МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

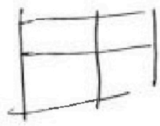
$x^2 + 6x + 8 = 0$
$D = 36 - 32 = 2^2$
$\frac{6-2}{2} = 4$
$\frac{6+2}{2} = 8$

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 12$, $\cos(2\angle \cancel{CEM}) = -\frac{1}{4}$.
CAN

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):



- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Если трехчлен имеет 2 действительных корня, то его дискриминант > 0

Давайте найдем дискриминант данного трехчлена.

$x^2 + 2\sqrt{3}t\,x + 4t^2 - 4 = 0$

$D_{\text{дискриминант}} = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(1\cdot(4t^2-4)) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$

$D > 0 \Rightarrow 16 - 4t^2 > 0 \;/ :4$ ($4 > 0 \Rightarrow$ знак не меняется)

D = дискриминант

$4 - t^2 > 0$

$4 > t^2 \Rightarrow 2 > |t| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 > t, \text{ при } t \geq 0 \\ -2 < t, \text{ при } t < 0 \end{array}\right.$

Если произведение корней трехчлена положительное, то оба его корня одного знака ($4 \neq 0$, очевидно)

~~Если оба корня (x_1 и x_2) больше 0:~~

Вспомним формулу нахождения корней $x_{1,2} = \dfrac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4ac}$

~~В нашем тре~~ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a, b, c коэффициенты при x^2, x^1 и x^0 соответственно

$a = 1 \quad b = 2\sqrt{3}t \quad c = 4t^2 - 4$

если $t \geq 0$, то $b = 2\sqrt{3}t \geq 0 \Rightarrow -b = -2\sqrt{3}t \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} < 0$ ранее мы сказали, что оба корня должны быть одного знака, сейчас мы доказали, что при положительном t один из корней отрицательный $\Rightarrow$ другой корень тоже отрицательный $\Rightarrow$

$\sqrt{D} > 0$ т.к. $D > 0$ $\sqrt{D} \geq 0$

(где $a = 1 > 0$, $2a = 2 > 0$, $-b < 0$, $\sqrt{D} > 0 \Rightarrow -\sqrt{D} < 0$)

$\dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} < 0$ $\quad 2a = 2\cdot 1 = 2 > 0$

$\Rightarrow -b + \sqrt{D} < 0 \Rightarrow b > \sqrt{D} \Rightarrow b > \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\boxed{\Rightarrow}$ чтобы не путать с знаками неравенств, я последовательно в прямоугольник

$b > \sqrt{b^2 - 4(1\cdot(4t^2-4))}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $b > \sqrt{b^2 - 4\cdot 4(t^2-1)}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\sqrt{b^2} > \sqrt{b^2 - 16(t^2-1)}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $-16(t^2-1) < 0 \Rightarrow 16(t^2-1) > 0 \Rightarrow t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow$

$t > 1$ (т.к. t в этом случае > 0) $\Rightarrow$

если $t > 0$, то $2 > t > 1$

Теперь разберем второй случай

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

если $t<0$, то $b=2\sqrt{3}\,t<0 \Rightarrow -b=-2\sqrt{3}\,t>0 \Rightarrow$

при $t<0$ один из корней больше $0 \Rightarrow$

$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}>0$ $\boxed{\Rightarrow}$ т.к. оба корня должны быть одного знака, то второй корень тоже больше $0 \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{где } \sqrt{D}>0 \\ -b>0 \\ 2a>0 \end{cases}$ (т.к. $a=1$, $2a=2>0$)

$\sqrt{D}>0$ т.к. $D>0$ $\begin{cases} \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}>0 \\ 2a=2\cdot1=2>0 \end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $-b-\sqrt{D}>0$ $\boxed{\Rightarrow}$

