



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle \frac{CEM}{CAN}) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b=40 \Rightarrow a=40-b \quad \cancel{p \in \mathbb{P}} \quad p - \text{простое число} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5 \quad - \text{заметим квадрат разности и вынесем общий множитель}$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 14p^5 \quad - \text{представим з. а и приведем подобные слагаемые}$$

$$(40-2b)^2 + 15(40-2b) = 14p^5 \quad ] \quad t = 40-2b$$

$$t^2 + 15t = 14p^5 \quad (*)$$

Заметим, что если  $a+b=40$  и  $a, b \in \mathbb{N}$ , то  $t \leq 39-1=38$ . Знаем,

$$14p^5 \leq 38^2 + 15 \cdot 38$$

$$14p^5 \leq 2014$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 38 \\ \hline 304 \\ + 38 \\ \hline 1444 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \times 15 \\ \hline 190 \\ + 38 \\ \hline 570 \end{array}$$

$$1444 + 570 = 2014$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 32 \\ \hline 94 \\ + 51 \\ \hline 544 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times 9 \\ \hline 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 17 \\ \hline 1401 \\ + 243 \\ \hline 4131 \end{array}$$

Рассмотрим первые значения  $p$ :

$$p=2: 2^5=32 \Rightarrow 14p^5 = 14 \cdot 32 = 544 \leq 2014 \quad (L.)$$

$$p=3: 3^5=9^3=243 \Rightarrow 14p^5 = 14 \cdot 243 = 4131 \leq 2014 \quad (L.) \Rightarrow p \neq 3$$

Следовательно, что  $p$  при  $p > 3$   $14p^5$  ещё больше  $\Rightarrow$  больше 2014. Знаем,  $p=2$

Тогда найдем дв. кор-ли отн.  $t(1)$ :

$$t^2 + 15t = 544$$

$$\begin{array}{r} 544 \\ \times 4 \\ \hline 2176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ \times 7 \\ \hline 3431 \\ + 49 \\ \hline 4917 \\ + 1 \\ \hline 4918 \end{array}$$

$$2401 = 7^4 = 49^2$$

$$t^2 + 15t - 544 = 0$$

$$b = 15^2 - 4 \cdot (-544) = 225 + 2176 = 2401 = 49^2$$

$$t_1 = \frac{-15 - \sqrt{49^2}}{2} = \frac{-15 - 49}{2} = \frac{-64}{2} = -32 = 40 - 2b \Rightarrow -2b = -72 \Rightarrow b = 36, a = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t_2 = \frac{-15 + \sqrt{45^2}}{2} = \frac{-15 + 45}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad \text{но } 40 - 2b \Rightarrow -2b = -29, \text{ но } 29 \neq 2 \Rightarrow b \neq 14.5$$

