



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый член ^{н.ч.} прогрессии - b_1 , а знаменатель - q , тогда

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b_1 \cdot q^{12} = 5-x \\ b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \end{cases}$$

$$b_1 \cdot q^6 > 0 \Rightarrow b_1 \cdot q^{12} > 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ 5-x > 0 \\ x < 5 \end{matrix}$$

$$\frac{b_1 \cdot q^{14}}{b_1 \cdot q^6} = q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$$

$$q^6 = (q^8)^{\frac{3}{4}} = ((x+1)^2)^{\frac{3}{4}} = (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Подставим } 5-x = b_1 \cdot q^{12} &= b_1 \cdot q^6 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = \\ &= \sqrt{(13x-35) \cdot \left(\frac{x+1}{x+1}\right)^3} \end{aligned}$$

1. Если $x \geq -1$, то $13x-35 \geq 0$ и

$$5-x = \sqrt{13x-35}$$

$$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$$

$$x^2 - 26x + 60 = 0$$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 60 \cdot 4}}{2} = \frac{26 \pm 2\sqrt{13^2 - 60}}{2} = 13 \pm \sqrt{169 - 60} = 13 \pm \sqrt{109}$$

$$x \neq 13 + \sqrt{109}, \text{ т.к. } x < 5.$$

$$x = 13 - \sqrt{109} \text{ не подходит, т.к. } 13 - \sqrt{109} < -1, \text{ но } 13(13 - \sqrt{109}) - 35 < 0,$$

тогда ~~решения~~ и не существует

$$\begin{aligned} &169 - 15\sqrt{109} - 35 < 0 \\ &134 \sqrt{13\sqrt{109}} < 1^2 \\ &(134)^2 < 169 \cdot 109 \\ &17956 < 18421 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Если $x < -1$, то $13x - 35 < 0$, и

$$5 - x = \sqrt{35 - 13x}$$

$$25 - 10x + x^2 = 35 - 13x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 & \text{не подходит, так как } x < -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

3. $x \neq -1$, т.е. $x+1$ слагаемое в знаменателе, а значит

$$x - 1 = 0$$

Рассмотрим $x = -5$:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{100}{(x+1)^2}} = \frac{5}{4} \\ b_1 \cdot q^{12} = 10 \\ b_1 \cdot q^{18} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{5}{32} \\ q = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: -5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x-x^2+12} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$\sqrt{169-z^2} \leq 13, \text{ т.к. } 169 - z^2 \leq 169$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \begin{cases} -4y + 35, & y < -1 \\ -2y + 37, & -1 \leq y < 12 \\ 4y - 55, & y \geq 12 \end{cases}$$

$$\text{До } y=12 \quad |y+1| + 3|y-12| \downarrow$$

$$\text{После } y=12 \quad |y+1| + 3|y-12| \uparrow, \text{ 3 этапа}$$

$$\min(|y+1| + 3|y-12|) = \min(|12+1| + 3|12-12|) = 13$$

Получается, что

$$|y+1| + 3|y-12| \geq 13 \geq \sqrt{169-z^2}$$

$$\begin{cases} |y+1| + 3|y-12| = 13 \\ \sqrt{169-z^2} = 13 \end{cases} \begin{cases} y=12 \\ z=0 \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x-x^2+12}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{x-x^2+12} - 5 \quad |^2$$

$$\begin{cases} 7 - 2\sqrt{(x+3)\sqrt{4-x}} = 24 \cdot (x+3)/(4-x) - 20\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} + 25 \\ 8\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+3)\sqrt{4-x}}(2\sqrt{x-x^2+12}-5) \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = a$

