МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$$p\cos 3x+6\cos 2x+3(p+4)\cos x+10=0$$
имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7:20$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:
   - $a<b$,
   - число $b-a$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a^2+b=1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Обозначим первый член [illegible] прогрессии за a_0, знаменатель — за d. Тогда

$$\begin{cases} a_0 d^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \\ a_0 d^4 = 2-x \\ a_0 d^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases}$$

Заметим, что

$$a_0 d^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \frac{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}{(3x+2)^2} = \frac{a_0 d^9}{(3x+2)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{d^8} = (3x+2)^2.$$

$$a_0 d^4 = \frac{a_0 d^{17}}{d^{\cdot}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot \left((3x+2)^2\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot \sqrt{|3x+2|^3} = 2-x \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+2>0 \\ 25x+34\geq 0 \\ \sqrt{25x+34} = 2-x \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+2<0 \\ 25x+34\leq 0 \\ \sqrt{-25x-34} = 2-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+2>0 \\ 25x+34\geq 0 \\ 25x+34 = x^2-4x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+2<0 \\ 25x+34\leq 0 \\ -25x-34 = x^2-4x+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+2>0 \\ 25x+34\geq 0 \\ x^2-29x-30=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+2<0 \\ 25x+34\leq 0 \\ x^2+21x+38=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-\frac{2}{3} \\ x\geq -\frac{34}{25} \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=30 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x<-\frac{2}{3} \\ x\leq -\frac{34}{25} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-19 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=-2 \\ x=-19 \end{array}\right.$$

Ответ: $x=30$; $x=-2$; $x=-19$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

<u>Задача 2.</u>

$$\begin{cases}\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z}, & (1)\\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2} & (2)\end{cases}$$

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}-3y+34=\sqrt{400-z^2} & \text{при } y\in(-\infty;-2],\\ -y+38=\sqrt{400-z^2} & \text{при } y\in(-2;18),\\ 3y-34=\sqrt{400-z^2} & \text{при } y\in[18;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}9y^2-204y+1159=400-z^2, \quad y\in(-\infty;-2]\cup[18;+\infty)\\ y^2-76y+1444=400-z^2, \quad y\in(-2;18)\end{array}\right.\\ 400-z^2\geq 0\end{cases}$$

Заметим, что минимум функции $f(y)=y^2-76y+1444$ находится в $y=\frac{76}{2}=38 \Rightarrow$ минимум функции на промежутке $y\in(-2;18)$ $f_{min}\geq f(18)=(|20|+0)^2=400$. При этом, т.к. $z^2\in[0;+\infty)$, $(400-z^2)\in[0;400]\Rightarrow$ при $y\in(-2;18)$ решений системы <u>нет</u>.

Аналогично, минимум функции $g(y)=9y^2-204y+1159$ достигается при $y=\frac{204}{2\cdot 9}=\frac{34}{3}=11,(3)\Rightarrow$ т.к. $g(y)$ – парабола с ветвями вверх, минимум на отрезке $y\in(-\infty;-2]\cup[18;+\infty)$ $g_{min}=g(18)=400$. $(400-z^2)\in[0;400]\Rightarrow$ единственное (т.к. $|11,(3)-(-2)|>|11,(3)-18|$)

пересечение этих двух функций – когда <u>обе равны 400</u>

$\Rightarrow 400-z^2=400\Rightarrow \boxed{z=0}$; $\boxed{y=18}$. Подставляем в (1):

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}+7=2\sqrt{18-3x-x^2}\Leftrightarrow\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}+7=2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

Обозначим: $\sqrt{x+6}=a$; $\sqrt{3-x}=b\Rightarrow a-b+7=2ab\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+7=b(2a+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+7=0\\2a+1=0\end{cases}\\ b=\frac{a+7}{2a+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+6}=-7<0 \text{ !!! Противоречие}\\ 2\sqrt{x+6}=-1 \text{ !!!}\end{cases}\\ \sqrt{3-x}=\frac{\sqrt{x+6}+7}{2\sqrt{x+6}+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}=\frac{1}{2}+\frac{13}{4\sqrt{x+6}+2}$ – ~~слева монотонно убывающая справа – возр~~