Ответ:  $a=4, b=36$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

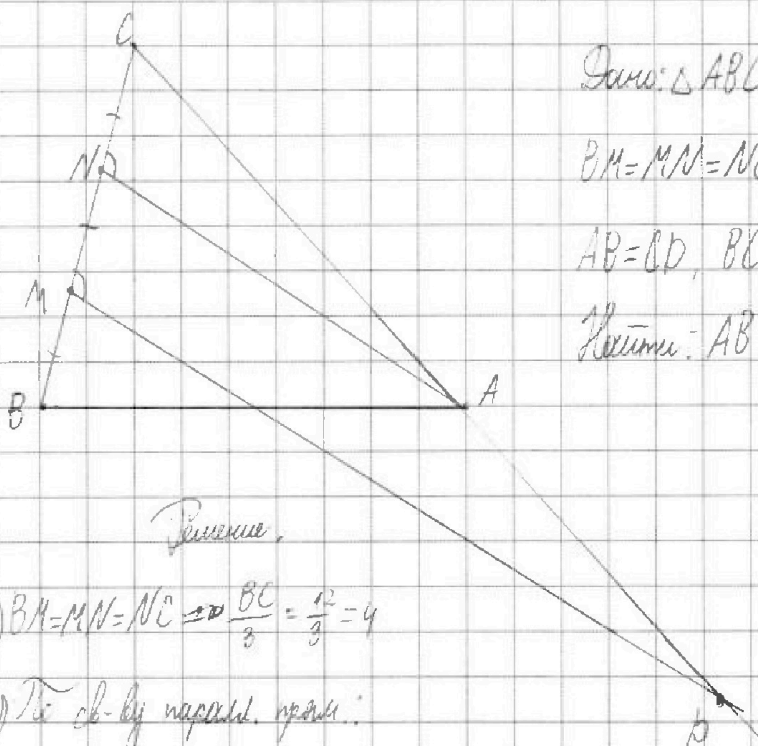


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $M, N \in BC$

$BM = MN = NC$ ,  $D \in AC$ ,  $AN \parallel MB$

$AB = CD$ ,  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

Найти:  $AB$

Решение.

$$1) BM = MN = NC \Rightarrow \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

2) По св-ву паралл. прям:

$$\angle CAN = \angle CMB \text{ (AN \parallel MB, ос BC)}$$

В то же время  $\angle C$  - общий. Значит,  $\triangle ACN \sim \triangle BCM$  (по 2-м углам), откуда

$$k = 2 \left( \frac{CM}{CN} = \frac{8}{4} = 2 \right). \text{ Из этого следует, что } CD = 2AC.$$

$$3) \text{ П.к. } AB = CD \text{ и } CD = 2AC \text{ (из (2))} \Rightarrow AB = 2AC$$

$$4) \text{ Заметим, что } \frac{AC}{AB} = \frac{CM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AN - \text{бис. (по трем)} \Rightarrow \angle CAB =$$

$$= 2\angle CAN \text{ (по свойству бис.)} \Rightarrow \cos(2\angle CAN) = \cos\angle CAB.$$

5) Применим теорему косинусов для  $\triangle ABC$  и стороны  $BC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle CAB \quad - \text{подставляем значения из (4), (3) и условия:}$$

$$12^2 = (2AC)^2 + AC^2 - 2 \cdot 2AC \cdot AC \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$4AC^2 + AC^2 + AC^2 = 144$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6AC^2 = 144 \quad /:6 \neq 0$$

$$AC^2 = 24$$

$$AC = \pm 2\sqrt{6} \quad - \text{принимая во внимание то, что сторона всегда положительна, } AC = 2\sqrt{6}$$

6) Из (3) и (5):

$$AB = 2AC = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Очевидно, что в классе задано только 1 место. Значит,  $b \geq 2$  рядов так:

x
y
z

где x ниже y, y ниже z. Выберем 2-ух случайных учеников и посадим их (перядом и ватен):  $\frac{2 \cdot 4}{2!} = 28$  способов. Пусть a выше b. Тогда есть  $\frac{2 \cdot 4}{2!}$  способов посадить их в отдельный ряд.

1) b
a

2) b
a

3) a
b

4) b
a

также 4 способа их посадить:

$$28 \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{1!} = 112 \text{ вариантов выбрать 2-ух учеников и}$$

посадить в отдельный ряд.

Р-реш друзей учеников. Разделим случайных на 2 группы без перекреста

(выберем в 1-ую 3-их случ, ост. - 2-ая группа):  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$  вар.

Сравнительно, что всех людей в группе можно посадить за 1 ряд только одним способом. Значит, есть 20 вариантов рассадить остальных.

Теперь по рядам. Есть 6 комбинаций по (3-2-1) распределим по рядам наши

группы (1-ая 2 чел., 2-ая 3 чел.). Значит, ответ:  $112 \cdot 20 \cdot 6 = 142 \cdot 20 \cdot 6 = 13440$

$$\begin{array}{r} 13440 \\ \times 10 \\ \hline 134400 \end{array}$$

Ответ: 13440



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если дорожки и деревья — <sup>лучший</sup> граф. Д-жем, что раз из любой деревни в лагерь только 1 путь, то в графе нет циклов.