$(-b)^2=|b|^2=b^2$

при $b<0$ $\sqrt{b^2}=-b$

$\boxed{\Rightarrow}$ $-b-\sqrt{b^2-4ac}>0 \Rightarrow -b>\sqrt{b^2-4ac} \Rightarrow$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\sqrt{b^2}>\sqrt{b^2-4\cdot4(t^2-1)}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\sqrt{b^2}>\sqrt{b^2-16(t^2-1)}$ $\sqrt{b^2}>\sqrt{b^2-4\cdot1\cdot(4t^2-4)}$ $\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $16(t^2-1)>0$ $\boxed{\Rightarrow}$ $t^2-1>0$ $\boxed{\Rightarrow}$ $t^2>1$ $\boxed{\Rightarrow}$

т.к. $16>0$ можно сократить без изменения знака

$\boxed{\Rightarrow}$ $|t|>1$ т.к. $t<0$, то $t<-1$ (обе части домножили на $-1 \Rightarrow$ знак поменяли на обратный)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 2>t>1, \text{ при } t>0 \\ -2<t<-1, \text{ при } t<0 \end{array}\right.$

Ответ: ~~квадратная скобка значит или.~~

$(-2;-1)\cup(1;2)$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5 \end{cases} \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$\begin{cases} a+b=40 \Rightarrow b=40-a \\ a^2-2ab+b^2+15a-15b=(a-b)^2+15(a-b)=(a-b)(a-b+15)=17p^5 \end{cases}$$

произведем замену $b=40-a$

$$17p^5=(a-b)(a-b+15)=(a-(40-a))(a-(40-a)+15)=(2a-40)(2a-40+15)$$
$$=2(a-20)(2a-25)$$

заметим, что $2(a-20)(2a-25) \vdots 2 \Rightarrow 17p^5 \vdots 2$

$17 \not\vdots 2 \Rightarrow p^5 \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2$ p - простое $\vdots 2 \Rightarrow p=2$

$$2(a-20)(2a-25)=17\cdot 2^5 \quad /:2$$

$$(a-20)(2a-25)=17\cdot 2^4$$

заметим, что $2a-25$ — нечётное число, т.к. $2a$ - четное, 25 - нечетное

чётно - нечетное = нечетное

$2a-25 \not\vdots 2 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} 2a-25=17 \\ 2a-25=-17 \\ 2a-25=1 \\ 2a-25=-1 \end{array}\right.$$

Другими числами $2a-25$ быть не может, т.к. другие числа имеют в разложении множители, отличные от 17, 1, -1, на которые $17\cdot 2^4$ не делится (такого быть не может)

если $2a-25=17$

$2a=25+17=42$

$2a=42 \Rightarrow a=21 \Rightarrow (a-20)(2a-25)=(21-20)(42-25)=17 \neq 17\cdot 2^4$