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cancel{3-x+\frac{1}{4}+\sqrt{3-x}=\frac{169}{16(x+6)+16\sqrt{x+6}+4}}\\ x\in[-6;3]\end{cases}\quad\begin{cases}x+6+3-x-2\sqrt{(x+6)(3-x)}=4(x+6)(3-x)+\ldots\\ x\in[-6;3]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9-2t=4t^2-28t+49\\ x\in[-6;3]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x+6)(3-x)=16\\(x+6)(3-x)=\frac{25}{4}\end{array}\right.\\ x\in[-\frac{1}{2};3]\end{cases}$$

Ответ: $(x;y;z)=\left(-\frac{3}{2};18;0\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$p\cos 3x+6\cos 2x+3(p+4)\cos x+10=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x)+6(\cos^2 x-\sin^2 x)+3p\cos x+12\cos x+10=0$

$p(\cos^3 x-\cos x\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x)+6\cos^2 x-6\sin^2 x+3p\cos x+12\cos x+10=0$

$p(\cos^3 x-\cos x(1-\cos^2 x)-2(1-\cos^2 x)\cos x)+6\cos^2 x-6(1-\cos^2 x)+3p\cos x+12\cos x+10=0$

$p\cos^3 x-p\cos x+p\cos^3 x-2p\cos x+2p\cos^3 x+6\cos^2 x-6+6\cos^2 x+3p\cos x+12\cos x+10=0$

$4p\cos^3 x+12\cos^2 x+12\cos x+4=0$

$p\cos^3 x+3\cos^2 x+3\cos x+1=0$ Обозначим: $\cos x=t$:

$pt^3+3t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow (t^3+3t^2+3t+1)+(p-1)t^3=0 \Leftrightarrow (t+1)^3=(1-p)t^3.$

Заметим, что $t=0$ не является решением данного уравнения $\Rightarrow \boxed{t\neq 0} \Rightarrow (t+1)^3=(1-p)t^3 \Leftrightarrow \left(\frac{t+1}{t}\right)^3=1-p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{t}\right)^3=1-p \Leftrightarrow \frac{1}{t}=\sqrt[3]{1-p}-1$. Заметим, что обе части уравнения не равны $0 \Rightarrow \sqrt[3]{1-p}-1\neq 0 \Leftrightarrow 1-p\neq 1 \Leftrightarrow \boxed{p\neq 0}$

$\frac{1}{t}=\sqrt[3]{1-p}-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \\ p\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \\ p\neq 0\end{cases} \to$ уравнение имеет решение при $\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\in[-1;0)\cup(0;1]$.

Функция $f(p)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$ монотонно возрастающая $\Rightarrow$ т.к.

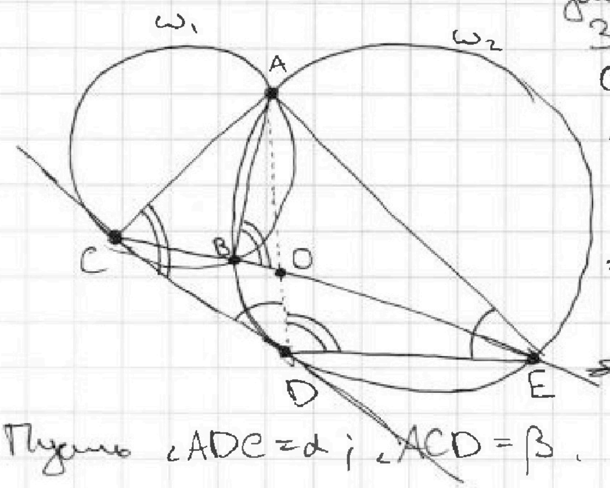
$\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p}-1=1 \Leftrightarrow 1-p=8 \Leftrightarrow p=-7$ и

