^2$
 $4=p^2, p=2 \Rightarrow m+n=13$

либо $k=p$
 $13k-g=p \quad k=13k-g$
 $g=12k$

$$mn \cdot 10 = 15q^2$$

$$m \cdot n \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot q^2 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \Rightarrow mn = 30$$

$$q:2 \Rightarrow q=2$$

$$m+n = 13$$

$$mn = 30$$

- 1 · 30
- 2 · 15
- 3 · 10
- 5 · 6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Model by assessment~~

~~$$\frac{bx}{a} = \frac{cx}{a}$$~~

~~$$\frac{a+b}{b} = \frac{a-b}{a}$$~~

~~$$\frac{6a+c}{b} = \frac{18b+18}{a}$$~~

~~$$\frac{18b}{b} = \frac{16b}{a}$$~~

~~$$\frac{6b}{b} + 6 = \frac{18}{a} + 18$$~~

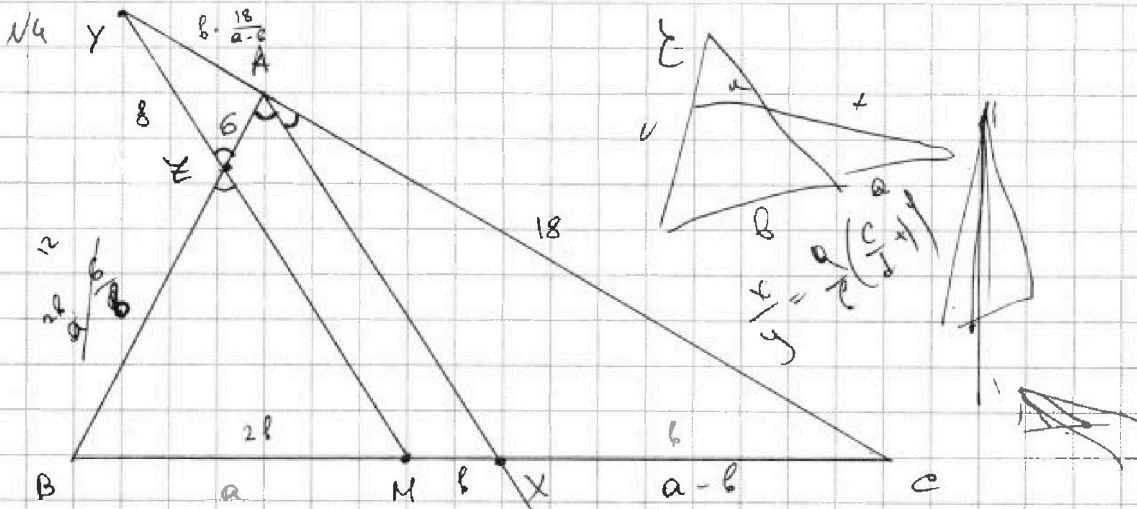


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{MZ}{8} \cdot \frac{AY}{18} \cdot \frac{2a}{a} = 1$$

$$MZ \cdot AY = 4 \cdot 18 = 40 + 32 = 72$$

$$\frac{a \cdot b}{b} = \frac{AY}{18} \left(\frac{a}{a} + 1 \right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{AY}{9}, \quad AY = \frac{9a}{b} = b \cdot \frac{18}{a-b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2b}{a-b}$$

$$2b^2 = a^2 - ab$$

$$a^2 - ab - 2b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab + ab - 2b^2 = 0$$