противоречие $2a-25 \neq 17$

если $2a-25=-17$

$2a=25-17$

$2a=8 \Rightarrow a=4$

$(a-20)\cdot(2a-25)=(4-20)\cdot(8-25)=-16\cdot -17=16\cdot 17=2^4\cdot 17$

$a=4$ нам подходит

$b=40-a \Rightarrow b=36$

$b=40-4$

$(a;b)=(4;36)$

если $2a-25=-1$

$2a=25+(-1)=24 \Rightarrow a=12$

$(a-20)(2a-25)=(12-20)\cdot(-1)=(-8)\cdot(-1)=8 \neq 17\cdot 2^4$

не подходит $2a-25=-1$

если $2a-25=1$

$2a=25+1=26 \Rightarrow a=13$

$(a-20)(2a-25)=(13-20)\cdot 1=7\cdot 1=7 \neq 17\cdot 2^4$

Нам подходит только пара чисел $a=4$ $b=36$

Ответ: $a=4$; $b=36$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

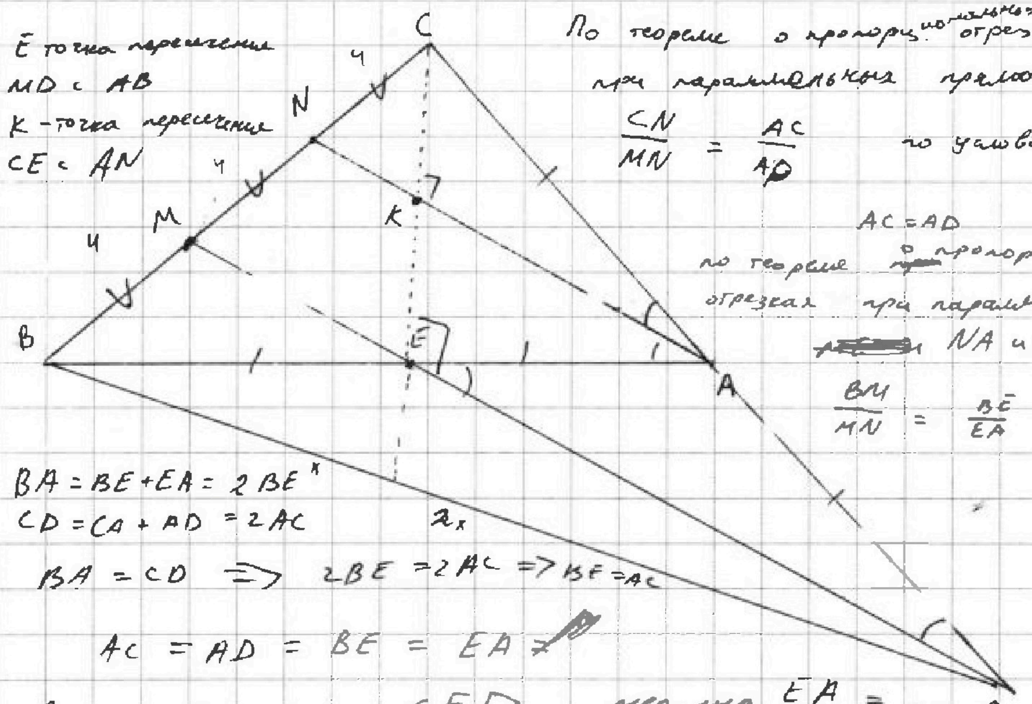
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

E точка пересечения MD с AB

K – точка пересечения CE с AN



По теореме о пропорциональных отрезках ~~при~~ при параллельных прямых AN и MD

$\frac{CN}{MN} = \frac{AC}{AD}$ по условию $CN = MN \Rightarrow$

$\frac{CN}{MN} = 1 = \frac{AC}{AD} \Rightarrow$

$AC = AD$

по теореме ~~при~~ о пропорциональных отрезках при параллельных прямых ~~[illegible]~~ NA и MD

$\frac{BM}{MN} = \frac{BE}{EA}$ $BM = MN$ по условию $\Downarrow$

$\frac{BM}{MN} = 1 = \frac{BE}{EA}$

$\Downarrow$

$BE = EA$

$BA = BE + EA = 2BE$

$CD = CA + AD = 2AC$

$BA = CD \Rightarrow 2BE = 2AC \Rightarrow BE = AC$

$AC = AD = BE = EA$

в треугольнике CED медиана EA = половине стороны к которой проведена $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\triangle CED$ – прямоугольный $\angle CED = 90^\circ$ (т.к. из этого угла медиана $= \frac{1}{2}$ стороны)

$\angle CKN = \angle CED$ т.к. это накрест лежащие углы при $AN \parallel MD$ (по условию) параллельных прямых AN и MD и секущей CE $\Rightarrow$

$\angle CKN = \angle CED = 90^\circ \Rightarrow$ AK – высота $\triangle CAE$

~~по теореме о пропорциональных отрезках при~~ ~~по [illegible]~~

$AC = AE \Rightarrow \triangle CAE$ равнобедренный $\Rightarrow \angle CAN = \angle NAE$

$\Rightarrow \angle CAB = 2\angle CAN$

$\angle CAN = \angle CDM$ (~~[illegible]~~ углы при параллельных прямых AN и MD и секущей CD)

~~$\angle AED = \angle NAE$~~

$\angle AED = \angle NAE$ (углы при параллельных прямых MD и AN и секущей AE)

