



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a < b$ ,
  - число  $b - a$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1.

$b$  - первый член,  $q$  - знаменатель прогрессии

$$b_1 q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad (1)$$

$$b_1 q^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \quad (2)$$

Перемножим (1) и (2):

$$b_1^2 q^{26} = \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}}$$

$$b_1^2 q^{13}$$

$$= 2-x \quad (3)$$

Перемножим (1) и (2):

$$b_1^2 q^{26} = \sqrt{\frac{(25x+34)^3}{(3x+2)^2}} \Rightarrow b_1 q^{13} = \pm \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}} \quad (4)$$

но подходит

только со знаком "+", т.к.  $b_1 q^{13}$  существует  $\Rightarrow$  его подкоренное выражение имеет знак "+", а его знак такой же, как и у  $b_1 q^{13}$ .

$$\text{Тогда } q^2 = \frac{25x+34}{(3x+2)(2-x)}$$

$$\text{Также } q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\frac{25x+34}{(3x+2)(2-x)} = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

Подставим (2) на (4), получим, что  $q^4 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^2}} = \frac{1}{|3x+2|} \Rightarrow$

$$q^2 = \sqrt{\frac{1}{|3x+2|}}$$

Подставим (3) на (4), получим  $q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$

$$\text{Тогда: } 2-x = \sqrt{|25x+34|} \quad | \uparrow^2$$

$$x^2 + 4 - 4x - 25x - 34 = 0$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$x_1 = 30$$

$$x_2 = -1$$

Заметим, что  $x_2 = -1$  не подходит, т.к.  $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$  не определен, потому что подкоренное выражение меньше, чем 0. Тогда остается  $x = 30$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при  $x=30$   $b_1 < 0$ , но при этом  $b_{10} > 0$ , а такое быть не может, т.к. ~~во всех~~ темы, номер которых однозначной неизвестен, должны иметь однозначный знак  
Ответ: ни при каких









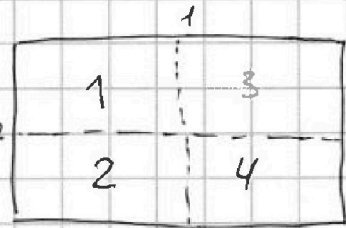
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 5.

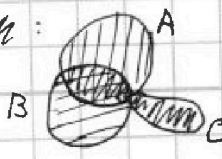
Разделим прямоугольник на 4 меньшие <sup>2</sup> размером  $250 \times 60$  как показано на картинке. Пунктирные линии разделяют стороны  $250$  и  $251$  и строки  $60$  и  $61$ . Тогда, если выбрать какую-то клетку



одного из прямоугольников то при центральной симметрии еще 8 клеток закрашивается одновременно. Тогда в каждой прямоугольнике должно быть закрашено ровно 2 клетки для центральной симметрии (если более двух то закрашено хотя бы  $3 \cdot 4 = 12$  клеток, если меньше двух, то закрашено не более чем  $4 \cdot 1 = 4$  клеток). Тогда кол-во клеток, закрашенных относительно горизонтальной средней линии равно количеству способов выбрать 2 клетки в одной из прямоугольников, т.е.  $C_2^{250 \cdot 60} = C_2^{15000}$

Чтобы закрасить 8 клеток симметрично средней линии 1, надо выбрать 4 квадратика в клетках прямоугольников 1 и 2, тогда еще тогда остальные 4 однозначно определяются в клетках 3 и 4. Тогда закрасить 8 клеток симметрично средней линии 2, надо выбрать 4 квадратика в клетках прямоугольников 1 и 3, тогда остальные 4 однозначно определяются в клетках 2 и 4. Тогда раскраска симметрично относительно средней линии  $2 \cdot C_4^{250 \cdot 60 \cdot 2} = 2 \cdot C_4^{30000}$