~~$$a^2 - ab - 2b^2 = 0$$~~

$$a(a+b) - 2b(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a-2b) = 0$$

$$a = 2b$$

Th. nap. pravilok





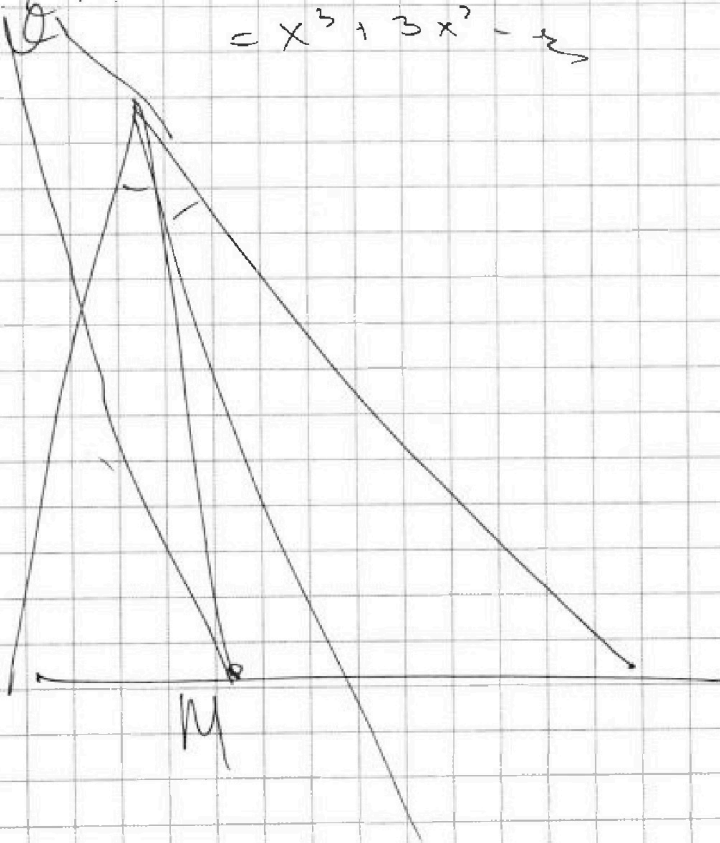
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+4) \cdot (x^2 + 2x - 2) = x^3 + 2x^2 - 2x + 4x^2 + 8x - 8 = x^3 + 6x^2 + 6x - 8$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+1)(x^2+2x-2) = x^3 + 2x^2 - 2x + x^2 + 2x - 2 =$$

$$= x^3 + 3x^2 - 2$$

~~$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$~~

~~$$x^2 + 2x - 2$$

$$\frac{(-1-\sqrt{3})^2 + 2(-1-\sqrt{3})}{2} = \frac{(1+3+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3})}{2} = \frac{2}{2} = 1$$~~

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$3(-1-\sqrt{3})^2 =$$

$$= 3(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) =$$

$$= 3 + 9 + 6\sqrt{3}$$

$$3x^2$$

$$-3 - 3\sqrt{3} + 3$$

~~1 2 3 4 5 6 7~~

$$-3 + \sqrt{3} + 3$$

$$((-1+\sqrt{3})^2 + 2(-1+\sqrt{3}))^2 =$$

$$= (1 + 3 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3})^2 = 4$$

$$3x^2 = 3(-1+\sqrt{3})^2 = 3(1 + 3 - 2\sqrt{3}) =$$

$$= 3 + 9 + 6\sqrt{3} =$$

$$= 12 - 6\sqrt{3}$$

~~1 2~~

~~12 - 6\sqrt{3} 4~~

~~8 6\sqrt{3}~~

~~4 3\sqrt{3}~~

$$16 \cup 9 \cdot 3 = 27$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_3 &= 3x+3 \\ a_5 &= (x^2+2x)^2 \\ a_9 &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 + 3 - 2 \\ \# 1 - 4 + 3 + 2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x^2+2x)^2 = 3x+3+2d \\ 3x^2 = \text{[scribble]} \cdot (x^2+2x)^2 + 4d \end{cases}$$

$$3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2d$$

$$(x^2+2x)^2 = 3x+3+3x^3 - (x^2+2x)^2 = 0$$

~~as~~ ~~a₃+d~~ ~~a₃+2d~~ ~~a₅+d~~ ~~a₅+2d~~ ~~a₇+3d~~ ~~a₅+4d~~
~~a₅~~ ~~a₆~~ ~~a₇~~ ~~a₈~~ ~~a₉~~