$\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}=-1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p}-1=-1 \Leftrightarrow 1-p=0 \Leftrightarrow p=1$, уравнение имеет решение при $p\in[-7;0)\cup(0;1]$. В таком случае

$\cos x=\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $p\in[-7;0)\cup(0;+1]$; $x=\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 4



Пусть O – пересечение CE и AD. Заметим, что если CD – касательная, а AC – секущая, $\angle ACD = 180° - \angle ABC = \angle ABE = \angle ADE$, т.к. ABDE – вписанный. Аналогично, $\angle ADC = \angle AED$. Следовательно, $\triangle ADC \sim \triangle AED$ по двум углам. $\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$ (*)

Пусть $\angle ADC = \alpha$; $\angle ACD = \beta$. Th. синусов:

для $\triangle ADC$: $\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha}$; для $\triangle AED$: $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AE}{\sin\beta}$;

для $\triangle COD$: $\frac{CO}{\sin\alpha} = \frac{CD}{\sin\angle COD}$; для $\triangle DOE$: $\frac{OE}{\sin\beta} = \frac{DE}{\sin\angle DOE}$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{CD\sin\alpha}{\sin\angle COD} \cdot \frac{\sin\angle DOE}{DE\sin\beta} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \overset{(*)}{=} \frac{AD}{AE} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 = \frac{7}{20} \text{ по условию}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{7}{20}} \Rightarrow \boxed{\frac{ED}{CD}} = \frac{AE}{AD} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \boxed{\sqrt{\frac{20}{7}}}$$

Ответ: $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

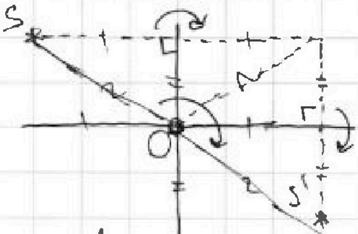
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

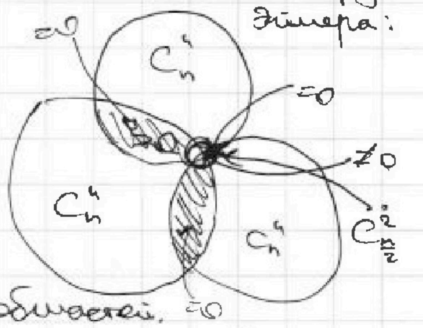
Задача 5

Длины обеих сторон прямоугольника чётны ⇒ обе средние линии расположены вдоль сторон клеток, а центр – в одном из узлов клеточной сетки.

Заметим, что если множество симметрично относительно обеих средних линий, то оно симметрично и относительно центра, т.к. линии перпендикулярны и центр в их пересечении, отражая относительно двух осей и центрально, получается одно и то же преобразование.



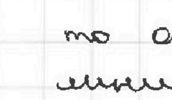
Аналогично, если множество клеток симметрично относительно одной из ср. линий ~~и~~ отн. центра, то оно симметрично и относительно второй ср. линии. Таким образом, каждое из искомых множеств либо симметрично относительно ровно одной симметрии, либо всех трёх. Более понятная схема с кругами Эйлера:



Кол-во способов закрасить с центральной симметрией: Разобьём прямоугольник на две центрально симметричные области и найдём кол-во способов выбрать 4 клетки в одной из них: $\boxed{C_n^4}$, где $\boxed{n=\frac{120\cdot 500}{2}}$ – кол-во клеток в одной из таких областей.

Аналогично, способов получения множеств, симметричных относительно каждой из осей, $\boxed{\text{по } C_n^4}$.

Кол-во способов получения множества со всеми видами симметрий: разделим прямоугольник на 4 равных и найдём кол-во способов закрасить в одном из них две клетки: $\boxed{C^2_{\frac{n}{2}}}$.



