



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Обозначим первый член арифметического прогрессии за  $a$ , разность - за  $d$ . Тогда

$$\begin{cases} a_0 d^3 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \\ a_0 d^4 = 2-x \\ a_0 d^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases}$$

Заметим, что

$$a_0 d^{17} = \frac{a_0 d^3}{(3x+2)^2} = \frac{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}{(3x+2)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{d^3} = (3x+2)^2$$

$$a_0 d^4 = \frac{a_0 d^{17}}{d^{13}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot ((3x+2)^2)^{\frac{13}{3}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \cdot \sqrt{(3x+2)^3} = 2-x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+2 > 0 \\ 25x+34 \geq 0 \\ \sqrt{25x+34} = 2-x \Leftrightarrow \\ 3x+2 < 0 \\ 25x+34 \leq 0 \\ \sqrt{-25x-34} = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 > 0 \\ 25x+34 \geq 0 \\ 25x+34 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow \\ 3x+2 < 0 \\ 25x+34 \leq 0 \\ -25x-34 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 > 0 \\ 25x+34 \geq 0 \\ x^2 - 29x - 30 = 0 \Leftrightarrow \\ 3x+2 < 0 \\ 25x+34 \leq 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x = -1 \\ x = 30 \\ x < -\frac{2}{3} \\ x < -\frac{34}{25} \\ x = -2 \\ x = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -2 \\ x = -19 \end{cases}$$

Ответ:  $x = 30$ ;  $x = -2$ ;  $x = -19$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 2.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, (1)$$

$$\begin{cases} |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+34 = \sqrt{400-z^2} & \text{при } y \in (-\infty; -2], \\ -y+38 = \sqrt{400-z^2} & \text{при } y \in (-2; 18), \\ 3y-34 = \sqrt{400-z^2} & \text{при } y \in [18; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 204y + 1159 = 400 - z^2, & y \in (-\infty; -2] \cup [18; +\infty) \\ y^2 - 76y + 1444 = 400 - z^2, & y \in (-2; 18) \\ 400 - z^2 \geq 0 \end{cases}$$

Заметим, что минимум функции  $f(y) = y^2 - 76y + 1444$  находится в  $y = \frac{76}{2} = 38 \Rightarrow$  минимум функции на промежутке  $y \in (-2; 18)$   $f_{\min} = f(18) = (20|+0)^2 = 400$ . При этом, т.к.  $z^2 \in [0; +\infty)$ ,  $(400 - z^2) \in [0; 400]$   $\Rightarrow$  при  $y \in (-2; 18)$  решений системы нет.

Аналогично, минимум функции  $g(y) = 9y^2 - 204y + 1159$  достигается при  $y = \frac{204}{2 \cdot 9} = \frac{34}{3} = 11, (3) \Rightarrow$  т.к.  $g(y)$  - парабола с ветками вверх, минимум на отрезке  $y \in (-\infty; -2] \cup [18; +\infty)$   $g_{\min} = g(18) = 400$ .  $(400 - z^2) \in [0; 400] \Rightarrow$  единственное

пересечение этих двух функций - когда обе равны 400

$\Rightarrow 400 - z^2 = 400 \Rightarrow \boxed{z=0}; \boxed{y=18}$ . Подставляем в (1):

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

Обозначим:  $\sqrt{x+6} = a; \sqrt{3-x} = b \Rightarrow a - b + 7 = 2ab \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+7 = b(2a+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a+7=0 \\ 2a+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} = -7 < 0 \quad \text{!!! Противоречие} \\ 2\sqrt{x+6} = -1 \quad \text{!!!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{b} = \sqrt{3-x} = \frac{1}{2} + \frac{13}{4\sqrt{x+6}+2} - \text{или константа убывающая}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x} + \frac{1}{4} = \sqrt{3-x} = \frac{163}{6(x+6)+165x+64} \\ \sqrt{x+6} + 3 - x - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 4(x+6)(3-x) + \dots \end{cases} \begin{cases} x \in [-6; 3] \\ x \in [-6; 3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-2t = 4t^2 - 28t + 49 \\ x \in [-6; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(3-x) = 16 \\ (x+6)(3-x) = \frac{25}{4} \\ x \in [-6; 3] \end{cases} \text{ Ответ: } (x; y; z) = \left(-\frac{3}{2}; 18; 0\right)$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) + 6(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$p(\cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x) + 6 \cos^2 x - 6 \sin^2 x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - \cos x(1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos^2 x - 6(1 - \cos^2 x) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - p \cos x + p \cos^3 x - 2p \cos x + 2p \cos^3 x + 6 \cos^2 x - 6 + 6 \cos^2 x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad \text{Обозначим: } \cos x = t;$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + (p-1)t^3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^3 = (1-p)t^3$$

