



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$x^2 + 2\sqrt{3}t \cdot x + 4t^2 - 4 = 0$$

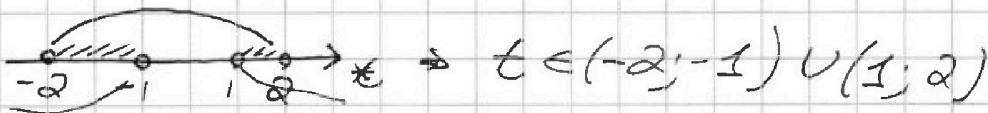
Чтобы уравнение имело 2 различных корня

$D > 0$ , для произведений корней положительного

$4t^2 - 4 > 0$  по теореме Виета.

$$\begin{cases} D > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 3t^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4t^2 + 16 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 - 4 < 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \in (-2; 2) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$



Ответ:  $(-2; -1) \cup (1; 2)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ (a-b)^2+15(a-b)=17p^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ (a-b)(a-b+15)=17p^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=40-b \\ (a-b)(a-b+15)=17p^5 \end{cases} \Rightarrow (40-b-b)(40-2b+15)=17p^5$$

$$2(20-b)(55-2b)=17p^5$$

Заметим, что левая часть выражения обязательно делится на 2 (т.к.  $a, b$  по условию натуральные)  $\Rightarrow$  правая часть тоже кратна

$$2. \quad 17 \cdot 2 \Rightarrow p^5 : 2, \text{ где } p - \text{ простое число} \Rightarrow p=2$$

$$\text{Тогда, } 2(20-b)(55-2b)=17 \cdot 2^5 \Rightarrow$$

$$(20-b)(55-2b)=17 \cdot 2^4=17 \cdot 16=272$$

$$1100 - 40b - 55b + 2b^2 = 272$$

$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$

$$2b^2 - 72b - 23b + 828 = 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2b(b-36) - 23(b-36) = 0$$

$$(2b-23)(b-36) = 0$$

$$\begin{cases} b = 36 \\ b = \frac{23}{2} \end{cases} \text{ но условие } b\text{-натуральное} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 36 \Rightarrow a = 40 - 36 = 4$$

Ответ:  $a = 4$ ;  $b = 36$ .



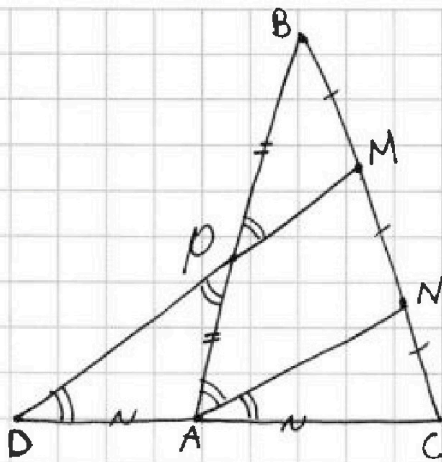


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано:

$$AB = CD$$

$$BM = MN = NC$$

$$BC = 12$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

AB - ?

1) По теореме Палеса, т.к.  $MD \parallel AN$ , то

$$\frac{CA}{AD} = \frac{CN}{AN} = \frac{1}{1} \Rightarrow CA = AD, \text{ аналогично, } BP = PA.$$

$$2) AB = CD; AB = AP + PB = 2 \cdot AP; CD = AD + AC = 2AD. \Rightarrow 2AP = 2AD \Rightarrow AP = AD \Rightarrow$$

$$AP = PB = AD = AC = \underline{x}. \Rightarrow AB = 2x; AC = x;$$

3)  $AD = AP \Rightarrow \triangle PDA$  - равнобедренный  $\Rightarrow \angle ADP = \angle APD.$

$\angle APD = \angle BPM$  (как вертикальные);  $\angle BPM = \angle BAN$  (из

парал.  $MD$  и  $AN$ ).  $\Rightarrow$  т.к.  $\angle CAN = \angle PDA$  (из парал.  $MD$  и  $NA$ ), то  $\angle CAN = \angle BAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN.$

$$4) \text{ По условию } \cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}.$$

5) Тогда, по теореме косинусов для  $\triangle ABC.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$CB^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(\angle BAC) =$$
$$= 5x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 5x^2 + x^2 = 6x^2 = 12 \Rightarrow \underline{x = \sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$x = -\sqrt{2}$$

возвращает только  $x = \sqrt{2}$ , т.к.  $x$  — сторона  
треугольника.  $\Rightarrow AB = 2x = 2\sqrt{2}$ .