$$\begin{cases} 7 - 2a = 4a^2 - 20a + 25 \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})(7\sqrt{x-x^2+12} - 5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - 18a + 18 = 0 \\ (\sqrt{x+3}\sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12}-5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - 18a + 18 = 0 \\ (\sqrt{x+3}\sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12}-5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(a-3)(a-\frac{3}{2}) = 0 \\ (\sqrt{x+3}\sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12}-5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(a-3)(a-\frac{3}{2}) = 0 \\ (\sqrt{x+3}\sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12}-5) \geq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a=3 \\ a=\frac{3}{2} \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{4-a})(2\sqrt{x-x^2+12} - 5) \geq 0 \\ \sqrt{x+3} \sqrt{\frac{4-a}{4-x}} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} \sqrt{\frac{4-a}{4-x}} = 3 \\ \sqrt{x+3} \sqrt{\frac{4-a}{4-x}} = 1.5 \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{4-a})(2\sqrt{x-x^2+12} - 5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x^2 + 12 = 9 \\ x - x^2 + 12 = 2.25 \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12} - 5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 - x - 9.75 = 0 \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12} - 5) \geq 0 \end{cases}$$

~~$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ не подходит, т.к. $\frac{1+\sqrt{13}}{2} < 3$~~
 ~~$x = \frac{1+\sqrt{50}}{2}$ не подходит, т.к. $\frac{1+\sqrt{50}}{2} < 3$~~
 ~~$x = \frac{1+\sqrt{50}}{2}$ подходит, т.к. $3 < \frac{1+\sqrt{50}}{2} < 4$~~
 ~~$x = \frac{1+\sqrt{50}}{2}$ не подходит, т.к. $\frac{1+\sqrt{50}}{2} < 3$~~

$$(\sqrt{x-3} - \sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12} - 5) \geq 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{40}}{2}$$

$$(\sqrt{\frac{1+\sqrt{40}}{2}-3} - \sqrt{4-\frac{1+\sqrt{40}}{2}})(2\sqrt{\frac{1+\sqrt{40}}{2}-\frac{1+\sqrt{40}}{2}+12} - 5) \geq 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{40}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{40}}{2}-3} \leq \sqrt{4-\frac{1+\sqrt{40}}{2}}$$

$$\frac{1+\sqrt{40}}{2} - 3 \leq 4 - \frac{1+\sqrt{40}}{2} \quad x = \frac{1+\sqrt{40}}{2}$$

Продолжить см. дальше



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{49}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{49}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{40}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{40}}{2} \end{cases}$$

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})(2\sqrt{x-x^2+12} + 5) \geq 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} \geq 0 \\ x = \frac{1 + \sqrt{40}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{40}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} \leq 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ \sqrt{\frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 3} - \sqrt{4 - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}} \geq 0 \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ \sqrt{\frac{1 - \sqrt{13}}{2} + 3} - \sqrt{4 - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}} \geq 0 \\ x = \frac{1 + \sqrt{40}}{2} \\ \sqrt{\frac{1 + \sqrt{40}}{2} + 3} - \sqrt{4 - \frac{1 + \sqrt{40}}{2}} \leq 0 \\ x = \frac{1 - \sqrt{40}}{2} \\ \sqrt{\frac{1 - \sqrt{40}}{2} + 3} - \sqrt{4 - \frac{1 - \sqrt{40}}{2}} \leq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$7 + \sqrt{13} \geq 4 - \sqrt{13}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$7 - \sqrt{13} \geq 7 + \sqrt{13}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{40}}{2}$$

$$7 + \sqrt{40} \leq 7 - \sqrt{40}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{40}}{2}$$

$$7 - \sqrt{40} \leq 7 + \sqrt{40}$$

нет реш.

нет реш.

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{40}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0 \right)$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{40}}{2}; 12; 0 \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Для того, чтобы раскрасить клетки симм. относ. одной из средних линий нужно выбрать ~~4~~ ⁴ клетки из одной из половин прямоугольника - остальные 4 или заданы. Значит комбинаций симм. относ. ср. линии:

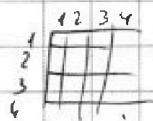
$C_{25000}^4 = C_{25000}^4$, эта формула работает на обе линии.

Чтобы получить пол-во комбинаций симм. относ. центра, надо тоже выбрать 4 клетки из одной из половин. Остальные клетки заданы из симметрии. Формула получится:

$$C_{25000}^4$$

Заметим, что если симм. относ. центр. относ. обит

ср. линии, то она симм. относ. центра:



- введем симм. координат по клеткам. Если у клетки были коор. $(x; y)$, то

у симм. относ. центра будет $(2501-x; 201-y)$, а у нее, то

симм. относ. центра: $(251-x; y)$ и $(2501-x; 201-y)$ соответственно.