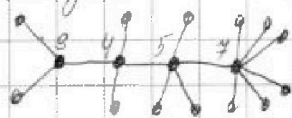
Пусть это не так, есть цикл.



Возьмем почтовый А и В такие, что обе почты в цикле. Но тогда из т. А в т. В есть два пути. Значит, в графе нет циклов.

Заметим, что граф на вершинах ст. 3, 4, 5 и  $\mathbb{Z}$  тоже связен. Т.к. иначе нет 3 вершины С, степени которой больше 1, что противоречит условию.

Тогда  $n$ -лучи такой граф:



— 14 вершин. Изменим его налага, т.е. тогда ст. вершины

3, 4, 5 или  $\mathbb{Z}$  <sup>изменяется</sup> ~~увеличивается~~ или появится вершина степени 2. Также если попробовали сделать др. граф, в нем будет цикл.

Ответ: 14.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{подкоренные выражения могут быть}$$

Заметим, что подкоренные выражения равны 0 и 1 или 1 и 0 (т.к. сумма или выражение больше 1 (<0) или сумма больше 1 (>1)).

$$1) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 & (a) \\ 1-|x+y-2|=1 & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} 1-|x+y-2|=1 \\ |x+y-2|=0 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+y)^2 - (x^2+y^2) = 0 \\ 4 - (x^2+y^2) = 0 \\ x^2+y^2=4 \quad \text{— значения до кв. суммы} \\ (x+y)^2 = 4 + 2xy \\ 4 = 4 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0 \end{cases}$$

Получим систему:  $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (2; 0); (0; 2)$

$$2) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 & (a) \\ 1-|x+y-2|=0 & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} 1-|x+y-2|=0 \\ |x+y-2|=1 \end{cases}$$

$$I \quad x+y-2=1 \Rightarrow x+y=3$$

$$a) \quad 2(x+y)^2 - (x^2+y^2) = 1$$

$$x^2+y^2=5$$

$$(x+y)^2 = 9 + 2xy \Rightarrow 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow y=3-x$$

$$x(3-x)=2 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=2 \Rightarrow y_1=2, y_2=1 \Rightarrow (1; 2); (2; 1)$$

$$II \quad x+y-2=-1 \Rightarrow x+y=1$$

$$2(x+y)^2 - (x^2+y^2) = 1$$

$$x^2+y^2=1$$

$$(x+y)^2 = 1 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (1; 0); (0; 1)$$

Ответ:  $(1; 0); (0; 1); (2; 0); (0; 2); (1; 2); (2; 1)$ .

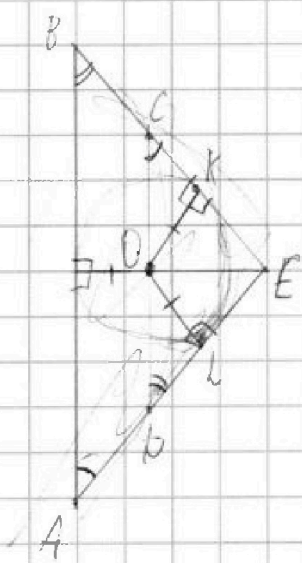


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



15

$K, M$  - т. кас. сф.  $O$  и  $BE$  и  $AE$  соот.

$OK = OL$  (кад.  $r$ )