Заметим теперь, что если раскраска симметрична относительно обеих средних линий, то она симметрична и относительно центра квадрата, т.е. пусть, ИО, есть какой-то квадратик в прямоугольнике 1, тогда есть симметричный ему отн. прямой 2 квадратик в прямоугольнике 2, а также симметричный ему отн. прямой 1 квадратик в пр-ке 4 относительно прямой 1. Он центрально-симметричен исходному квадратнику. Тогда если А - м-во центрально-симметричных раскрасок, В - м-во раскрасок симметричных относительно прямой 1 и С - м-во относительно 2, то они пересекаются следующим образом:



В задаче нужно найти  $A \cup B \cup C$ . Для этого мож заметить мощность найдем





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

множества A, B, C ~~оставлены~~ ~~оставлены~~ ~~оставлены~~ на удвоенное пересечение ~~потом вытнем.~~

Найдем мощность множества A. В первом квадрате может быть 0, 1, 2, 3 или 4 клетки. Если там 0 клеток, то во втором и в первом квадрате 4 или 0  $\Rightarrow$  в квадратах 2 и 3 по 4 клетки. Мы можем выбрать (выбрали в 2, они симметрично перенесутся в 3). Есть  $C_{250 \cdot 60}^4 = C_{15000}^4$  способов.

Если выберем одну клетку  $C_{250 \cdot 60}^1 = C_{15000}^1$  способами, то надо еще выбрать 3 в квадрате 2  $C_{15000}^3$  способами, итого  $C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3$  способами. Аналогично если в первом

выбрали 3 и во втором 1  $C_{15000}^3 \cdot C_{15000}^1$ . Если в первом в 2 и во втором 2, то  $C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2$ . Если в первом 4 и во втором 0, то  $C_{15000}^4 \cdot C_{15000}^0$ . Получили, что мощность A в точности  $2 \cdot C_{15000}^4 + 2 \cdot C_{15000}^3 + C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2$ .

Теперь найдем мощность пересечения множеств. Из рассуждений (\*) мы можем выбрать в первом квадрате 2 клетки, а во всех остальных раскешенные клетки восстановятся однозначно. Тогда ответ будет  $2 \cdot C_{30000}^2 + 2 \cdot C_{15000}^2 + 2 \cdot C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

Ответ:  $2 \cdot C_{30000}^2 + 2 \cdot C_{15000}^2 + 2 \cdot C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a < b \Rightarrow a-c < b-c$$

Если два множителя в произведении дают квадрат простого числа, причем один из них строго меньше второго, то меньший равен 1, а больший  $p^2$  или же меньший  $-p^2$ , больший  $-1$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$$

$$\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$$

Заметим, что если  $p \neq 2$   $p \equiv 0$ , то  $p^2 - 1 \equiv 2$ ; если  $p \equiv 2$  и  $p \equiv 1$ , то  $p^2 - 1 \equiv 0^3$ . Но по условию  $b-a$  не кратно 3, поэтому  $p \equiv 3 \Rightarrow p=3$

$$\begin{cases} b-a=8 & (1) \\ a^2+b=1000 & (2) \end{cases}$$

Вычтем из (1) из уравн (2)

$$a^2+a=992$$

$$a^2+a-992=0$$

По т. Виета находим  $a_1 = -32$ ,  $a_2 = 31$

Найдем соответствующие этим значениям  $a$  тройки

$$1) a_1 = -32 \Rightarrow b = 24, c = -23 \text{ или } c = -33$$

$$2) a_2 = 31 \Rightarrow b = 39, c = 30 \text{ или } c = 40$$

Ответ:  $(-32; -24; -23)$ ;  $(-32; -24; -33)$ ;  $(31; 39; 30)$ ;