Если была ал. $(a; b)$ и она симм. относ. обеих линий, то $(a; b)$ задаёт $(251-a; b)$ и $(a; 201-b)$, применит к ним симметрично ещё раз:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

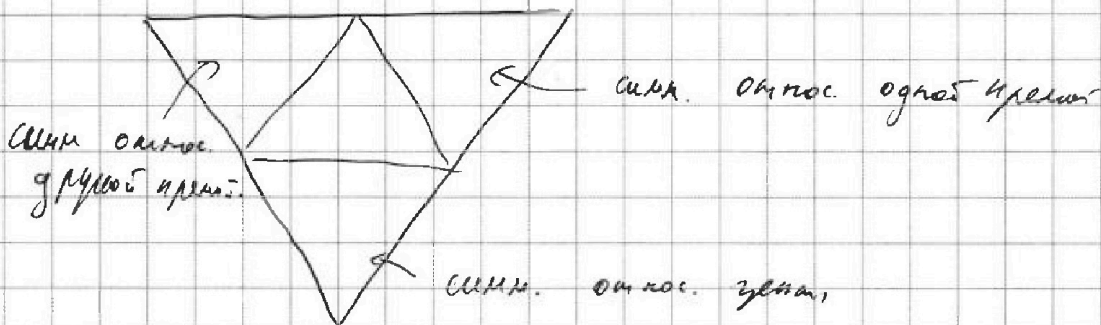
Они в свою очередь задают $(250^1 - a, 200^1 - b)$, при этом сами $(250^1 - a, b)$ и $(a, 200^1 - b)$ симм. относ. угла α .

Наше замечание, что если симм. симм. относ.

угла и α — то α — то она симм. и

двух прямых. (a, b) задаёт $(250^1 - a, b)$ и $(250^1 - a, 200^1 - b)$ задаёт $(a, 200^1 - b)$.

Одним получили 4 точки, симм. всем, значения:



Или пересечение задаётся 2-мя точками из 4-х вершин

плоскости $\square ABCD$, т.е. каждая точка задаёт 3 других из других вершин. И на всего $C_{25000}^2 = C_{6250}^2$.

$$\text{Всего комбинация: } C_{25000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - 2C_{6250}^2 =$$

$$- 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{6250}^2$$

$$\text{Ответ: } 3C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{6250}^2$$

пересечения посчитано 3 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- $\sqrt{6}$
- $a > b$
 - $a - b \neq 3$
 - $(a - c)(b - c) = p^2$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 - $a + b^2 = 560$

Если $a > b$, то $a - c > b - c \Rightarrow \begin{cases} a - c = p \\ b - c = -1 \end{cases} \text{ ①}$

①: $a - b = p^2 - 1$
 $p^2 \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } p = 3 \\ 1, & \text{если } p \in \mathbb{N} \setminus \{3\} \end{cases}$

$p^2 \equiv 1$ - невозможно, т.к. $a - b \neq 3$, а значит

$p = 3$
 $\begin{cases} a - c = 9 \\ b - c = 1 \end{cases}$

$$a + b^2 = c + 9 + (1 + c)^2 = 560$$

$$c^2 + 3c + 10 = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

$$(c + 25)(c - 22) = 0$$

$$\begin{cases} c = -25 \\ c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \\ a = -16 \\ b = -26 \\ c = -25 \end{cases}$$

②: $a - b = p^2 - 1$, аналогично с п. 1 $p = 3$
 $\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -9 \end{cases}$

$$a + b^2 = c - 1 + (c - 9)^2 = 560$$

$$c^2 - 17c + 80 = 560$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

$$(c - 32)(c + 15) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} C=32 \\ C=-15 \end{cases} \begin{cases} a=31 \\ b=23 \\ c=32 \\ a=-16 \\ b=-24 \\ c=-15 \end{cases}$$

Ответ: $(31; 23; 22); (-16; -24; -15); (31; 23; 22); (-16; -24; -15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Для того, чтобы раскрасить клетки сим. одной из средних линий нужно лишь выбрать 4 клетки из одной половины - остальные 4 заданы или не.