$$3x^2 - 2(x^2+2x)$$

$$\begin{aligned} (x+1)(x^3+3x^2-2) &= \\ = x^4+3x^3-2x+x^3+3x^2-2 &= \\ = x^4+4x^3+3x^2-2x-2 & \end{aligned}$$

$$x^4 + 3x^3 + x^3 + 3x^2 - 2(x+1) = 0$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$$

$$x^4 + 3x^3 - 2x + x^3 + 3x^2 - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

	1	3	0	-2
2	1	5	.	
-2	1	2	0	

1	3	0	-2
-1	1	-2	-2
1	1	4	-2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2 $\max(4y + 8x) - ?$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

~~$x \geq 3y$~~
 ~~$x - 3y \leq 3$~~
 ~~$x < 3y$~~
 ~~$3y - x \leq 3$~~
 ~~$3x \geq y$~~
 ~~$3x - y \leq 1$~~
 ~~$3x < y$~~
 ~~$y - 3x \leq 1$~~

~~$x \geq 3y$~~
 ~~$x \leq 3(y+1)$~~
 ~~$x < 3y$~~
 ~~$x \geq 3(y-1)$~~
 ~~$3x \geq y$~~
 ~~$3x \leq y+1$~~
 ~~$3x < y$~~
 ~~$3x \geq y-1$~~

~~$4y + 8x = 10x - x$~~

~~$x - 3y \geq 0$~~
 ~~$x - 3y \leq 3$~~
 ~~$x - 3y < 0$~~
 ~~$x - 3y \geq -3$~~

~~$3x - y \geq 0$~~
 ~~$3x - y \leq 1$~~
 ~~$3x - y < 0$~~
 ~~$3x - y \geq -1$~~

~~$a \geq 0$~~
 ~~$a \leq 3$~~
 ~~$a < 0$~~
 ~~$a \geq -3$~~

~~$b \geq 0$~~
 ~~$b \leq 1$~~
 ~~$b < 0$~~
 ~~$b \geq -1$~~

~~$-3 \leq x - 3y \leq 3$~~
 ~~$-1 \leq 3x - y \leq 1$~~

~~$3 \geq 3y - x \geq -3$~~
 ~~$-1 \leq 3x - y \leq 1$~~

~~$-3 \leq 4x - 4y \leq 3$~~
 ~~$-3 \leq 3x - y \leq 3$~~
 ~~$-1 \leq 3x - y \leq 1$~~
 ~~$-2 \leq -8y \leq 2$~~
 ~~$-\frac{1}{4} \leq -y \leq \frac{1}{4}$~~
 ~~$\frac{1}{4} \geq y \geq -\frac{1}{4}$~~

$\max 4(y + 2x)$
 $\max(y + 2x)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{1} a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_5 = a_3 + 2d$$

$$a_9 = a_5 + 4d$$

$$a_9 - a_5 = 2(a_5 - a_3)$$

$$a_9 - a_5 = 2a_5 - 2a_3$$

$$a_9 - 3a_5 + 2a_3 = 0$$

~~$$3x^2 - 3(x^2 + 2x)^2 + 3x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 3(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 1) + 3x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 3x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 6x - 3 + 3x + 3 = 0$$

$$-3x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 3x = 0$$

$$-3x(x^3 + 4x^2 + 4x + 1) = 0$$~~

$$3x^2 - 3(x^2 + 2x)^2 + 3x + 3 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - (x^2 + 2x)^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - x - 1 = 0$$

$$4x^2(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = 0$$

$$(x^2 + x + 1)(4x^2 - 1) = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$$

$$(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} = 4,5 = \frac{9}{2}$$

$$a_5 = (\frac{1}{4} + 1)^2 = \frac{25}{16}$$

$$a_9 = 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$a_3 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{40}{16}$$

$$a_5 = (\frac{1}{4} - 1)^2 = \frac{9}{16}$$

$$a_9 = 3 \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$$

~~$$\frac{40}{16} - \frac{25}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{15}{16} - \frac{12}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$~~

$$x^3 + 3x^2 - 1$$

$$\frac{25 - 12 - 9}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_9 = 3$$

