



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что i -ый член прогрессии имеет формулу $a \cdot d^{i-1}$ где a - первый член, и d - отношение соседних членов
Тогда:

$$\begin{cases} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = a \cdot d^0 \quad [1] \\ 2-x = a \cdot d^{11} \quad [2] \\ \sqrt{\frac{(25x+34)^4}{(3x+2)^3}} = a \cdot d^{12} \quad [3] \end{cases}$$

Считаем, что $a \neq 0$ и $d \neq 0$ т.к. иначе $x=2$ (т.к. 12-ый член равен 0), но тогда 10 и 16 не равны 0!

Тогда делим [1] на [2]

$$\sqrt{(3x+2)^4} = \frac{1}{d^8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{d^8} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Каждое [2] [1]

$$\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = d^2$$

заметим, что $x < 2$ т.к. $2-x > 0$

$$d^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

сократим $\frac{1}{3x+2}$ т.к. оно точно $\neq 0$

$$\frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} = 1$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

Пусть $25x+34 < 0$, тогда $x < -\frac{34}{25}$ и $3x+2 < 0$ и $x < -\frac{2}{3}$

$$x < -\frac{34}{25}$$

$$(2-x)^2 = -25x-34$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -19 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Пусть $25x+34 \geq 0$ тогда $x \geq -\frac{34}{25}$ и $3x+2 \geq 0$ и $x \geq -\frac{2}{3}$

$$(2-x)^2 = 25x+34$$

$$4 - 4x + x^2 - 25x - 34 = 0$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$x_1 = 30$ не удовлетворяет $x < 2$
 $x_2 = -1$ не удовлетворяет $x \geq -\frac{2}{3}$

Заметим, что при отрицательных x квадратно-линейная функция d^4 т.к. [3] = $\left(\frac{[2]}{[1]}\right)^4$, то мы получим корректную пометку-наиб.

Ответ: $x \in \{-19, -2\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Посмотрим на второе уравнение:

~~заметим~~ заметим, что если заметить

$2|y-18|$ на $|y-18|$ мы получим

$|y+2| + |y-18|$ слева. Но заметим, что

$|y+2| + |y-18|$ всегда ≥ 20 , а равно 20 только при $y \in [-2; 18]$ (так как сумма расстояний от y до -2 и от y до 18 равна 20 только если y на отрезке от -2 до 18).

Но заметим, что в исходном выражении было $2|y-18|$ значит $|y+2| + 2|y-18| = 20$ только при $y = 18$. (т.к. иначе $|y-18| > 0$ и равенство не будет выполнено)

Также заметим, что $\sqrt{400-z^2} \leq 20$ и равно 20 только при $z=0$ по монотонности корня и т.к. $z^2 \geq 0$.

Таким образом $y=18$, а $z=0$ т.к. только тогда достигается ~~минимум~~ минимум равенство.

Найдем x :

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3x-2 \cdot 0} + 7 = \sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$a = \sqrt{x+6} \quad b = \sqrt{3-x}$$

$$a - b + 7 = \sqrt{ab}$$

$$\text{заметим, что } a^2 + b^2 = x+6 + 3-x = 9$$

$$a - b + 7 - 4,5 = \frac{1}{2}(-a^2 + 2ab - b^2)$$

$$t = a - b$$

$$t + 7 - 4,5 = -\frac{1}{2}(t^2) \quad -2t - 5 = t^2$$

$$t^2 + 2t + 5 = 0 \\ D = 4 - 20 = -16$$

Таким образом решений нет.

Ответ: решений нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

Пусть $t = \cos x$
 $\cos 3x = 4t^3 - 3t$
 $\cos 2x = 2t^2 - 1$
 $\cos x = t$

Подставляем:

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4t^3 p - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4t^3 p + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$t^3 p + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t^3(p-1) + t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t^3(p-1) + (t+1)^3 = 0$$

$$t^3 k^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(t k + t + 1) (t^2 k^2 - t k (t+1) + (t+1)^2) = 0$$

Пусть $k = \sqrt[3]{p-1}$

1) $t k + t + 1 = 0$

$$t(k+1) = -1$$

$$t = \frac{-1}{k+1}$$

т.к. $|t| \leq 1$,

то $k+1 \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1]$

$k \in [0; +\infty) \cup (-\infty; -2]$

Пусть $k=0$ получаем

$$t = -1$$

2) $t^2 k^2 - t k (t+1) + (t+1)^2 = 0$

Пусть $k=0$ ~~тогда~~ $t = -1$

иначе:

$$D = (2-k)^2 - 4(k^2 - k + 1) = k^2 - 4k + k^2 - 4k^2 + 4k - 4 = -3k^2$$

Таким образом при $k=0$ уравнение имеет корень $t = -1$

иначе $D < 0$ и корней нет

т.к. при $k=0$ 1) и тем

даже корень $t = 1$, то 2)

не даёт новых корней

относительно 1)