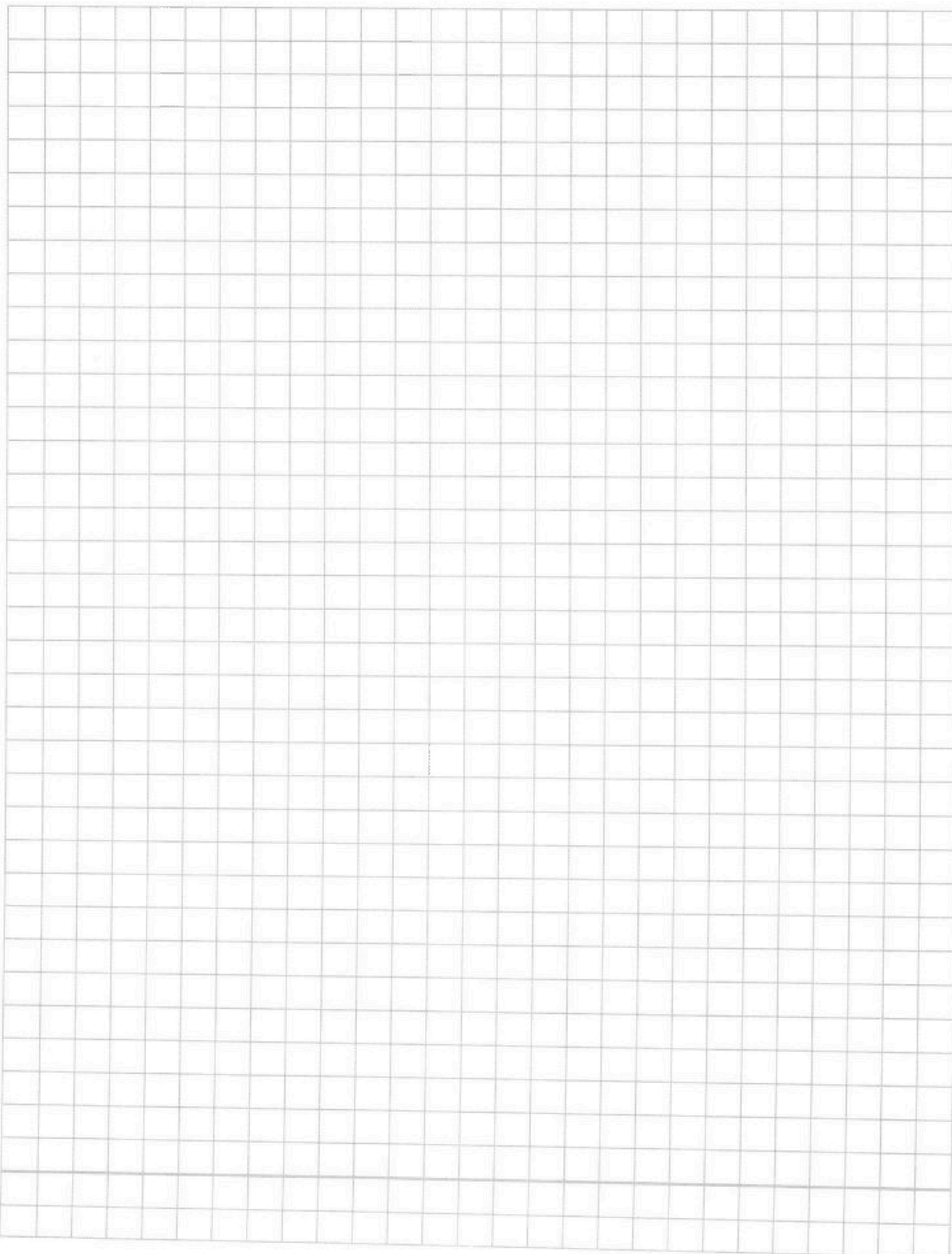


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$1) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 & (a) \\ 1-|x+y-2|=1 & (b) \end{cases} \quad \begin{matrix} d) \\ e) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)^2 = 4+2xy \\ 4 = 4+2xy \\ 2xy=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a) \\ b) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) - (x^2+y^2) = 0 \\ 4 - (x^2+y^2) = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (2, 0), (0, 2)$$

$$2) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 & (a) \\ 1-|x+y-2|=0 & (b) \end{cases} \quad \begin{matrix} d) \\ e) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \begin{matrix} I) \\ II) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) - (x^2+y^2) = 1 \\ 6 - (x^2+y^2) = 1 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \quad (x+y)^2 = 9+2xy \Rightarrow 2xy=4 \rightarrow xy=2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow (1, 2), (2, 1)$$

$$\begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} I) \\ II) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) - (x^2+y^2) = 1 \\ 2 - (x^2+y^2) = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad (x+y)^2 = 1+2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow xy=0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), (0, 1)$$

Ответ: (1, 0); (0, 1); (2, 0); (0, 2); (1, 2); (2, 1).