Заметим, что  $t \neq 0$  и являемся решением данного уравнения  $\Leftrightarrow t \neq 0 \Rightarrow (t+1)^3 = (1-p)t^3 \Leftrightarrow \left(\frac{t+1}{t}\right)^3 = 1-p$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{t}\right)^3 = 1-p \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p} - 1. \quad \text{Заметим, что обе части уравнения не равны 0} \Rightarrow \sqrt[3]{1-p} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 1-p \neq 1 \Leftrightarrow p \neq 0$$

$$\frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \\ p \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \\ p \neq 0 \end{cases} \rightarrow \text{уравнение}$$

имеем решение при  $\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \in [-1; 0) \cup (0; 1]$ .

Функция  $f(p) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$  монотонно возрастает  $\Rightarrow$  т.к.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p} - 1 = 1 \Leftrightarrow 1-p = 8 \Leftrightarrow p = -7 \quad \text{и}$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p} - 1 = -1 \Leftrightarrow 1-p = 0 \Leftrightarrow p = 1$ , уравнение имеет решение при  $p \in [-7; 0) \cup (0; 1]$ . В таком случае

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $p \in [-7; 0) \cup (0; 1]$ ;  $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .



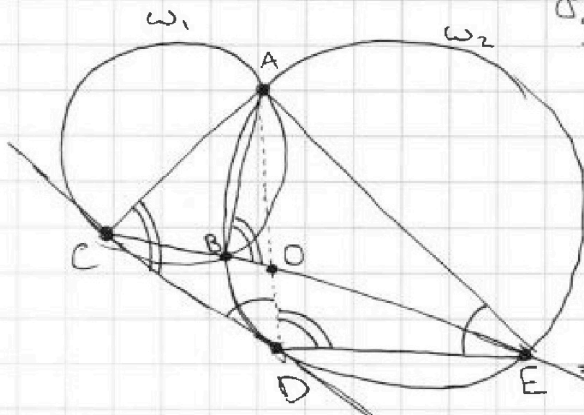
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



Пусть  $O$  - пересечение  $CE$  и  $AD$ .

Заметим, что если  $CD$  - касательная, а  $AC$  - секущая,  $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \angle ABE = \angle ADE$ , т.к.  $ABDE$  - вписанный.

Аналогично,  $\angle ADC = \angle AED$ . Следовательно,  $\triangle ADC \sim \triangle AED$  по двум углам.

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} (*)$$

Пусть  $\angle ADE = d$ ;  $\angle ACD = \beta$ . Т.к. секущая:

$$\text{для } \triangle ADC: \frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin d}; \quad \text{для } \triangle AED: \frac{AD}{\sin d} = \frac{AE}{\sin \beta};$$

$$\text{для } \triangle COD: \frac{CO}{\sin d} = \frac{CD}{\sin \angle COD}; \quad \text{для } \triangle ODE: \frac{OE}{\sin \beta} = \frac{DE}{\sin \angle DOE}$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{CD \sin d}{\sin \angle COD} \cdot \frac{\sin \angle DOE}{DE \sin \beta} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin d}{\sin \beta} \stackrel{(*)}{=} \frac{AD}{AE} \cdot \frac{\sin d}{\sin \beta} = \left( \frac{\sin d}{\sin \beta} \right)^2 = \frac{7}{20} \text{ по условию}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin d}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{7}{20}} \Rightarrow \boxed{\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{\sin \beta}{\sin d} = \sqrt{\frac{20}{7}}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

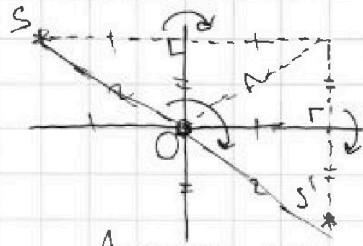
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 5