$BM = MN = NC = \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$

~~$\angle CAB = \angle CBA = \angle CBE = \angle CAN$~~ ~~$\angle CEB = 90^\circ \Rightarrow CE$ медиана и высота~~

~~$\angle CBA = 180 - \angle CAB$~~

~~$BC \cdot \cos(2\angle CAN) = BE = \frac{1}{2}AB$ $AB = 2BC \cdot \cos(2\angle CAN)$~~

~~$AB = 24 \cdot 12 = \frac{1}{6}$~~

~~$\Rightarrow \cos(2\angle CAN) \cdot AB = 0$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Давайте X отмечать место, где никто не сидит, такое место ровно 1, т.к. посадочных мест $= 3 \cdot 3 = 9$, а учеников 8 человек $9 - 8 = 1$

Давайте посчитаем, сколькими способами мы можем оставить свободным место в первом ряду. Всего в первом ряду 3 места, значит X на одном из 3 мест

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{столбец I} & \text{столбец II} & \text{III} \\ \hline \text{ряд} & X & \cdot & \cdot \\ \text{ряд} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ряд} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

(схема посадочных мест (где X в первом ряду, не умаляя общности выбрали это место)

Заметим, что если мы выбираем из 8 человек двух людей, то по росту их можно распределить лишь одним способом, так, чтобы впереди ~~б~~ более высокого был более низкий

Значит людей в ~~I ряд~~ столбец, где X) мы можем выбрать C_8^2 способами. Осталось 6 мест. Заметим, что если мы выберем трех человек, то по увеличению росту распределить их можно 1 способом, а оставшиеся 3 человека $8 - 2 - 3 = 3$ в 3 ~~ряду~~ столбце, также рассаживаются по росту единственным способом

$\Rightarrow$ чтобы рассадить 6 человек по 2 ~~рядам~~ столбцам, нужно выбрать 3 человек, которые будут сидеть во II, это можно сделать C_6^3 способами

Заметим, что на каждую пару людей выбранных в первом действии есть C_6^3 вариантов расадки оставшихся людей, а также вариантов выбрать ~~ряд~~ столбец в котором X – 3 способа $\Rightarrow$ вариантов когда X в первом ряду

$= 3 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3$

(человек позади X хорошо видит доску, поэтому может быть любым, но не выше, чем позади него)

(ряд – горизонтальные, столбец – вертикальный)

Заметим, что если X в 3 ряду, то вариантов выбрать столбец, где пустое место также 3, вариантов выбрать 2 человек перед X C_8^2 (они в ~~ряду~~ рассаживаются перед X единственным образом, чтобы всем было видно, по росту), а рассадить 6 ~~людей~~ человек в оставшиеся 2 столбца C_6^3 (объясняла в разборе прошлого случая)

кол-во вариантов расадки, если X в третьем ряду $= 3 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X & \cdot & \cdot \end{array}$$

Если X во втором ~~ряду~~ ряду. Заметим, что человек позади X может быть любого роста, по условию ему хорошо будет видно, т.к. парта перед ним пуста. А также человек ~~[illegible]~~ пере ~~х~~ пустого места видит хорошо, т.к. он на первой парте. Значит вариантов, какой человек сидит перед x — 8 шт, позади x — ~~[illegible]~~ $8-1=7$ шт. (-1, т.к. один человек уже сидит перед x и не может быть в 2 ~~в~~ местах одновременно) людей в оставшиеся 2 столбца (в которых нет пустого места) мы умеем рассаживать C_6^3 способами (объясняла в 1 случае). Вариантов выбрать столбец, где находится x — 3 шт. $\Rightarrow$

кол-во ~~[illegible]~~ рассадок, если пустое место в 2 ряду $= 3\cdot 8\cdot 7\cdot C_6^3$