Значит комбинаций сим. относ. ср. линии:

$$C_{250-200}^4 = C_{25000}^4, \text{ при этом формула не зависит}$$

от выбранной нами линии.

Чтобы найти количество комбинаций сим. относ. центра надо лишь выбрать 4 клетки только из одной половины. Остальные клетки или заданы, формула аналогична: C_{25000}^4

Заметим, что если комб. сим. относительно обеих средних линий, то она сим. относ. центра.



- введем сист. коорд. на прямоугольнике. Если у г. были коорд. (x, y) , то сим.

относ. центра: $(250-x; 200-y)$, при этом

сим. относ. одной линии: либо $(250-x; y)$, либо $(x; 200-y)$.

Если была т. (a, b) и она сим. обеим линиям, то (a, b) задает $(250-a; b); (a; 200-b)$, и

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Умно все комбинации:

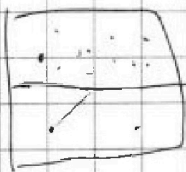
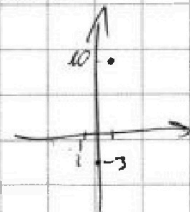
$$\frac{(250 \cdot 100)!}{(250 \cdot 100 - 4)! \cdot 4!} + \frac{(725 \cdot 200)!}{(725 \cdot 200 - 4)! \cdot 4!} - \frac{(125 \cdot 100)!}{(125 \cdot 100 - 2)! \cdot 2!}$$

$$= \frac{25000!}{24996! \cdot 4!} - 2 - \frac{12500!}{12498! \cdot 2}$$

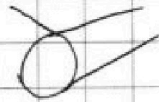
Ана
 $12 \cos^2 x - 12 \cos x \sin x + 3 \sin^2 x =$
 $3 \cos x \sin x (2 \cos^2 x - 1)^2$

Мы считаем кол-во комбинаций $\frac{250 \cdot 100!}{(250 \cdot 100 - 4)!}$, т.к. нам достаточно вставить 4 алмазы в одной из половинок - 4 варианта они задаются сами, а ана считаем с шмш. относ. к диаметру - него

1. шмш. относ. и центров и сторон
2. шмш. относ. одного края
3. шмш. относ. всего центра.

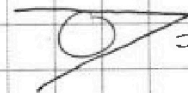


$$\frac{(250 \cdot 100)!}{(750 \cdot 100 - 4)! \cdot 4!}$$



$$\cos 3x = (\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) =$$

$$= (2 \cos^2 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \sin x) =$$



$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$+ 6 \cos^2 x - 3$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p \quad p = 12 \cos^3 x + 12 \cos x + 3 =$$

$$= 3(4 \cos^3 x + 4 \cos x + 1)$$

$$\cos 3x = (\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) =$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x +$$

$$+ 2 \cos^3 x =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

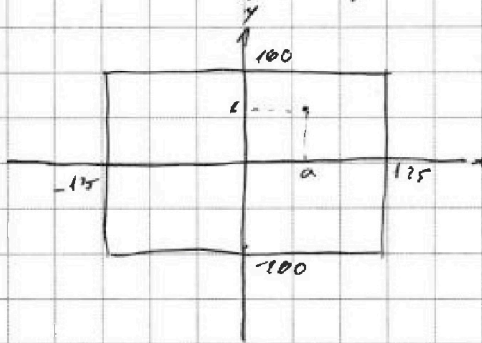
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Заметим, что если заданное множество симм. относ. центра обеих ср. линий, то оно симм. относ. центра.

Расположим прямоугольник на сист. коорд.



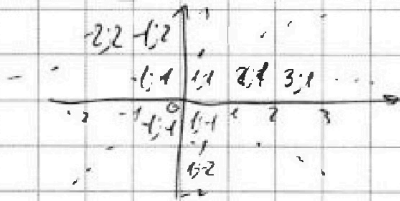
или у Т. коорд.