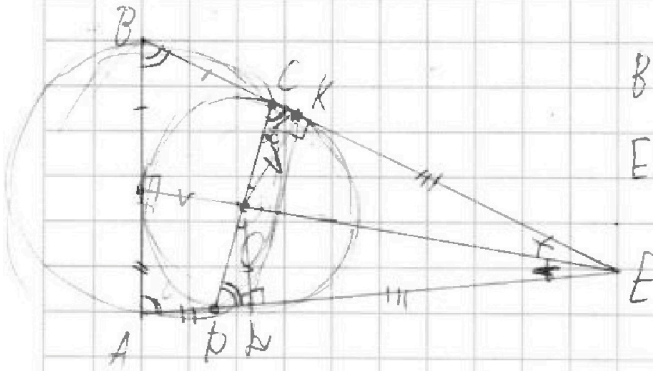
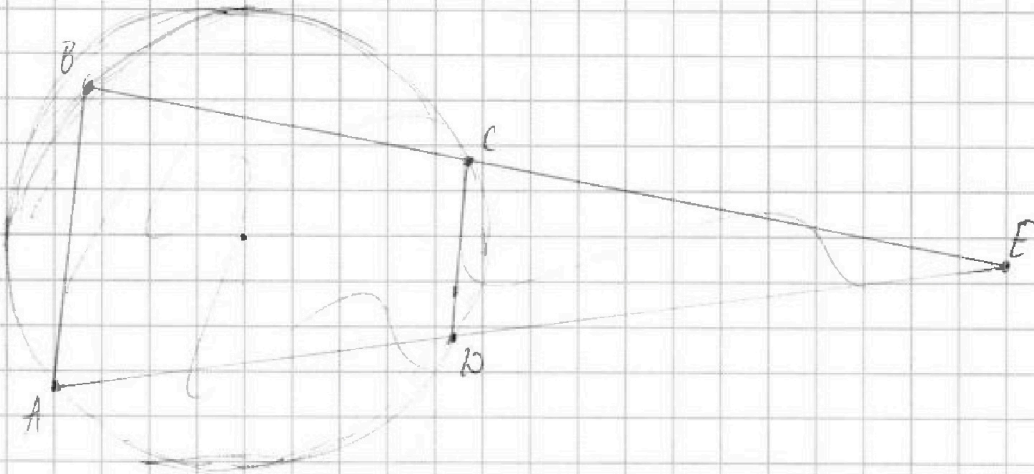


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE = 10 \quad (ED + BD)_{\text{мин.}} = ?$$

$$ED \cdot EA = EB \cdot EC$$

1   
  2   
  3

1, 2, 3, ..., 8

4   
  5   
  6

Заметим, что "8" может быть устроено, тогда "1" устроено, но

7   
  8   
  9

не перед мин. При этом перед "7" не устроено две цифры, так

перед 8-ой цифрой есть. Т.е.:

$$1) 8 \text{ на 1-ой цифре} \Rightarrow 4 \text{ на 1-ой} - 10^3 \cdot 8$$

$$2) 8 \text{ на 2-ой цифре} \Rightarrow 4 \text{ на 1-ой} - 10^2 \cdot 8$$

$$3) 8 \text{ на 3-ей цифре} \Rightarrow 4 \text{ на 1-ой} - 10^1 \cdot 8$$

6. Если цифра устроена, то 8 и 1 на 1-ой цифре или



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6:   
 1) 8 на 1 и 4 на 1  $\Rightarrow$  8 на 2, 4 на 3, 4   
 2) 8 на 1 и 7 на 2, 8 на 1  $\Rightarrow$  8 на 1, 3 на 5

В классе 1 место  $\Rightarrow$  2 разряда макс.