1	3	0	-1
2	1	0	-1

$$4x^2 - 1$$

$$1 \quad 4 \quad 3 \quad -1 \quad -1$$

$$x = -1$$

$$1 - 4 + 3 + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 + 5x = 1$$

$$x^2(x+5) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

1	4	3	-1	-1
-1	1	3	0	0

1	3	0	-1
-1	1	2	1

[Handwritten signature]

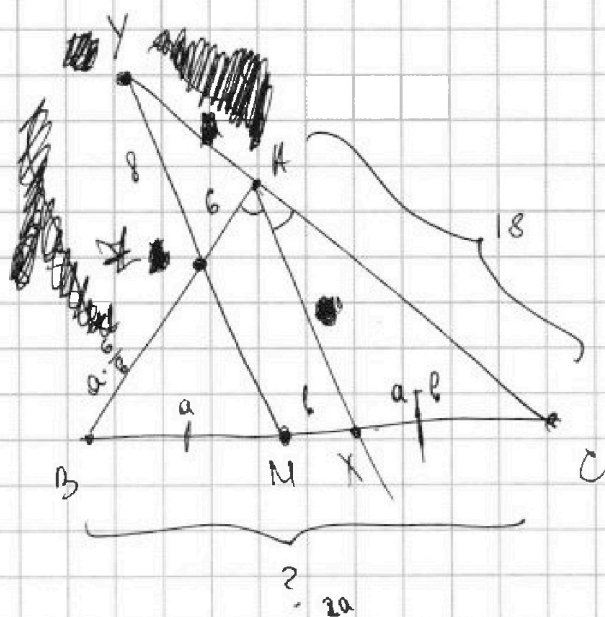


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

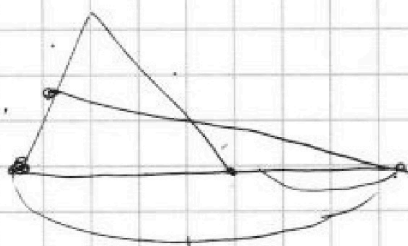
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b}$$

$$\frac{b}{6} = \frac{(a+b)b}{6a+6b}$$

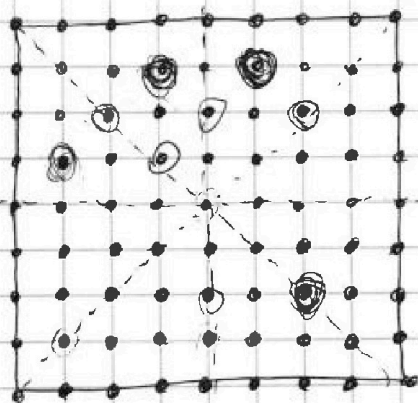
$$\frac{b}{6} = \frac{b}{6}$$



$$\frac{36a}{6} \cdot \frac{18+AY}{AY} = 1$$

$$\frac{8}{7M} = \frac{AY}{18g} \cdot 2$$

$$\frac{8}{7M} = \frac{AY}{9}$$



Количество способов покрасить 2 узла в белый цвет

81 узел

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{C_{81}^2}{4} = \frac{81!}{2 \cdot 4 \cdot 79!} = 1810$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= 0 \\ (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 0 \\ \sqrt{x} &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

$$x = y \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2 + 5x + 6}$$

$$-x^2 + 5x + 6$$

$$a \cdot b = -6 = 6 \cdot (-1)$$

$$a + b = 5$$

$$-(x^2 - 5x - 6) =$$

$$-(x-6)(x+1) =$$

$$= (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$~~

~~Handwritten scribbles and crossed-out work.~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} - 2 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$a - b + (a - b)^2 - 2 = 0$$