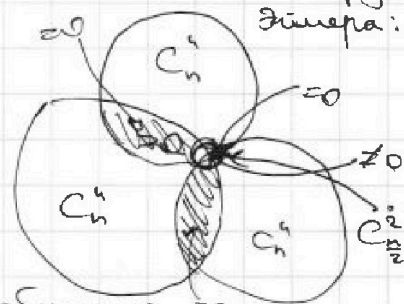
Длины обеих сторон прямоугольника равны  $\Rightarrow$  обе средние линии расположены вдоль сторон клетки, а центр - в одном из узлов клеточной сетки.

Заметим, что если множество симметрично относительно обеих средних линий, то оно симметрично и относительно центра, т.к. линии перпендикулярны и центр в их пересечении, отражая относительно двух осей и центрально, получается одно и то же преобразование.



Аналогично, если множество клеток симметрично относительно одной из осей и относительно второй ос. линии. Таким образом, каждое из искомого множеств либо симметрично относительно ровно одной симметрии, либо всех трёх.

Кол-во способов закрасить с центральной симметрией: Разобьем прямоугольник на две центрально симметричные области и найдем кол-во способов выбрать  $k$  клеток в одной из них:  $C_n^k$ , где  $n = \frac{120 \cdot 500}{2}$  - кол-во клеток в одной из таких областей.



Аналогично, способов получения множества, симметричных относительно каждой из осей, по  $C_n^k$ .

Кол-во способов получения множества со всеми видами симметрии: разделим прямоугольник на 4 равных и найдем кол-во способов закрасить в одном из них две клетки:  $C_{\frac{n}{2}}^2$ .

Т.о., всего способов

$$3C_n^4 - 2C_{\frac{n}{2}}^2 \quad (\text{т.к. } C_{\frac{n}{2}}^2 \text{ посчитано трижды})$$

$$3C_n^4 - 2C_{\frac{n}{2}}^2 = 3 \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} - 2 \cdot \frac{(\frac{n}{2})!}{2!(\frac{n}{2}-2)!} = 3 \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} - \frac{(\frac{n}{2})!}{(\frac{n}{2}-2)!} = \frac{3 \cdot 60000!}{24 \cdot 58998!} - \frac{30000!}{29998!}$$

$n = 60000 \Rightarrow \frac{n}{2} = 30000$

Ответ:  $3C_{60000}^4 - 2C_{30000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6.

$(a-c)(b-c) = p^2$ , где  $p$  - простое число.  
 $(a-c), (b-c) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  либо обе скобки равны  $\pm p$ ,  
 либо одна из скобок равна  $\pm 1$ , а вторая -  $\pm p^2$ .  
 Если  $\begin{cases} a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \end{cases} \Rightarrow a-c = b-c \Rightarrow a=b$ . Но  $a < b$ . Противоречие.

Значит,  $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = 1-p^2 \\ a-b = 1-p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a = (p-1)(p+1)$ . По условию,

$(b-a) \nmid 3$ . Значит,  $(p-1) \nmid 3$  и  $(p+1) \nmid 3$ . Но среди подряд идущих  $(p-1), p, (p+1)$  ровно одно делится на 3  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow p \nmid 3 \Rightarrow \boxed{p=3} \Rightarrow \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = 9 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$  либо  $\begin{cases} c-a = 9 \\ c-b = 1 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (c+1)^2 + (c+9) = 1000 \\ (c-9)^2 + (c-1) = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 3c - 990 = 0 \\ c^2 - 17c - 920 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{17+63}{2} \\ c = \frac{17-63}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 40 \\ c = -23 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ c = -33 \\ c = 40 \\ c = -23 \end{cases}$  Получаемся, всего существует ровно 4 тройки удовлетворяющих условиям:  
 $\begin{cases} (a; b; c) = (31; 39; 30) \\ (a; b; c) = (-32; -24; -33) \\ (a; b; c) = (31; 39; 40) \\ (a; b; c) = (-32; -24; -23) \end{cases}$

Ответ:  $(a; b; c) = \{(31; 39; 30); (-32; -24; -33); (31; 39; 40); (-32; -24; -23)\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



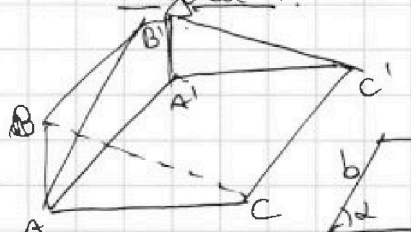
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.