Таким образом получаем, что ~~есть~~ корень

есть только при $k \in [0; +\infty) \cup (-\infty; -2]$ и равен

$$t = \frac{-1}{k+1}$$

$$k \geq 0 \rightarrow \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \rightarrow p \geq 1$$

$$k \leq -2 \rightarrow \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \rightarrow$$

$$\rightarrow p \leq -7$$

Ответ: при $p \in (-7; 1)$ корней нет

при $p \in [-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$$\cos(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

$$x = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k$$

$$x = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k$$

при $k \in \mathbb{Z}$

(при $p = -7$ или $p = 1$) $x = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k$ ~~также~~ ~~не учитывать~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда ответ тако:

$$\frac{x \cdot s(s-2)(s-4)(s-\frac{6}{8})}{2^2 \cdot 4 \cdot x \cdot 2 \cdot 1} - \frac{x \cdot s(s-4)}{2^4 \cdot x} =$$

$$= \frac{s(s-4)}{16} \left(\frac{(s-2)(s-\frac{6}{8})}{2} - 1 \right)$$

ответ: $\frac{s(s-4)}{16} \left(\frac{(s-2)(s-\frac{6}{8})}{2} - 1 \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$b - a \not\equiv 3$$

~~$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad p - \text{простое}$$~~

$$a^2 + b = 1000$$

заметьте, что $a \neq b$ т.к. иначе $a - b \neq 0$, но по условию $b - a \not\equiv 3$

таким образом $a - c \neq b - c$, а значит т.к. и a и b и c целые и $(a-c)(b-c) = p^2$ где p - простое, то одно из чисел $(a-c)$, $(b-c)$ по модулю равно p^2 , а другое 1.

заметьте, что $a - c < b - c$, значит либо $a - c = -p^2$ и $b - c = -1$ либо $a - c = 1$ и $b - c = p^2$

Пусть $a - c = -p^2$ и $b - c = -1$

тогда $b = c - 1$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2 + c - 1 = 1000 \quad a^2 + c = 1001 \equiv 2 \pmod{3}$$

если $a \equiv 3$ то $c \equiv 2 \pmod{3}$ тогда $a^2 - c \equiv 1 \pmod{3}$, но $-p^2$ может иметь остаток либо 2 либо 0 mod 3.

значит $a \not\equiv 3$ значит $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ и $c \equiv 1 \pmod{3}$

тогда $a - c \equiv 3$ значит $a - c = -9$ $a = c - 9$

$$(c-9)^2 + c = 1001 \quad c^2 - 18c + 81 + c = 1001 \quad c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$c_1 = 40 \rightarrow a = 31 \quad b = 39$$

$$c_2 = -23 \rightarrow a = -32 \quad b = -24$$

~~Выводим, что если $a - c = p^2$ и $b - c = -1$ то получим $a = c + p^2$ и $b = c - 1$, тогда $a - c = p^2$, но если $p \equiv 3$ то $a - c \equiv 0 \pmod{3}$, что противоречит условию. Значит, будем считать $(-b, -a, -c)$ в другом порядке и наоборот.~~

~~Ответ: 2 $a = 31, b = 39, c = 40$
 $a = -32, b = -24, c = -23$
 $a = 39, b = -24, c = -23$
 $a = -32, b = 31, c = 40$
 $a = 24, b = 32, c = 23$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ассц.

$$a - c = 9$$

$$b - c = 1$$

$$b = c + 1 \quad a = (c + 9)$$

$$c^2 + 18c + 81 + (c + 1) = 1000$$

$$c^2 + 19c + 82 = 1000$$

$$c^2 + 19c - 918 = 0$$

$$c = 33$$

$$c = 30$$

$$a = 31$$

$$b = 31$$

u

u

a ≠

$$u/3$$

$$a = 1 \quad c = 2$$

$$a = 2 \quad c = 1$$

a² квадрат

$$c = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$b - c = p^2$$

$$c = \text{либо } 2$$

$$c = 2$$

$$\text{либо } 0$$

u

u

u

$$2 \cdot 1$$

2 |

$$S(S-2)(S-4)(S-8)$$

$$\left(\frac{S}{2}\right) \left(\frac{S}{2}-1\right) \left(\frac{S}{2}-2\right)$$

$$\left(\frac{S}{2}-3\right)$$

$$\frac{8 \cdot 4}{16}$$

$$2$$

$$\left(\frac{S}{4}\right) \left(\frac{S}{4}-1\right)$$

$$S(S-2)(S-4)(S-8)$$

$$2^4 \cdot u \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1$$

$$S(S-4)$$

$$2^4 \cdot 2$$

$$\frac{3}{16} \cdot 2$$

$$S(S-2)(S-4)(S-8)$$

$$2^4$$

$$8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$

$$16 \cdot 4 \cdot 8$$



$$\left(\frac{S}{2}\right) \left(\frac{S}{2}-1\right) \left(\frac{S}{2}-2\right) \left(\frac{S}{2}-3\right) \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8}$$