$(31; 39; 40)$



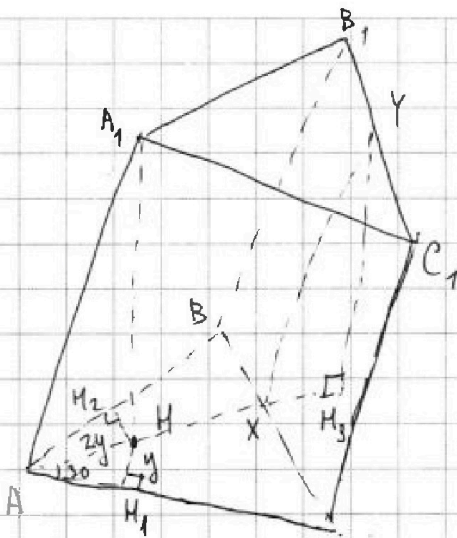
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7

$$S_{AA_1B_1B} = 6, S_{AA_1C_1C} = 6, S_{BB_1C_1C} = 5$$

$A_1M$  - высота из  $A_1$  на пл.  $ABC$ .

$H_1, H_2$  - высота из  $H$  на  $AC$  и  $AB$  соответств.

По ПТЖТ  $A_1H_2 \perp AB, A_1H_1 \perp AC$ .

$$S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 4 \Rightarrow AB^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$6 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot A_1H_1 \Rightarrow A_1H_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = A_1H_2$$

Пусть  $A_1H = x, MH_1 = y$ .

$$\text{Тогда по т. Пифагора } x^2 + y^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

П.к.  $MH_2 = H_1H_2$  ввиду симметрии, то  $H$  лежит на биссектрисе  $\angle A \Rightarrow$  еще на медиане и высоте. Пусть  $AM \cap BC = X$

Отметим  $Y$  - середину  $B_1C_1$ . Опустим из  $Y$  высоту  $YH_3$  на  $AX$ .

По ПТЖТ  $YH_3 \perp$  пл.  $ABC, YH_3 = A_1M = x$

$$y \cdot BC = 5 = y \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

П.к.  $MH_1 = y$  и  $H$  лежит на биссектрисе  $\angle A$ , при этом  $\triangle ABC$  - равносторонний, то  $\angle HAM_1 = 30^\circ$  и  $AM = 2y$  (из прямоугольного  $\triangle AMH_1$ )

Заметим также, что  $A_1MH_3Y$  - прямоугольник, поэтому  $A_1Y = MH_3$ . Также  $A_1Y = AX$ , т.к.  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  и  $X, Y$  - середины  $BC$  и  $B_1C_1$ . Отсюда  $XH_3 = AM = 2y$

$$\text{По т. Пифагора для } \triangle YH_3X: 4y^2 + x^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16}$$

Решим систему, чтобы найти  $x$ :

$$\begin{cases} 4y^2 + x^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} \\ x^2 + y^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{cases} \cdot 4$$

$$4x^2 + 4y^2 = 9\sqrt{3}$$

возьмем первое уравнение системы из второго:

$$3x^2 = 9\sqrt{3} - \frac{25\sqrt{3}}{16} = \frac{119\sqrt{3}}{16} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{48}}$$

$$\text{Тогда } V_{ABCA_1B_1C_1} = 4 \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{48}}$$

Ответ:  $4 \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{48}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