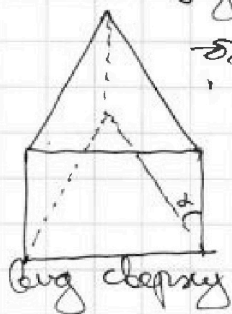


Боковые грани призмы - параллельные грани  $\Rightarrow$  в каждой из них площадь вычисляется как

$ab \sin d$ , где  $a$  - длина стороны основания,  $b$  - длина боковой

сторона,  $d$  - угол между соответствующими боковой стороной и основанием. Заметим, что в двух гранях площадь равна  $\Rightarrow$  равны тангенсы угла  $\Rightarrow$  призма симметрична  $\Rightarrow$  третья грань с площадью  $S$  - прямоугольная  $\Rightarrow$   $ab = S$

$\Rightarrow ab \sin d = S \sin d = b \Rightarrow \sin d$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$t = \frac{1}{\sqrt{1-p}-1} \in [-1; 1]$  функция монотонна

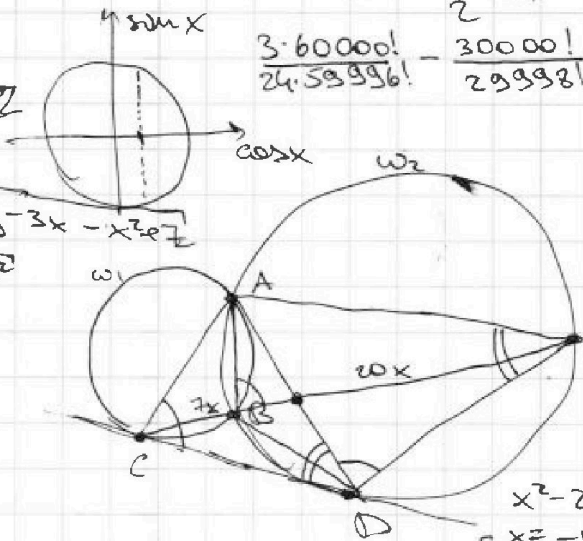
$\frac{1}{\sqrt{1-p}-1} = -1 \Rightarrow \sqrt{1-p}-1 = -1 \Rightarrow \sqrt{1-p} = 0 \Rightarrow p = 1$   $(6-\frac{3}{2})(\frac{3}{2}) = 3960$   
 $\frac{1}{\sqrt{1-p}-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-p}-1 = 1 \Rightarrow \sqrt{1-p} = 2 \Rightarrow 1-p = 4 \Rightarrow p = -3$   $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$   $3960$

$p \in [-7; 0) \cup (0; 1]$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1-p}}$

$x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-p}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2-z^2}$   
 $|y+2z+7| = \sqrt{400-z^2}$



$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AC \cdot AE = AD^2$

$a < b$   
 $(b-a)/3$   
 $(a-c)/(b-c) = p^2$   
 $a^2 + b = 1000$

$a \rightarrow 0$   
 $1 \rightarrow 1$   
 $2 \rightarrow 1$   
 $(a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = p^2$   
 $(10-a)(10+a) = b$

$x^2 - 29x + 30 = 0$   
 $x = -1$   $120000$   
 $x = 30$   $n = 60000$

$(a-c)(1000-a^2-c) = p^2 \Rightarrow$  либо одна из переменных  $\in \mathbb{Z}$ , либо обе по р. Если обе по р, то  $\frac{5}{2} \ln 4$