где  $x < y < z$ . Возьмем „a“ и „b“ и посадим на  $\Delta$  по 4 со  $\Delta$  мест.  $\lceil a > b$ . Варианты:  $(1,1) = (2,1)$



Варианты размещения „a“ и „b“:  $\frac{8 \cdot 4}{2!} = 8$  \* A

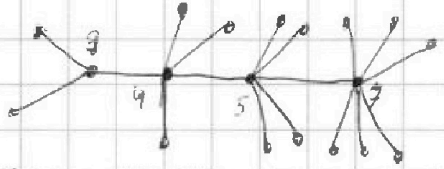
Составим таблицу всех макс. Будем считать на

2-х по рядам:  $\frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 20$  вар. Каждому вар. 2-го ряда макс. 1-го ряда макс. 2-го ряда?

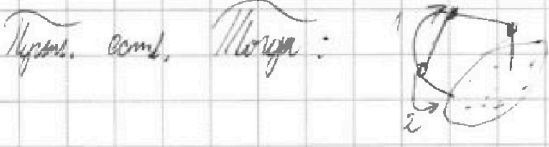
Тогда всего:  $8 \cdot 20 = 160$  вариантов.

16

и 9 точек. Макс.



Сложный граф. Заметим, что если  $q$  вершин, то  $n$  циклов. Д-во.



Добавим цикл. Значит,

Ответ: 19.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-(x+y)(x+y-2)+2xy \geq 0$$

$$2xy \geq (x+y)(x+y-2)$$

$$2(x+y) \geq (x+y)(x+y-2)+2xy-1+(x+y-2) = a-b$$

$$1) x+y \geq 2 \Rightarrow (x+y-2)(1-x-y)+2xy-1 = a-b \quad / \cdot (-1)$$

$$(x+y-1)(x+y-2)+2xy+1 = b-a \quad / -(x+y-2)$$

$$(x+y-2) - 2xy+1 = b-a-x-y+2$$

$$x^2+y^2+4+2xy - 4x-4y - 2xy+1 = b-a-x-y+2$$

$$x^2+y^2 - 4x-4y+5 = b-a-x-y \quad / +x+y$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x-3y = b-a \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$2b = x^2+y^2-3x-3y+1$$

$$2\sqrt{1-(x+y-2)} = x^2+y^2-3x-3y+1$$

$$2a = (x+y-2)(1-x-y)+2xy$$

$$2\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} = (x+y-2)(1-x-y)+2xy$$

$$2\sqrt{-(x+y)(x+y-2)+2xy} = (x+y-2)(1-x-y)+2xy \quad / \sqrt{2}$$

$$-4(x+y)(x+y-2)+4xy = (x+y-2)(1-x-y)^2 +$$

$$x+y = 1 \leq x+y \leq 3$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x=1 \text{ КЕРУ } y=1$$

$$1) x+y=1$$

$$2-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 2$$

$$y=0 \quad 1$$

$$\text{Далее } x+y=1: (1,0); (0,1)$$

$$2) x+y=2$$

$$2(x+y)-(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4$$

$$\begin{matrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$(1,1); (2,0)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} D > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow 4t^2 > 4 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Delta = (\sqrt{3}t)^2 - 4t^2 + 4 = 3t^2 - 4t^2 + 4 = -t^2 + 4 > 0 \quad / \cdot (-1) < 0$$

$$t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 > 4 \Rightarrow t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ:  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ p \in \mathbb{P} \\ a=40-b \\ a, b \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5 \\ (40-2b)^2 + 15(40-b) = 14p^5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 38 \\ \hline 304 \\ + 190 \\ \hline 1444 + 570 \\ \hline 2014 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 12 \\ \hline 34 \\ + 102 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 14p^5 \quad (40-2b)(55-2b) = 14p^5$$

$$t = 40 - 2b \quad t(t+15) = 14p^5 \quad t(t+15) = 14 \Rightarrow \begin{cases} t = 14 \quad (1) \\ t+15 = 14 \quad (2) \end{cases}$$