Т.о., всего способов

$3C_n^4 - 2C^2_{\frac{n}{2}}$ (т.к. $C^2_{\frac{n}{2}}$ посчитано трижды).

$$3C_n^4 - 2C^2_{\frac{n}{2}} = 3\cdot\frac{n!}{4!(n-4)!} - 2\cdot\frac{(\frac{n}{2})!}{2!(\frac{n}{2}-2)!} = 3\cdot\frac{n!}{4!(n-4)!} - \frac{(\frac{n}{2})!}{(\frac{n-4}{2})!} = \frac{3\cdot 60\,000!}{24\cdot 59\,996!} - \frac{30000!}{29\,998!}$$

$n=60000 \Rightarrow \frac{n}{8}(n-1)((n-2)(n-3)-1)$

Ответ: $3C^4_{60000} - 2C^2_{30000}$

<u>Задача 6.</u> $(a-c)(b-c)=p^2$, где p – простое число.

$(a-c), (b-c) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ либо обе скобки равны $\pm p$, либо одна из скобок равна ± 1, а вторая – $\pm p^2$.

Если $\begin{cases} a-c=\pm p \\ b-c=\pm p \end{cases} \Rightarrow a-c=b-c \Leftrightarrow a=b$. Но $a<b$. Противоречие.

Значит, (т.к. $a<b$) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1-p^2 \\ a-b=1-p^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow b-a=(p-1)(p+1)$. По условию, $(b-a) \not\vdots\; 3$. Значит, $(p-1) \not\vdots\; 3$ и $(p+1) \not\vdots\; 3$. Но среди подряд идущих $(p-1), p, (p+1)$ ровно одно делится на 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow \boxed{p=3} \Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=9 \\ a^2+b=1000 \end{cases}$ либо $\begin{cases} c-a=9 \\ c-b=1 \\ a^2+b=1000 \end{cases} \Rightarrow$

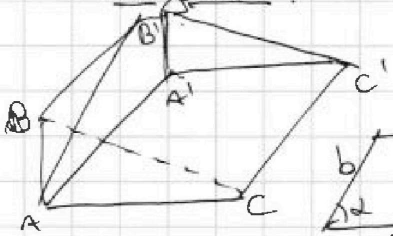
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (c+1)^2+(c+9)=1000 \\ (c-9)^2+(c-1)=1000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c^2+3c-990=0 \text{ – } \cancel{\text{нет целых корней}} \\ c^2-17c-920=0 \end{array}\right. \cancel{\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\frac{17+63}{2} \\ c=\frac{17-63}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=40 \\ c=-23 \end{array}\right.} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} c=30 \\ c=-33 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} c=40 \\ c=-23 \end{array}\right. \end{array}\right.$ Получается, всего существует ровно 4 тройки, удовлетворяющих условиям:

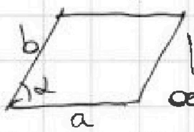
$\left[\begin{array}{l} (a;b;c)=(31;39;30) \\ (a;b;c)=(-32;-24;-33) \\ (a;b;c)=(31;39;40) \\ (a;b;c)=(-32;-24;-23) \end{array}\right.$

Ответ: $(a;b;c)=\{(31;39;30);(-32;-24;-33);(31;39;40);(-32;-24;-23)\}$

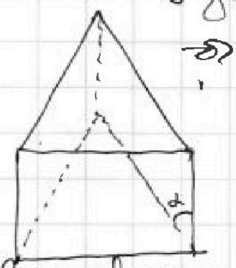
Задача 7.