$a - 2z = b - c \Rightarrow a = b$  !!!  $\Rightarrow (a-c=1)(b-c=p^2)$

$c = a - 1$   
 $b + a^2 = 1000$   
 $b - a + 1 = p^2$

$1^2 = 1$	$15^2 = 225$	$32$
$2^2 = 4$	$16^2 = 256$	$+32$
$3^2 = 9$	$17^2 = 289$	
$4^2 = 16$	$18^2 = 324$	
$5^2 = 25$		
$6^2 = 36$	$13 \sqrt{169-160}$	
$7^2 = 49$	$4$	
$8^2 = 64$	$13 \frac{9}{4}$	
$9^2 = 81$	$4$	
$10^2 = 100$	$20^2$	
$11^2 = 121$	$4t^2 - 26t + 40 = 0$	
$12^2 = 144$	$2t^2 - 13t + 20 = 0$	
$13^2 = 169$	$30^2 = 900 \rightarrow b = 100$	
$14^2 = 196$	$31^2 = 961 \rightarrow b = 39$	

$b + a^2 = 1000$   
 $b - a + 1 = 9$   
 $8 + a - a^2 = 1000$   
 $a = 31$   
 $b = 39$   
 $c = 30$

Если все найдем в ответе!!  
 $x^2 + 21x + 38 = 0$

$b - a = (p-1)(p+1)$   
 то можно тригонометрия  
 $\Rightarrow p - 1 \equiv \frac{2}{3} x \neq 0$   
 $p + 1 \equiv \frac{2}{3} x + 2 \neq 0$   
 $x + 1 = 0$   
 $p \equiv \frac{2}{3} \Rightarrow p = 3$

$a \leq 31$   $\frac{3}{24} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3) - n(n-1) =$   
 $= n(n-1) \left( \frac{1}{8} (n-2)(n-3) - 1 \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$y \in (-\infty; -2]$$

$$-y-2-2y+36 = -3y+34 = \sqrt{400-z^2}$$

$$y \in (-2; 18)$$

$$y+2-2y+36 = -y+38 = \sqrt{400-z^2}$$

$$y \in [18; +\infty)$$

$$3y-34 = \sqrt{400-z^2}$$

$$y \in (-\infty; -2]$$

$$3y^2 - 204y + 1159 = 400 - z^2$$

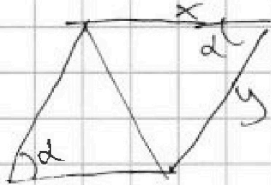
$$y \in (-2; 18)$$

$$y^2 - 76y + 1444 = 400 - z^2$$

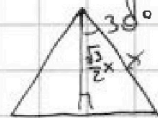
$$y \in [18; +\infty)$$

$$3y^2 - 204y + 1159 = 400 - z^2$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

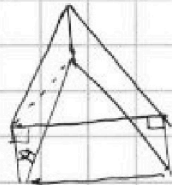


$xy \sin \alpha \Rightarrow$  площадь равна  
произведению сторон  $\Rightarrow$  площадь  
треугольника



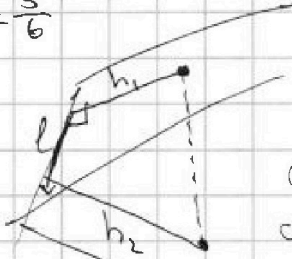
$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = 4 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$xy = 5 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}y = 5 \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$



$$\sin \alpha = \frac{5}{6}$$

$$(20 \times 6) \times 20 = 2400$$



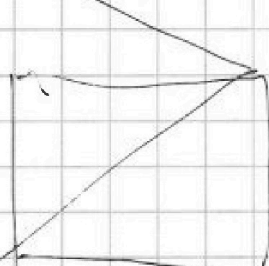
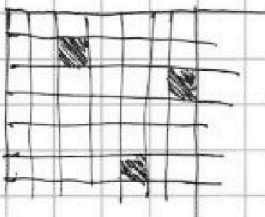
$$L = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + l^2 - 2h_1h_2 \cos \varphi}$$

Способом найдем центральный  
симметрично:  $\frac{(500 \cdot 100)}{2} = 25000$

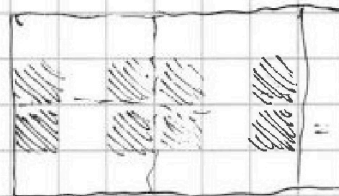
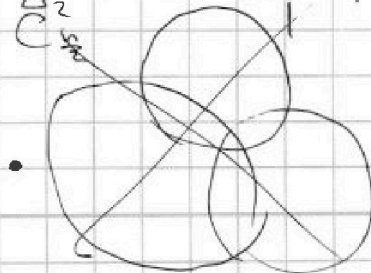
$$\Rightarrow C_n^4$$