всего рассадок: $\underbrace{3\cdot C_8^2\cdot C_6^3}_{\text{если пустое в 1 ряду}} + \underbrace{3\cdot C_8^2\cdot C_6^3}_{\text{если пустое в 3 ряду}} + \underbrace{3\cdot 8\cdot 7\cdot C_6^3}_{\text{если пустое во 2 ряду}}$

$$= \frac{3\cdot 8\cdot 7\cdot C_6^3}{2} + \frac{3\cdot 8\cdot 7\, C_6^3}{2} + 3\cdot 8\cdot 7\, C_6^3 = 3\cdot 8\cdot 7\left(\frac{C_6^3}{2}+\frac{C_6^3}{2}+C_6^3\right) =$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot\ 8 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$= 3\cdot 8\cdot 7\,(C_6^3 + C_6^3) = 3\cdot 8\cdot 7\cdot 2C_6^3 = 6\cdot 7\cdot 8\, C_6^3 = 336\, C_6^3$$

Ответ: ~~[illegible]~~ $336\, C_6^3$ вариантов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Ан догов~~ Давайте представим задачу в виде графа, где вершины - деревни, ребра - дороги между деревнями. Заметим, что между любыми двумя деревнями есть ~~путь~~ маршрут (можно както из одной прийти в другую) => граф связной. Заметим, что между двумя деревнями есть равно 1 маршрут => нет циклов => этот граф - дерево (связной граф без циклов)

В дереве количество ребер на 1 меньше количества вершин => если n деревень, то $n-1$ дорога - ребро. Также ребра можно посчитать как половину степеней вершин (выходящих дорог из деревни)

кол-во ребер $= n-1$

кол-во ребер $= \dfrac{3+4+5+7+\underbrace{(n-4)\cdot 1}_{\text{кол-во деревень из которых выходит 1 дорога}}}{2}$

$n-1 = \dfrac{3+4+5+7+n-4}{2}$

$\boxed{\text{кол-во} = \text{количество}}$

$n-1 = \dfrac{15+n}{2} \quad / \cdot 2$

$2n-2 = 15+n$

$n = 17$ Ранее мы говорили, что в нашем графе n - вершин => кол-во деревень на о-тров $n = 17$

Ответ: 17

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x, y > 0$, ~~т.к.~~ $\cancel{x}$

предположим противное $x<0$ $y<0$ $\Rightarrow$

$2x < 0$ $2y < 0$ $x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0$

$y^2 > 0 \Rightarrow -y^2 < 0$

$2x - x^2 + 2y - y^2 < 0 \Rightarrow$ корень не возможно извлечь $\Rightarrow$

$x; y \geq 0$

$|x+y-2| < 1$ иначе $\sqrt{1-|x+y-2|} < 0 \Rightarrow$ корень не извлечь

$2x + 2y - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x+y) \geq x^2 + y^2$

мы знаем, что $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow$

$2(x+y) \geq 2xy$

$x+y \geq xy \Rightarrow$ x или $y < 1$

при парах $(1;0)$, $(0;1)$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = \sqrt{2-1} = 1$

$\sqrt{1-|x+y-2|} = \sqrt{1-1} = 0$

$\Rightarrow$ их сумма $= 1$

при парах $(2;0)$ $(0;2)$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = \sqrt{4-4} = 0$

$\sqrt{1-|x+y-2|} = \sqrt{1-0} = 1$

$\Rightarrow$ их сумма $= 1$

сумма 2 таких корней $= 1$ только если один из них равен 1, а другой 0, если $x+y = k$, то $y = k - x$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = \sqrt{2x+2(k-x)-x^2-(k-x)^2} = \sqrt{4kx-2x^2} = \sqrt{2x(2k-x)}$

$\sqrt{1-|x+y-2|} = \sqrt{1-|x+k-x-2|} = \sqrt{1-|k-2|}$ раскрыли скобки

т.к. x и y целые k тоже целое ~~т.к. сумма~~ поэтому $4kx - 2x^2$ — целое $1-|k-2|$ целое если эти корни будут иррациональны, то их сумма не будет равна целому числу $\Rightarrow$ их значения 2 целых числа не больше 1, т.к. корни положительное число

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

и если хотя бы 1 корень будет >1, то сумма >1 противоречие $\Rightarrow$

1 из корней $=1$, другой $=0$

если $x=2$, $y=1$ или наоборот

$\sqrt{2\cdot2+2\cdot1-2^2-1^2}=\sqrt{4+2-4-1}=1$.