Боковые грани призмы - параллелограммы ⇒ в каждой из них площадь вычисляется как



$\boxed{ab\sin\alpha}$, где a - длина стороны основания, b - длина боковой стороны, α - угол между соответствующими боковой стороной и основанием. Заметим, что в двух гранях площади равны ⇒ равны такие углы ⇒ ⇒ призма симметрична ⇒ третья грань с площадью 5 - прямоугольник ⇒ $\boxed{ab=5}$



$\Rightarrow ab\sin\alpha = 5\sin\alpha = 6 \Rightarrow \sin\alpha$

вид сверху

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \in [-1;1]$ функция монотонна

4000-40=

$\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p}-1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{p=1}$

$(6-\frac{3}{2})(\frac{3}{2})$ =3960

$\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{4}$ 3969

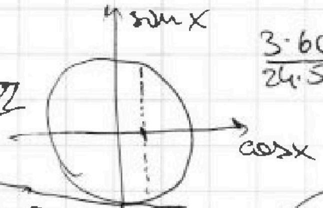
$\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p}-1 = 1 \Leftrightarrow 1-p = 8 \Leftrightarrow \boxed{p=-7}$

$p \in [-7;0) \cup (0;1]$

$\frac{-3 \pm \sqrt{9+4\cdot 990}}{2}$

3969 | 9
-36 | 441
36
-36
9
-9
0

$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$

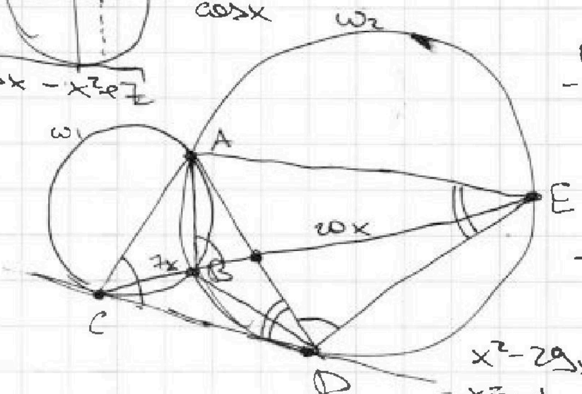


$\frac{3\cdot 60000!}{24\cdot 59996!} - \frac{30000!}{29998!}$

$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$

441 | 9
-36 | 49
81
-81
0



$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AC\cdot AE = AD^2$

$\frac{-3 \pm 63}{2}$

$\begin{cases} a<b \\ (b-a) \vdots 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a^2+b = 1000 \end{cases}$

0→0
1→1
2→1

$x^2 - 29x - 30 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=30 \end{array}\right.$

120000

n=60000

$(a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = p^2$

$(10-a)(10+a) = b$

$(a-c)(1000-a^2-c) = p^2 \Rightarrow$ либо одна из скобок 1, либо обе по p. Если обе по p, то

| 5/2 кит 4

$a-c = b-c \Leftrightarrow a=b$!!! $\Rightarrow (a-c=1)(b-c=p^2)$

$\boxed{c=a-1}$

$\begin{cases} b+a^2=1000 \\ b-a+1=p^2 \end{cases}$

$b-a = (p-1)(p+1)$

не кратно трём
$\Rightarrow p-1 \underset{3}{\equiv} x \neq 0$
$p+1 \underset{3}{\equiv} x+2 \neq 0$

$x+1=0$

$p \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow \boxed{p=3}$

$1^2=1$
$2^2=4$
$3^2=9$
$4^2=16$
$5^2=25$
$6^2=36$
$7^2=49$
$8^2=64$
$9^2=81$
$10^2=100$
$11^2=121$
$12^2=144$
$13^2=169$
$14^2=196$

$15^2=225$
$16^2=256$
$17^2=$
18^2

$\frac{13 \pm \sqrt{169-160}}{4}$

20^2

$\frac{13\pm 3}{4}$

$4t^2-26t+40=0$
$2t^2-13t+20=0$

$30^2=900 \to b=100$
$31^2=961 \to b=39$

$\boxed{a \leq 31}$

32
×32

31
×31
31
93
961

$\begin{cases} b+a^2=1000 \\ b-a+1=9 \end{cases}$

$8+a+a^2=1000$

$\boxed{\begin{array}{l} a=31 \\ b=39 \\ c=30 \end{array}}$

Если все положительны!!