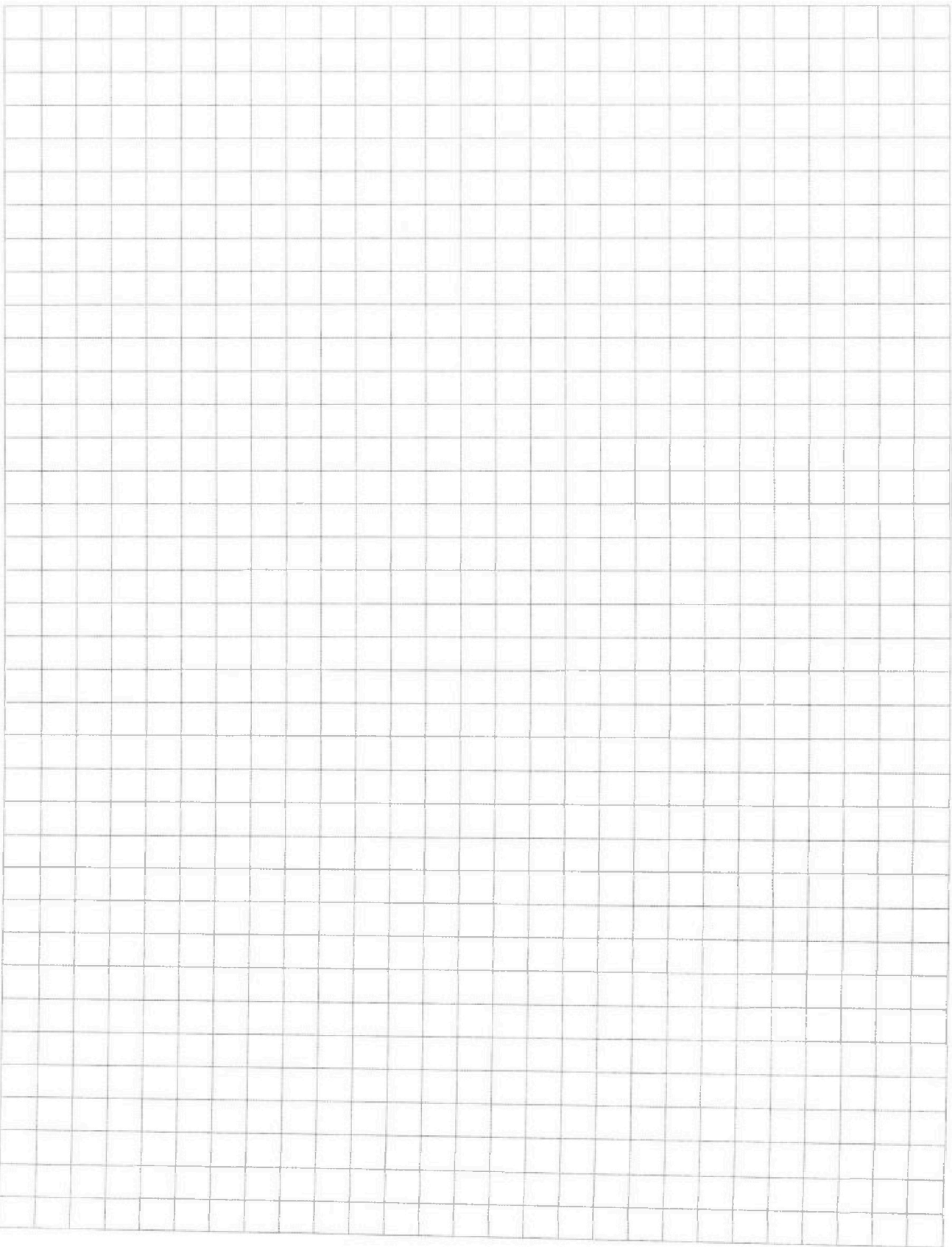
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





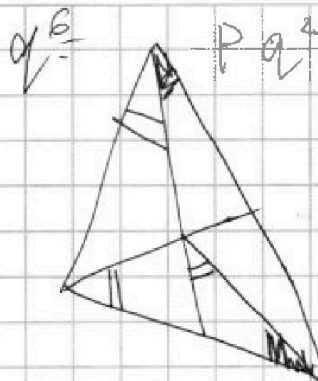
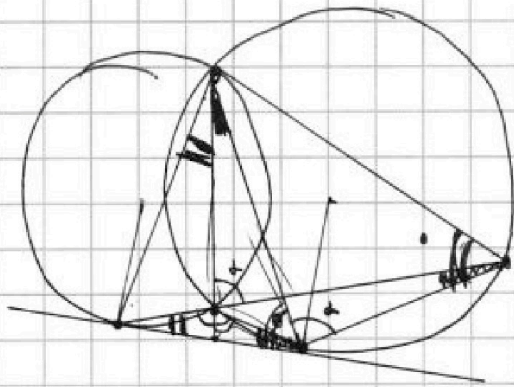