~~$$t^2 + t - 2 = 0$$~~

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t = -2$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a - b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 10x - 3 = 0$$

пр 6
сумма 10

$$10 \pm \sqrt{100 + 24}$$

$$\frac{10 \pm \sqrt{124}}{4}$$

$$x^2 - 5x - 6 = \frac{10 \pm \sqrt{124}}{4}$$

$$6 \text{ и } 1 = \frac{10 \pm 2\sqrt{31}}{4}$$

$$(x-6)(x+1) = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2}$$

$$(6-x)(x+1)$$

$$x^2 - 5x + 3$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$a = 3,5$
 $b = 1,5$

$$\sqrt{124} = 4\sqrt{31} = 4 \cdot 31$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N3 \quad A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

$13p^2$
 $45q^2$ $p = q$ произвольное

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$A = t(t-9)$$

$$B = k(t-3)$$

$$m+n = 13$$

$$mn = 10 = \frac{75q^2}{2}$$

$$m \cdot n \cdot x = 15 \cdot \frac{q^2}{x^2}$$

$$mn = 30$$

$$t(t-9) = 75q^2$$

$$k(t-3) = 13p^2$$

$$t:3 \rightarrow t-9:3$$

$$:9$$

$$q=3$$

$$75 \cdot 9$$

$$t(t-9) = 75 \cdot 9$$

$$t^2 - 9t + 75 \cdot 9 = 0$$

$$t = 9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 75 \cdot 9} < 0$$

$$t \neq 0$$

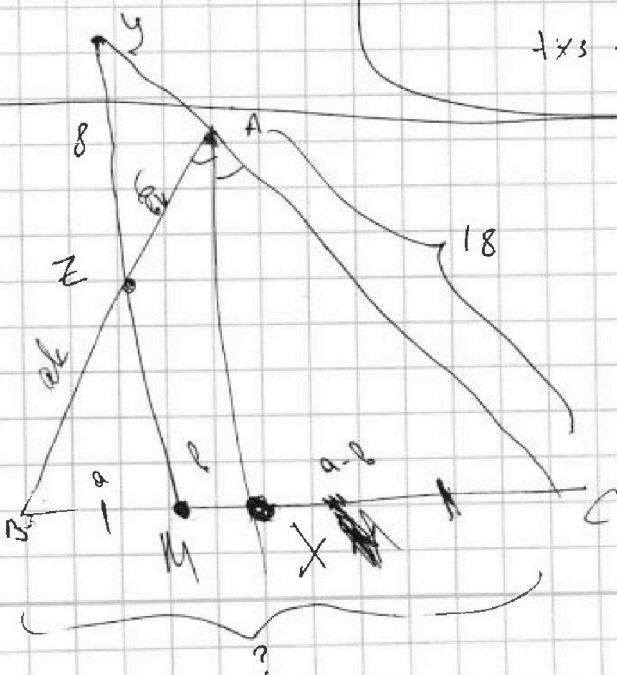
$$t \cdot 3 \rightarrow t-9 : 3 \Rightarrow t(t-9) \cdot 3 = 75 \cdot 9$$

$$\begin{aligned} \sum 9 &= 3 \cdot 5 \cdot 9 \\ n &= 5 \cdot 9 \\ &= 25 \cdot 24 \\ &= 15 \cdot 45 \end{aligned}$$

$$m+n = 13$$

$$mn = 30$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 15 \\ &= 6 \cdot 5 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 36 \\ \hline 450 \\ + 2250 \\ \hline 2700 \\ + 2700 \\ \hline 5400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline 51 \\ + 2601 \\ \hline 2601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 52 \\ \hline 104 \\ + 2601 \\ \hline 2704 \end{array}$$