(a, b) , то

симм. относ. центра
двух четвертей
 $(a, b); (-a, b); (-a, -b); (a, -b)$

Первая симм. по ср. линии дает из $(a, b) \rightarrow (a, b), (a, -b)$ если симм. относ. к а
по оси $y: (a, b), (a, -b) \rightarrow (a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b)$

Примечание - в (a, b) - не коорд. точки, а коорд. аб.:



А значит если мы сложим по д-во симм. относ.

каждо друг ср. линия, то мы будем наблюдать

набор симм. относ. центра 1 раз,

способов расставить по хор. линии: $\frac{(250 \cdot 100)!}{(250-100-4)! \cdot 4!}$

по верт. линии: $\frac{(200 \cdot 125)!}{(200-125-4)! \cdot 4!}$

расставим симм. относ. центра: $\frac{(100 \cdot 125)!}{(100-125-2)! \cdot 2!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

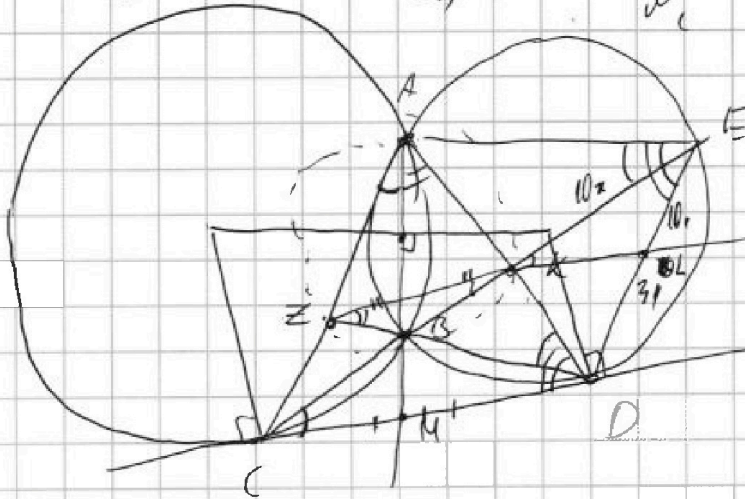
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~540~~ ~~540~~

$$\begin{array}{r} 975 \\ \times 4 \\ \hline 3900 \end{array}$$

$$\frac{1+5\sqrt{13}}{2}$$



$$\triangle CBD \sim \triangle KE$$

$$\frac{KE}{CD} = \frac{KL}{CB}$$

$$10x \cdot CB = 13x \cdot CB \cdot \frac{10}{13} CD$$

$$CD = \frac{3}{13} \cdot \frac{10}{13} \cdot CB$$

$$10x \cdot CB = CD \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{10}{13} \cdot CB$$

$$10x \cdot CB = \frac{100}{13} CD^2$$

$$13 \cdot 10x \cdot CB = 100 CB \cdot CE$$

$$CE = 13x$$

По п. Мекелса:

$$\frac{MB}{BA} \cdot \frac{AK}{KO} \cdot \frac{CD}{MD} = 1$$

$$\frac{MB}{BA} \cdot \frac{AK}{KO} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{MB}{AA}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{3} = 5 \\ - 5 \cdot 20 \\ \hline -100 \\ -43 \end{array}$$

$$\frac{MB}{BA} = \frac{MD - \frac{AB}{2}}{MD + \frac{AB}{2}}$$

По п. Мекелса:

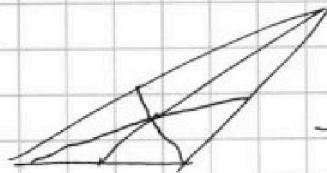
$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$\frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AK}{KO} \cdot \frac{MD}{MC} = 1$$

$$\frac{CZ}{ZA} = \frac{KO}{KA}$$

$$ZK \parallel CD$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 101 \\ \hline 1529 \\ 169 \\ \hline 17059 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 134 \\ \times 134 \\ \hline 536 \\ 402 \\ 134 \\ \hline 17956 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ _
ИЗ
_ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12-x^2+x}$$

$$a = b +$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12-x^2+x} + \sqrt{4-x}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x+28 + 10\sqrt{x+3} = 4(12-x^2+x) + 4(4-x)\sqrt{x+3} + 4-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x+28 + 10\sqrt{x+3} = 48 - 4x^2 + 4x + (16-4x)\sqrt{x+3} + 4-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ 4x^2 - 2x - 24 = (6-4x)\sqrt{x+3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x^2 - x - 12 = (3-2x)\sqrt{x+3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \end{cases}$$

$$x = -2$$

$$\downarrow$$

$$+$$

$$-3$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12-x^2+x} - 5$$

1

$$-4 + 2\sqrt{x+3}(4-x) = \dots$$

$$\begin{matrix} 2 \\ a \end{matrix}$$

$$-4 - 2a = 4a^2 - 20a + 25$$

$$4a^2 - 18a + 29 = 0$$

$$2a^2 - 9a + 14.5 = 0$$

$$2(a-3)(a-\frac{3}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} 12-x^2+x=0 \\ 12-x^2+4=2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-3=0 \\ x^2-x-9.75=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$1,75 - 4 =$$

$$= -3,6 +$$

$$3,9$$

$$\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = 3$$

$$\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = 1,5$$

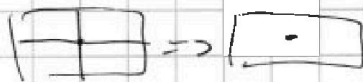
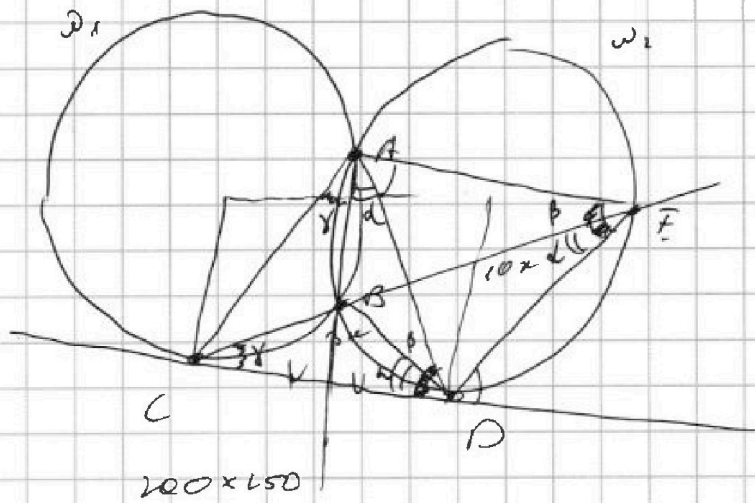


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

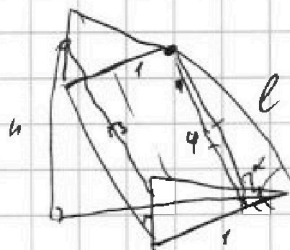
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{200 \cdot 250}{2} = 25000 \text{ км}^2 \text{ в колобине}$$



(a, b, c)

$$a - b \neq 3$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a - b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

$$\Downarrow$$

$$p = 3$$

$$(a-c)(b-c) > 0$$

$$\begin{cases} a-c=0 \\ b-c=1 \\ a-c=3 \\ b-c=4 \end{cases}$$

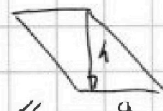
$$\begin{cases} 2=c-0 \\ b=c-1 \end{cases}$$

$$\frac{CB}{EA} = \frac{BD}{ED} = \frac{CD}{CE}$$

Читая в углу
и сверху

25000 км² в колобине

$$h \cos \alpha$$



$$h \cos \alpha = 1 \quad p \text{ чел}$$

$$\frac{15}{15} \times 37 = 160 + 32$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a-c > b-c$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \\ a-c = p^2 \\ b-c = p+1 \end{cases} \quad C$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ _ ИЗ _ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$(\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x) + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$(\cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x) + 3\cos 2x + 6\cos x =$$