если $\sqrt{1-|k-2|}=0$ то

$1=|k-2| \Rightarrow k=3$ или $k=1$

если x или $y=3$ то второй $=0$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}=\sqrt{6-8}=\sqrt{-2}$ нет в $\mathbb{R}$

если x или $y=2$ а другой $=1$

но тогда ~~одно из них~~ ~~хотя бы~~ сумма во втором корне $=1$ только если $x=2$, $y=1$ или $x=1$, $y=2$ ~~противоречие~~

3 из 2 целых чисел ≥ 0

$3=2+1$, $3=3+0$ больше вариантов нет

$k=x+y$

если $\sqrt{1-|k-2|}=1$

$|k-2|=0$

$\Downarrow$

$k=2$ $k=x+y$

$x=y=1$

тогда

$2x+2y-x^2-y^2=$

$2+2-1-1=2\neq0$

противоречие

$x=2$ $y=0$ или $x=0$ $y=2$

выше показали, что подходит

тогда $x+y=1$

$\Downarrow$

$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ или $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

$\Downarrow$ мы доказали, что подходит только

$\boxed{\begin{matrix}x=2\\y=0\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}x=0\\y=2\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}x=1\\y=0\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}x=0\\y=1\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

при $t > 0$ $\qquad -b - \sqrt{D} < 0$

$2\sqrt{3}\,t = b > 0 \qquad 2\sqrt{3}\,t > \sqrt{D} \qquad -b +$

$b > \sqrt{b^2 - 16(t^2-1)} \qquad 2 > |t| > 1$

$16(t^2-1) > 0 \Rightarrow t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t^2 > 1$

при $t < 0$

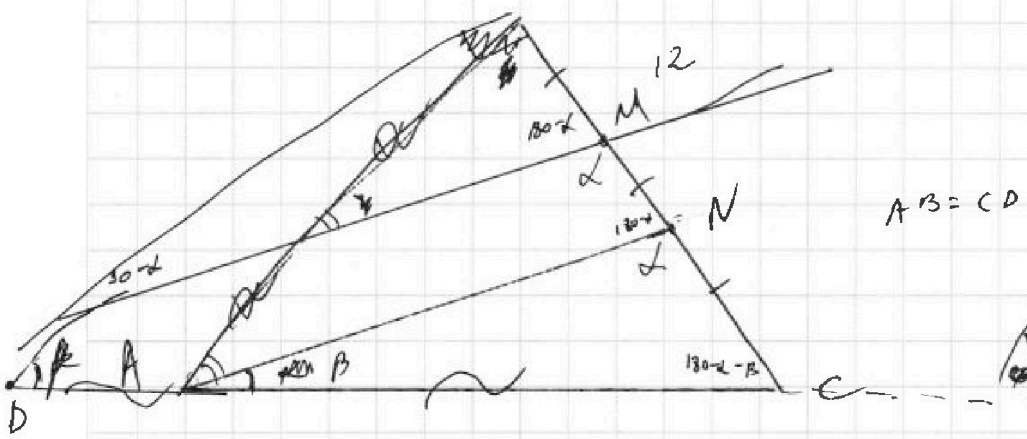
$2\sqrt{3}\,t = b < 0 \qquad -b + \sqrt{D} > 0$