Ответ:  $2\sqrt{2}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Заметим, что если самый широкий (обозначим его 1) сидит на первом ряду, то перед ним должно быть лучше место, чтобы он видел, тогда в (самый высокий) обязательно должен сидеть на 3, чтобы не мешало другим.

Если 1 сидит на 1 ряду, то ~~самый~~ <sup>восьмой</sup> может сидеть на 1, 2 и 3 рядах.  $\Rightarrow$  посадим самого широкого и высокого:  $6 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 42$  варианта





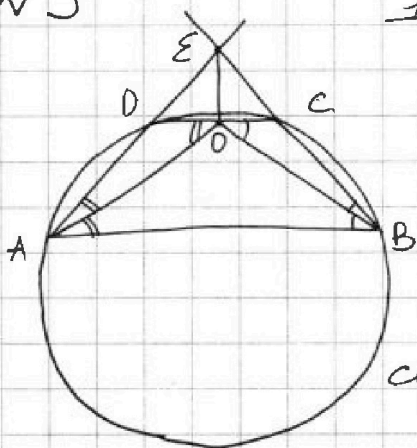
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5



1.) Т.ч.  $ABCD$  вписанный, то

$$\angle EDC = \angle EBA; \angle EAB = \angle ECD$$

2.) Т.ч. центр впис. оцр - точка

пересек биссектрис, то биссектри-

сы  $\angle A$  и  $\angle B$  пересекаются на

стороне  $CD$  в точке  $O$ .

3.) Известно, что  $EB = 10$ , тогда мин значение

$ED + DO$  будет возможно, если  $CD \parallel AB$ , то

если  $ABCD$  - трапеция, но т.к. вписана во внеш-

ность, то равнобокая.  $CD \parallel AB \Rightarrow \angle OAB = \angle OAD =$

$= \angle DOA$  (уг. нар.);  $\angle OBA = \angle OBC = \angle COB$ , но тогда

$$AB = CD = DO = OC.$$

4.) Т.ч. равнобокая трапеция, то  $BE = EA = 10$

$$\neq ED + DO = ED + AD = EA = BE = 10 \Rightarrow ED + DO = 10$$

Ответ: 10.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

1) По условию из любой вершины можно добраться в любую другую, значит, если представить систему дорог и деревьев ~~в~~ в виде графа, где вершины - деревья, а ребра - дороги, то граф должен быть связным.

2) По условию можно добраться только по 1 маршруту  $\Rightarrow$  в графе нет циклов, потому что, если есть цикл, то в нем из одной вершины можно попасть в другую 2 способами, если идти с разных сторон.



3) Т.к. граф связный и без циклов, то он является деревом.

4) Рассмотрим весь граф. У него есть вершины степени 1. Тогда, т.к. есть только вершины





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

степеней  $1; 3; 4; 5; 7$ , то вершина степени один может быть соединена ребром (дорогой) только с вершиной степени  $3; 4; 5; 7$ . (ровно 1 из них)  
5) Пусть есть  $n$  деревьев с 1 дорогой  $\Rightarrow n$  вершин степени 1.

6) Из графа уберем все вершины степени 1 с ребрами, то есть из графа уберем  $n$  ребер. Тогда, останется только  $\approx 4$  вершины, исходные степени которых были  $3; 4; 5; 7$ .

7) Докажем, что в получившемся графе 3 ребра. Т.к. изначальный граф дерево, то если уберем высоту вершины, то все еще дерево. Но вершины степени 1 являются высотой  $\Rightarrow$  оставившийся граф на 4 вершинах дерево  $\Rightarrow 3$  ребра.

8) Найдем исходной количеством ребер.

Вершин:  $n + 4 \Rightarrow$  ребер  $n + 3$ .

Или другим способом:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(7+4+3+5) - 3$  т.к. 3 ребра, между смежными 3; 4; 5; 7 отнимаем по 2 раза, значит

$$(7+8+4+5) - 3 = n + 3$$

$16 - 3 = n \Rightarrow n = 13$ , значит 13 деревьев с 1 дорогой и 4 из условия  $\Rightarrow$  всего 17.