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

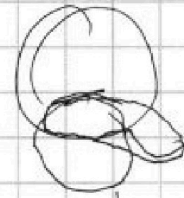
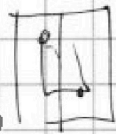
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 3 \\ 250 \\ 60 \\ \hline 15000 \end{array}$$

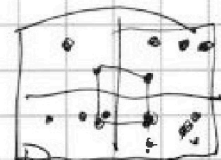


$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2$$

$$(a-c)(b-c)$$

$$a-b = p$$



$$a-c = 1$$

$$a-b =$$

$$-c = p^2$$

$$1 - p^2$$

$$-c = -1$$

$$a-b =$$

$$-c = -p$$

$$-1 + p^2$$

$$1 - p = 1 + p^2$$

31-

40

g

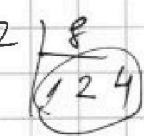
g g 2

8

19

-16

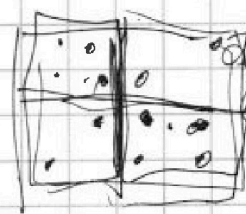
32



124 · 8

62 · 16

31 · 32



-40 +

$$-24 + 32 = 8$$

$$-32 - c = -9$$

$$-c = -9 + 32$$

$$-c = 23$$

$$c = -23$$

$$b - a = 8$$

$$+32 + 23 = +9$$

$$-24 +$$

$$24 + 32 = 56 / :$$

$$-32 - c = 1$$

$$-32 + c \quad 32 + c = -1$$

$$c = -33$$

$$a \quad 32 + c = 9$$

$$c = -23$$

$$24 + 23 \quad -24 +$$

$$b + 32 = 8$$

$$b = -46 - 24$$

$$32 - c = 1$$

$$c = -33$$

$$-32 + 33$$

$$-24 + 33$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4$$

$$a^2\sqrt{3} = 16$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2} + 21$$

$$|y+21 + 2|y-18| = \sqrt{400-z}$$

10 100

$$z \in (-20; +20)$$

$$a \leq 100$$

$$6+x \geq 0$$

$$9-2z \geq 0 \Rightarrow z \leq 4,5$$

$$-z \geq -4,5$$

$$3-x-2z \geq 0$$

$$x \geq -6$$

$$x-3 \geq -9$$

$$a^2+b-b+a = a^2+a =$$

$$y-3x-x^2 \geq 0$$

$$18+x+3x \geq 0$$

$$x(x-3)$$

$$100a = p$$

$$18+y-x^2 \geq 0$$

$$3-x-2z \geq 3-x-9 = -6-x \quad a(a+1) \equiv 1001-p$$

$$9-3x-6z \geq 0$$

$$-(x+1)^2 - x + 1 + 2 - u$$

$$-x^2 - 2x - 1 - x + 1$$

$$\equiv 1$$

y

$$y-3x-x^2 \geq 0$$

$$x+6 \geq 0$$

$$x+6 \geq 0$$

$$a^2+b = 1000$$

$$y-2x-x^2+6 \geq 0$$

$$6-2x-2z \geq 0$$

$$0 \quad 1$$

$$-(x+1)^2 + 7 + 2 + y \geq 0$$

$$12-x-2z \geq 0$$

$$3x-2z \geq 6$$

$$b, a = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a, a^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$b, a^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^4}} = \frac{\sqrt{25x+34}}{3x+2} = 2-x$$

$$\sqrt{25x+34} = (2-x)^2(3x+2)^2$$

$$\begin{cases} a-e=1 \\ e-b=-p \end{cases} \quad a-b=1-p$$

$$\begin{cases} b-e=1 \\ e-a=-p \end{cases} \quad b-a=1+p$$



$$a < b$$

$$a \neq b$$

3

$$(a-e)(b-e) = p^2$$

$$\begin{cases} a-e=1 \\ b-e=p \end{cases}$$