$$3 -$$

$$\frac{S}{2} \frac{S}{2}$$

C

$$u \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a \cdot d^i$ $a \cdot d^{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$ (1?) (6?) ~~122~~
 $(c+is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$ $a \cdot d^{18} = \sqrt{(25x+34) \cdot \sqrt{(3x+2)^2}}$ $y=12$
 $c^3 - 3cs^2$ $(3x+2)^2$ $k^2 + 2kt + t^2 - kt^2 - kt + t^2 + 2t + 1$ $z=0$
 $d^8 = \sqrt{(3x+2)^4}$ $(a-c)(b-c) = p^2$ $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 =$
 $d^2 = \frac{1}{(3x+2)^2}$ $a-c = 1$ $= 2\sqrt{18-3x-x^2}$
 $4c \cos^2 - 3c$ $b-c = p^2$ $20p - \text{максимал}$
 $a < b$ $a-c = 1$ $no \ a-b : 3 \neq 0$
 $(b-a) \not\equiv 3$ $b-c = p^2$ $c \equiv 2$
 $(a-c)(b-c) = p^2$ $a-c = 1$ $(c \equiv 2) \ a \neq 0$
 $a^2 + b = 1000$ $b-c = p^2$ $a-b+7 = 2ab$
 $1/0 \quad 1/2/0$ $a-c = 1$ $(kt+t+1)(k^2t^2+kt(t+1)+$
 $1 \quad 1$ $b-c = p^2$ $a-c : p^2 + t^2 + 2t + 1)$
 $1 \quad 0$ $(c+is)^2 = c^2 + 2ics - s^2$ $\text{Таким } p=3$
 $= c^2 + 2ics - s^2$ $\{a : 3$
 $\{b : 3$
 $\{a - \text{максимал } k : 3$
 $\{a-c = -9$
 $\{a = c-9$
 $\{b = c-1$

$d^8 = \left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \right)^4 = \frac{1}{(3x+2)^2}$ $x \neq -1, 5$
 $(2-x)^4 = \frac{1}{(3x+2)^2}$ $(c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$
 $(25x+34)^2 (3x+2)^2 = (2-x)^4$ $c^2 - 17c + 80 = 0$
 $(2-x)^4 = (25x+34)^2$ 16
 $(2-x)^2 = 25x+34$ 20
 $4-4x+x^2 = 25x+34$
 $c^2 - 5^2$
 $2cs$
 $p(4t^2-34) + 6(2t^2-1) + 3(p+4)t + 10 = 4pt^3 + 12t^2 + 12t + 14 = 0$
 $pt^3 + 3t^2 + 3t + 41 = 0$ $(a-c)(b-c) = p^2$
 $a=b$ $(a-c) \neq (b-c)$
 $\text{знаем равно } : p^2, a \text{ простое } = 1$
 no maximo



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$p(4t^3 - 2t) + 6(2pt^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$ $b=c+1$ $a^2 + t + 1 = 1000$ $a^2 + c = 999$
 $4t^3 p - 2tp + 6(2t^2 - 6) + 3pt + 12t + 10 = 0$ $-7t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$
 $4t^3 p + 12t^2 + 12t + 4 = 0$ $t = -1$
 $t^3 p + 3t^2 + 3t + 1 = 0$ $-7 + 7t + 3 + 1 = 0$
 $(p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$ $a-c=9$
 $k^3 t^3 + (t+1)^3 = 0$ $a = 9 \times c$
 $(kt + t+1)(t^2 k^2 - kt(t+1) + (t+1)^2) = (kt + t+1)(t^2(k^2 - k + 1) + t(2-k) + 1)$
 $a-b+7=ab$
 $a-b+7=ab$ $b^2 + 10c + c^2 + c + 1 = 1000$
 $31 - 35 = 8$ $t^2 + 2t + 1$ $t = -1$
 $a-b+7=ab$
 $a-b+7=ab$ $t + 7 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}t^2$
 $\sqrt{(-25+34)(-3+2)} = \sqrt{(-1)(-1)} = 1 = 3$
 $2 - (-1) = 3$
 $\sqrt{(-50+34)(-6+2)} = \sqrt{(-16)(-4)} = 4 = 2$
 $a^2 + b^2 = 9$ $a^2 + 19c - 918 = 0$ $25 + 34$
 $(a-b)^2 = 9 - 14 - 2t$ $b = c + 1$ 21
 $t^2 + 2t + 5 = 0$ $576 + 456 =$ $21 \cdot \sqrt{59}$
 $b - c = -1$ $23(4) \sqrt{9}$ $a-b+7=ab$ $a-c$
 $b = c - 1$ $3i$ 3 $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{i2}$ $\frac{3i}{15i3}$ $3i$ $-2t - 5 = t^2$
 $a - b + 7 = ab$ $a^2 + b^2 = 9$
 $a - b + 7 + \frac{9}{2} = \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2$
 $a - b = t$ $a = \sqrt{7}$ $b = \sqrt{7}$
 $t + 7 = ab$ $a^2 + c = 1001$
 $t + 7 - 4,5 = -\frac{1}{2}(t)^2$ $-t^2 - 2t - 5 = 0$
 $a - c = -p^2$ $b = c + 1$ $a^2 + c + 1 = 1000$ $b = 3$
 $b - c = 1$ $a^2 + c = 999$ $c \equiv 2 \pmod{3}$ $b - c = 1$