1)  $t = 14 \Rightarrow t+15 = p^5$

Заметим, что  $a-b \leq 38 \Rightarrow 38^2 + 15 \cdot 38 = 1794 \Rightarrow 14p^5 \leq 1794 < 2014$

Возможные значения  $p$ :  $p=2 \Rightarrow p^5 = 32 \quad 14 \cdot 32 = 544 \leq 2014$  (и.)

$$\begin{array}{r} 2014 \\ \sqrt{38} \\ \hline 293 \\ \times 7 \\ \hline 2051 \\ + 1701 \\ \hline 2493 \\ + 1151 \\ \hline 3644 \end{array}$$

$p=3 \Rightarrow p^5 = 27 \cdot 3 = 81 \quad 14 \cdot 81 = 1134 < 2014$  (и.)  $\Rightarrow p=2$

Итого:  $t(t+15) = 544$   $D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 14 = 225 - 112 = 113 = 10^2 + 13^2$

$$t^2 + 15t - 544 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{113}}{2} \quad t_1 = \frac{-15 - 10}{2} = -12.5$$

$$t_2 = \frac{-15 + 10}{2} = -2.5$$

$$t_1: 40 - 2b = -12 \quad t_2: 40 - 2b = 12$$

$$-2b = -52 \quad -2b = -28$$

$$b = 26 \Rightarrow a = 14 \quad b = 14$$

Ответ:  $a=14, b=26$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|}}{\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)}} = 1$$

$$1 - |x+y-2| \geq 0$$

$$-|x+y-2| \geq -1$$

$$|x+y-2| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2 \leq 1 \\ x+y-2 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases}$$

✓3

$$AB=CD \quad BC=12, \quad \cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$BC=12 \Rightarrow BM=MN=NC = \frac{12}{3} = 4$$

$$\triangle ACN \sim \triangle DCM, \quad k=2 \Rightarrow CD=2AC$$

Заметим,  $\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{NB} \Rightarrow AN$  - дуга  $\Rightarrow \angle CAN = \angle CAB$

Попр. косинусов:  $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle CAB \neq$

$$12^2 = AC^2 + (2AC)^2 - 2 \cdot AC \cdot (2AC) \cdot (-\frac{1}{4})$$

$$AC^2 + 4AC^2 + AC^2 = 144$$

$$6AC^2 = 144$$

$$AC^2 = 24$$

$$AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AB = 4\sqrt{6}$$

Ответ:  $AB = 4\sqrt{6}$

$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1 \quad \begin{cases} 2(x+y)-(x^2+y^2) \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x+y \geq 1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1$$

$$-2(x+y)-(x^2+y^2)+1-|x+y-2|$$

$$1 \geq 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$1 \geq \frac{1}{2}(x(2-x) + y(2-y)) \geq 0$$

$$2(x+y)-(x^2+y^2) + 1-|x+y-2| + 2\sqrt{(2(x+y)-(x^2+y^2))(1-|x+y-2|)} = 1$$

$$1) \quad x+y \geq 2 \quad 2(x+y)-(x^2+y^2) - (x+y) + 2 + 2\sqrt{(2(x+y)-(x^2+y^2))(2-(x+y))} = 0$$

$$-x^2-y^2+2xy = -2\sqrt{\dots}$$

$$\begin{aligned} 2(x+y) - x^2 - y^2 &= 2x+2y + \dots + x^2 - y^2 - 2x^2 = 2(x+y) + (x-y)(x+y) - 2x^2 = (x+y)(x-y+2) - 2x^2 \\ &= 2x+2y - (x+y)^2 + 2xy = (x+y)(x+y+2) + 2xy \end{aligned}$$