$x^2+21x+38=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=19 \end{array}\right.$

$\frac{3}{24}\cdot n(n-1)(n-2)(n-3) - n(n-1) =$
$= n(n-1)\left(\frac{1}{8}(n-2)(n-3) - 1\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$|y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}$

$y\in(-\infty;-2]$ $\quad -y-2-2y+36=-3y+34=\sqrt{400-z^2}$

$y\in(-2;18)$ $\quad \cancel{y+2-2y+36=-y+38}=\sqrt{400-z^2}$

$y\in[18;+\infty)$ $\quad 3y-34=\sqrt{400-z^2}$

$\left[\begin{array}{ll} y\in(-\infty;-2] & 9y^2-204y+1159=400-z^2 \\ y\in(-2;18) & y^2-76y+1444=400-z^2 \\ y\in[18;+\infty) & 9y^2-204y+1159=400-z^2 \end{array}\right.$

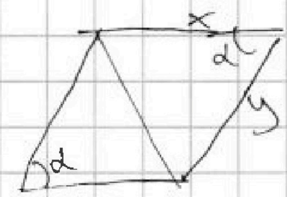
$34\cdot 34$: 136, 102, 1156

$38\cdot 38$: 304, 114, 1444

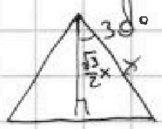
$204 \mid 18$ $\quad \frac{204}{18}=\frac{102}{9}=\frac{34}{3}$

$102 \mid 3$: 9, 34, 12, 12, 0

$\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z}$



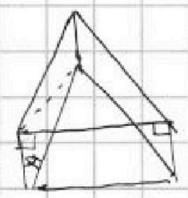
xy sin α ⇒ грани с равными площадями равны ⇒ тр-ки прямоугольные

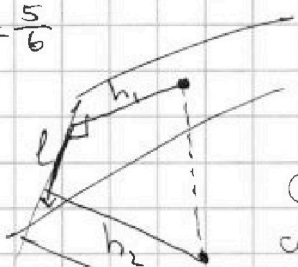


$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt3}{2}x=\frac{\sqrt3 x^2}{4}=4 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{16}{\sqrt3}}=\frac{4}{\sqrt[4]{3}}$

$xy=5 \quad \frac{4}{\sqrt[4]{3}}y=5 \Rightarrow \boxed{y=\frac{5}{4}\sqrt[4]{3}}$

$\sin\alpha=\frac{5}{6}$



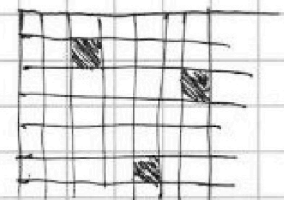


$L=\sqrt{h_1^2+h_2^2+l^2-2h_1h_2\cos\varphi}$

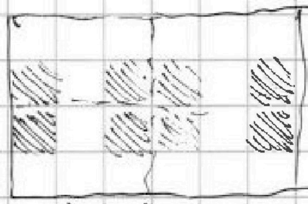
$(20\times 6)\times \cancel{30}\ 80$

Способов получить центральную симметрию: $\left(\frac{500\cdot 120}{2}\right) \Rightarrow n \Rightarrow C_n^4$

каждой осевой симметрии C_n^4 $\quad 3C_n^4-2C_{\frac{n}{2}}^2=3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$



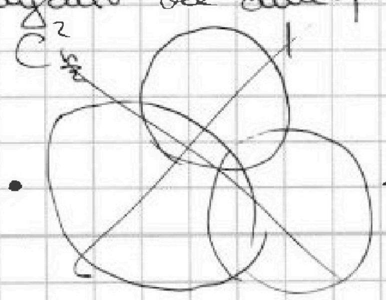
$3\cdot\frac{n!}{4!(n-4)!}-\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)!}{2!\left(\frac{n}{2}-2\right)!}$