~~решение~~

$$1 - \cos^2 x$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= \cos x (4\cos^2 x - 3) =$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x =$$

$$= 4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

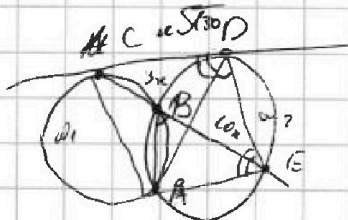
$$\begin{cases} 4 + 3 + 6 + 3 + -3 = p \\ t \in (-1; 1) \end{cases}$$

$$|f(t)| = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \Rightarrow \text{max}_{t \in [-1; 1]} f(t)$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 10$$

$$p \in [-4; 10]$$



$$cp = CD^2 = CB \cdot CE = 130 \text{ cm}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

25/12

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{4+x-x^2+2} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2^2} \end{cases}$$

1. $y < -1$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{4+x-x^2+2} \\ -y-1-3y+36 = \sqrt{169-2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y+35 = \sqrt{169-2^2} \\ \text{ненум.} \end{cases}$$

2. $y \geq 12$

$$\begin{cases} 4y-35 = \sqrt{169-2^2} \\ 4 \cdot 12 - 35 = \\ = 48 - 35 = 13 \end{cases}$$

2. $-1 \leq y < 12$

$$\begin{cases} \text{урава} \\ y+1-3y+36 = \sqrt{169-2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y+37 = \sqrt{169-2^2} \\ y=12 \\ z=0 \end{cases}$$

$y=12$

$z=0$

$f(0)$

$$\begin{matrix} \sqrt{x+3} & - & \sqrt{4-x} & + & 5 & = & 2\sqrt{12+x-x^2} \\ \text{"a} & & \text{"b} & & & & \end{matrix}$$

$2ab \leq 5$

$a+b+5 = 2ab$

$a+5 = b(2ab) = 2b(a+0.5)$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab}$

$a+5a+b-\sqrt{b}+5 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$37-24=13$

$\begin{cases} a-b+5=2ab \\ a, b=0 \end{cases}$

$2ab+$

$|a-b-2ab| = -5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \frac{|13x-35|}{|x+1|} =$$

$$5-x > 0 \\ \downarrow \\ x > 5$$

$$= \frac{13x-35}{x+1} = 61 \cdot 9^{20}$$

$$\frac{61 \cdot 9^{14}}{61 \cdot 9^5} = 9^{20}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)} = (x+1)^2 = 9^{20}$$

$$q = \sqrt[4]{9^{20}}$$

$$\frac{1+\sqrt{10}}{2} < 3$$

Вариант 1. $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (4\sqrt{x+1})^6 = 5-x$

$$\frac{4\sqrt{13}}{2}$$

$$124 \cdot 48 \cdot 2 = 39$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 5-x$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$x^2 + x + 12 = 0$$

$$x^2 - x - \frac{39}{4} = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$13x - 35 = 25 + 10x + x^2$$

$$x^2 - 26x + 60 = 0$$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 60 \cdot 4}}{2} = 13 \pm \sqrt{13^2 - 60} = 13 \pm \sqrt{109}$$

$$x = 13 + \sqrt{109}$$

$$13 - \sqrt{109} \cdot \sqrt{5}$$

$$\frac{4 \cdot 13 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{109}}{8 \cdot \sqrt{5 \cdot 109}}$$

$$2. (5-x) \cdot (4\sqrt{x+1})^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$5-x = \sqrt{13x-35}$$

$$40 = 14x$$

$$x = \frac{20}{7}$$

$$\frac{(5-x)}{(4\sqrt{x+1})} \cdot \sqrt{(x+3)(4-x)} = 3$$

$$-x^2 + 11x + 12 = 9$$

$$-x^2 + x + 3 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $13 + \sqrt{109}$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 5$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab} - 20\sqrt{ab} + 25$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 18 \cdot 16}}{8} =$$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{18 \cdot 2}}{8} = \frac{18 \pm 6}{8} = \frac{12}{8}; 3$$

$$4x^2 - 18x + (25 - a - b) = 0$$

$$4x^2 - 18x + 18 = 0$$