Ответ: 17 деревьев.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7

Из условия  $x, y$  - целые  $\Rightarrow$  т.ч. в обоих подкоренных выражениях целые коэф., то подкоренные выражения могут принимать только целые значения больше 0, то есть  $0; 1; 2; \dots$ . Но если хотя бы одно из подкоренных выражений  $\geq 2$ , то в сумме может получиться 1, то даже  $\sqrt{2} \approx 1,4 > 1$ , а прибавив еще одно неотрицательное число мы не получим 1. Тогда есть 2 варианта:

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ 1-|x+y-2|=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 \\ 1-|x+y-2|=0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ 1-|x+y-2|=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ |x+y-2|=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ \begin{cases} x+y-2=0 \\ -x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ y=2-x \end{cases} \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 2x + 2(2-x) - x^2 - (2-x)^2 = 0$$

$$2x + 4 - 2x - x^2 - 4 - x^2 + 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=2 \\ x=2 \rightarrow y=0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 - |x+y-2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ |x+y-2| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1) x+y-2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2=1 \\ x=3-y \Rightarrow \end{cases}$$

$$2(3-y) + 2y - y^2 - (3-y)^2 = 1$$

$$6 - 2y + 2y - y^2 - 9 - y^2 + 6y = 1$$

$$-2y^2 + 6y - 3 = 1$$

$$-2y^2 + 6y = 4$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y-2)(y-1) = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2 \rightarrow x=1 \\ y=1 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

$$2) -x-y+2=1$$

$$-y+1=x \Rightarrow 2(1-y)+2y-y^2-(1-y)^2=1$$

$$2-2y+2y-y^2-1-y^2+2y=1$$

$$-2y^2+2y=0$$

$$y^2-y=0$$

$$y(y-1)=0$$

$$\begin{cases} y=0 \rightarrow x=1 \\ y=1 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

Проверка: т.к. выражение симметрично относительно  $x$  и  $y$ , то

проверим по той же паре  $(0;1)$   $(1;0)$  и  $(0;2)$   $(2;0)$

и  $(2;1)$   $(1;2)$

$$0;1: \sqrt{2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 0 - 1} + \sqrt{1 - |0 + 1 - 2|} = \sqrt{1} + \sqrt{0} = 1$$

$$0;2: \sqrt{2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 4 - 0} + \sqrt{1 - |0 + 2 - 2|} = \sqrt{0} + \sqrt{1} = 1$$

$$1;2: \sqrt{2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 - 4} + \sqrt{1 - |1 + 2 - 2|} = \sqrt{1} + \sqrt{0} = 1$$

Все подходит Ответ:  $(0;1)$ ;  $(1;0)$ ;  $(0;2)$ ;  $(2;0)$   
 $(1;2)$ ;  $(2;1)$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+y-2 \geq 0$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-x-y+2} = 1$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{-x-y+1} = 1$$

$$(-x-y+1)^2 = x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$$

$$\sqrt{-a^2+1+2xy} + \sqrt{a} = 1$$

$$\begin{cases} -x-y+1 \geq 0 \\ x+y-2 \geq 0 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y \end{cases}$$~~

$$\begin{matrix} 1 & -2/3 \\ 8 & -3 \end{matrix}$$

~~$$-2 \geq 0$$~~

$$x+y-2 \geq 0 \quad 8 - 1/2$$

$$\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-y+2 \geq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$1 - 1$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 8 \end{matrix}$$

$$1 \geq 0 \quad W$$

$$\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix}$$

$$1 - 2/3 p \rightarrow 8 - 3p$$

$$\begin{matrix} 12 & \square & 32 \\ \square & \square & 8 \end{matrix}$$

по сар 2  $\rightarrow 6 \cdot 3 = 18$  вар.

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 3 \\ \square & \square & 8 \end{matrix}$$

для 2-вар  
для 3-4 вар.

$$\begin{matrix} \square & \square & 8 \end{matrix}$$



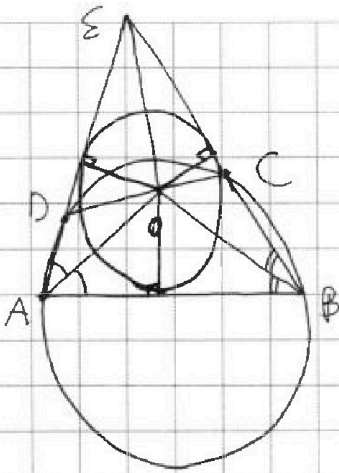


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$3+4+5+4+5=$$

$$= 217$$

$$20+3+4+4= 31$$

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