$= x\in[-6;3]$

~~центральная~~

Способов получить все симметрии одновременно $C_{\frac{n}{2}}^2$



две оси = центральная ось + центр = вторая ось

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$a_0 \quad a_0 d \ \dots\ a_0 d^9, \dots, a_0 d^{11}, \dots, a_0 d^{17}$

$a_0 d^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$a_0 d^{11} = 2-x$

$a_0 d^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \frac{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}{(3x+2)^2} = \frac{a_0 d^9}{(3x+2)^2}$

$d^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$d^4 = \frac{1}{|3x+2|}$ $\quad \boxed{x \neq -\frac{2}{3}}$ $\quad d^2 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$

$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2>0\\ 25x+34\ge 0\\ \sqrt{25x+34}=2-x\end{cases}$

$\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 900}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{3609}}{2}$

1840

3680
289
3969

$17 \cdot 17 = 119 + 170 = 289$

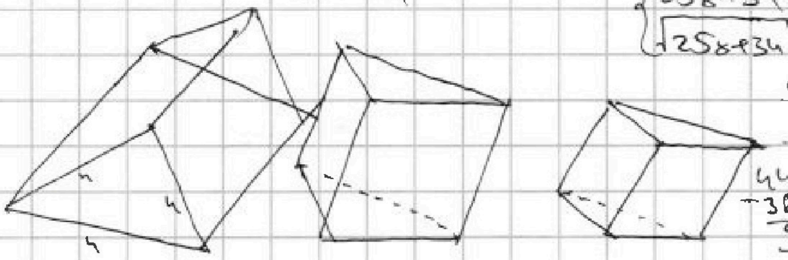
$3609 : 9 = 401$

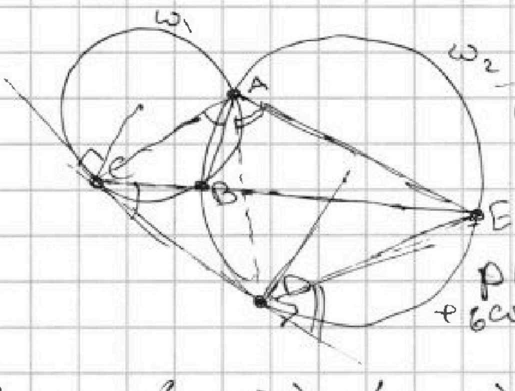
$\frac{17\pm\sqrt{17^2+4\cdot 920}}{2}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \dots$

$3969 : 9 = 441$

$441 : 9 = 49$





$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$

$p(\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x) + 6(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3p\cos x + 12\cos x + 10 = 0$

$p(\cos^3 x - \cos x\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x) + 6\cos^2 x - 6\sin^2 x + 3p\cos x + 12\cos x + 10 = 0$

$p(\cos^3 x - \cos x(1-\cos^2 x) - 2(1-\cos^2 x)\cos x) + 6\cos^2 x - 6(1-\cos^2 x) + 3p\cos x + 12\cos x + 10 = 0$

$p\cos^3 x - p\cos x + p\cos^3 x - 2p\cos x + 2p\cos^3 x + 6\cos^2 x - 6 + 6\cos^2 x + 3p\cos x + 12\cos x + 10 = 0$

$\cos^3 x(p+p+2p) + \cos^2 x(6+6) + \cos x(-p-2p+3p+12) - 6 + 10 = 0$

$4p\cos^3 x + 12\cos^2 x + 12\cos x + 4 = 0 \Rightarrow p\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$

$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0 \qquad (\sqrt[3]{p}\,t+1)^3 = pt^3 + 3\sqrt[3]{p^2}\,t^2 + 3\sqrt[3]{p}\,t + 1$

$(t+1)^3 = (1-p)t^3$ Если $t^3 = 0$, то $(t+1)^3 = 0$. Противоречие

$\left(\frac{t+1}{t}\right)^3 = 1-p \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{t}\right)^3 = 1-p \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p}-1 \qquad \boxed{t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}}$