$-b - \sqrt{D} > 0$

$|b| > \sqrt{b^2 - 16(t^2-1)}$

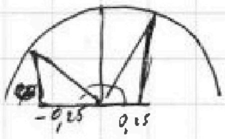
$3 + 4 + 5 + 4 = 16 \qquad 16/31$

$3 + 4 + 5 + 5 + 5 + 4 + 5 = 31$

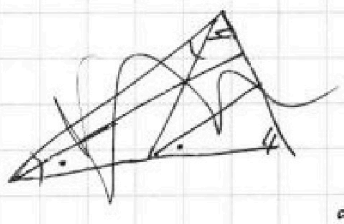


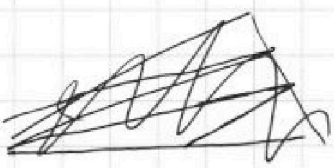
$AB = CD$

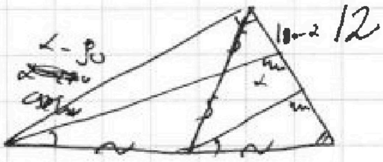
$\frac{1}{4}$

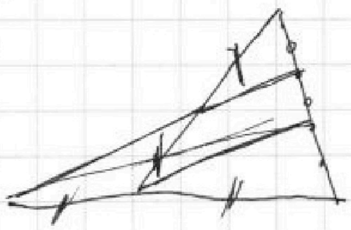


$\frac{1}{2}$ 30









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$1 \geq \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \geq 0$

$2xy \leq x^2+y^2 \leq 2(x+y)$

$x+y > xy$

$1 \geq 2(x+y) - x^2 - y^2$

$x+y \geq 2$

$\sqrt{x(2-x)} + \sqrt{y(2-y)} + \sqrt{\ldots}$

$x^2 > 2x$

$x > 2$

$3 \geq x \geq 0$

$2 \geq x \geq 0 \quad 2 \geq y \geq 0$

$1 \geq \sqrt{1-|x+y-2|} \geq 0$

$1 \geq |x+y-2| \geq 0$

если $x+y-2>0$ если $x+y-2<0$

$x+y>2$ $x+y<2$

$2(x+y) - x^2 - y^2$

$x+y=1$

$x+y=2$?