каждой своей симметрии

$$C_n^4 - 2C_n^2 = 3 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 3$$



Способом найдем все симметрии  
одновременно:  $C_n^2$



$$3 \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} - \frac{2 \cdot (n/2)!}{2!(n/2)!}$$

$$= 5 \in \{-6; 3\}$$

уравнение

две оси = центральный

ось + центр = вторая ось

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Члены

$$a, a \cdot d, \dots, a \cdot d^2, \dots, a \cdot d^n, \dots, a \cdot d^{17}$$

$$a \cdot d^2 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a \cdot d^4 = 2-x$$

$$a \cdot d^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \frac{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}{(3x+2)^2} = \frac{a \cdot d^2}{(3x+2)^2}$$

$$d^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$d^4 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$d^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

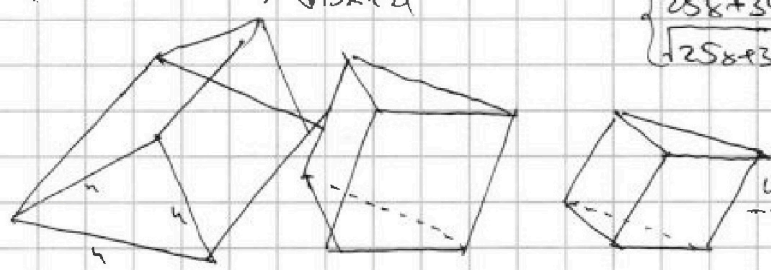
$$\begin{cases} 3x+2 > 0 \\ 25x+34 > 0 \\ \sqrt{25x+34} = 2-x \end{cases}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9+4 \cdot 900}}{2}$$

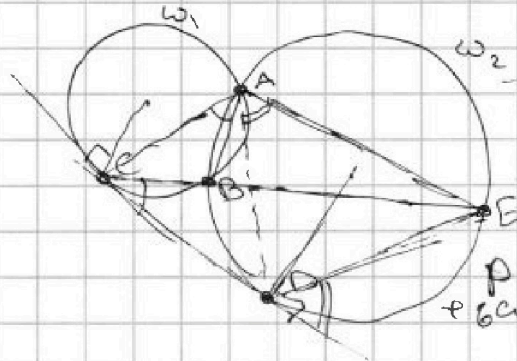
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3609}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3609 \mid 9 \\ -36 \phantom{00} \\ \hline 09 \\ -9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$17 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 920}$$



$$\cos(a+b) = \cos a \cos b -$$



$$\begin{array}{r} 4419 \\ -36 \phantom{00} \\ \hline 81 \\ -81 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3969 \mid 9 \\ -36 \phantom{00} \\ \hline 36 \\ -36 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 &= 0 \\ p(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) + 6(\cos^2 x - \sin^2 x) + & \\ + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$p(\cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x) + 6 \cos^2 x - 6 \sin^2 x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - p \cos x (1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos^2 x - 6(1 - \cos^2 x) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - p \cos x + p \cos^3 x - 2p \cos x + 2p \cos^3 x + 2p \cos^3 x + 6 \cos^2 x - 6 + 6 \cos^2 x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$\cos^2 x (p+p+2p) + \cos^2 x (6+6) - \cos x (-p-2p+3p+12) - 6+10 = 0$$

$$4p \cos^2 x + 12 \cos^2 x + (12 \cos x + 4) = 0 \Rightarrow p \cos^2 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$p t^3 + 3 t^2 + 3 t + 1 = 0$$

$$(t+1)^3 + p-1 = 0$$

$$(t+1)^3 = (1-p) t^3$$

$$p t^3 + 3 p t^2 + 3 p t + 1 = p t^3 + 3 p t^2 + 3 p t + 1$$

Если  $t^3 = 0$ , то  $(t+1)^3 = 0$ . Противоречие

$$\left(\frac{t+1}{t}\right)^3 = 1-p \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{t}\right)^3 = 1-p \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \sqrt[3]{1-p} - 1 \quad \boxed{t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}}$$