$2x+2(k-x) - x^2 - (k-x)^2 =$

$= 2x + 2k - 2x - x^2 - k^2 + 2kx - x^2 =$

$x+y<2$

$x+y<1$

$2x+4-2x-x^2-4+4x-x^2$ $4kx - 2x^2 = 2x(2k-x)$

$= 4x - 2x^2 = 2x(2-x)$

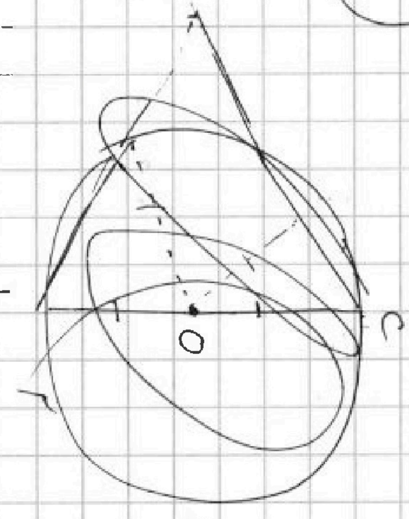
$= 2xy$

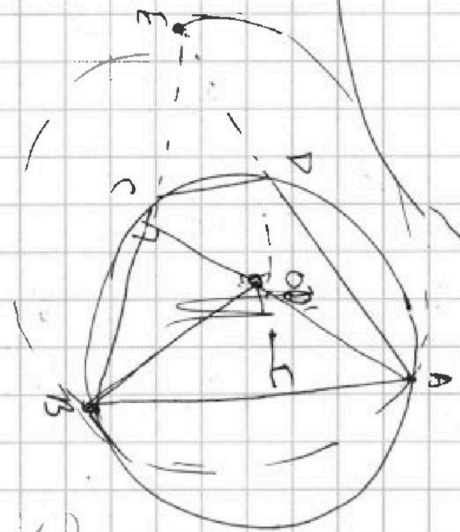
$\sqrt{2xy} + \sqrt{1}$

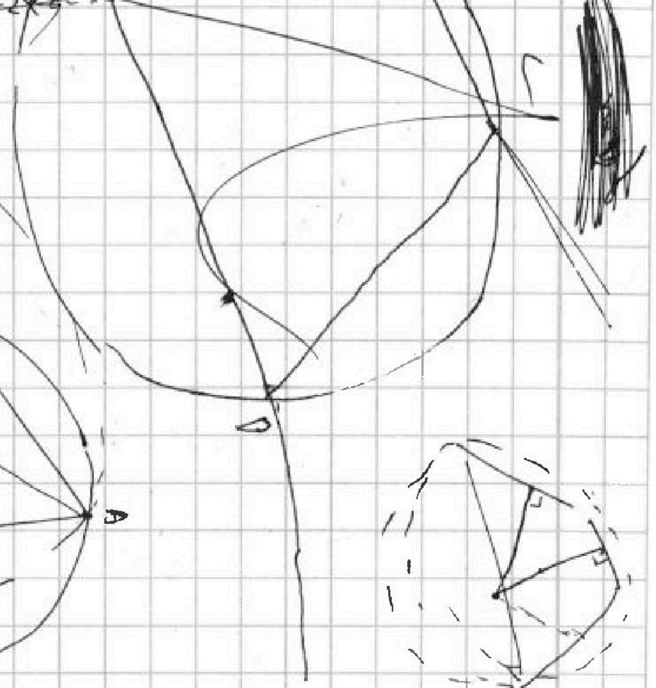
x или $y=0$ другой 2

$\sqrt{1-|k-2|} + \sqrt{2x(2k-x)} = 1$

$1-|k-2| + 2x(2k-x) = 1$







$(2;0)$ $(0;2)$

10   01

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}\,tx + 4t^2 - 4 = 0$ 2 действ. корня, $x_1 \cdot x_2 > 0$

$D > 0$

либо $x_1, x_2 < 0$

$x_1, x_2 > 0$

$(2\sqrt{3}t)^2 - (4t^2 - 4)\cdot 4 > 0$

$12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$

$x_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}t + 2\sqrt{(2-t)(2+t)}}{2}$

$16 - 4t^2 > 0$

$16 - 4t^2 = 4^2 - (2t)^2 = (4-2t)(4+2t) = 4(2-t)(2+t)$

$4 - t^2 > 0$

$x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}t + 2\sqrt{(2-t)(2+t)}}{2}$

$4 > t^2$

$2 > |t|$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{12t^2 + 4(2-t)(2+t) - 8\sqrt{3(2-t)(2+t)}}{4}$

$t^2 =$

$\frac{-7-\sqrt{241}}{2}$, $\frac{\sqrt{241}-7}{2}$

$x_1 x_2 = 3t^2 + 4^2 - t^2 - 2\sqrt{3\cdot 4^2 - t^2}$

$x_1 x_2 = 4^2 + 2t^2 - 2\sqrt{3\cdot 4^2 - 3t^2} > 0$

$\frac{\sqrt{241}-7}{2} > 15{,}0$

$15 -$

$2 + t^2 > \sqrt{3\cdot 4^2 - 3t^2}$

44 $x = t^2$

$2 + x > \sqrt{3\cdot 4^2 - 3x}$

$x^2 + 4x + 4 > 3\cdot 4^2 - 3x$

$x^2 + 7x - 3\cdot 4^2 > 0$

$D = 49 + 48\cdot 4 = 241$

$16 \cdot 3 = 48$, $48 \cdot 4 = 192$, $192 + 49 = 241$

выбрать 3 $x_1 = \frac{-7-\sqrt{241}}{2}$ не подходит

$x_2 = \frac{\sqrt{241}-7}{2}$

если мы выбираем пару, ост. выбираем

y

x

h 6 любой

60 C_5^2

a b c d e

$1+2+3+4 = 10$

C_5^2

b c d e f g h

$h \cdot 2$ ← зрея нет g, f

$x \cdot 2$

$7 \cdot 2$ любой

$7\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

(h на первом разу)

выбрать 3

$7 \cdot 2$

$h \cdot 2$

$x \cdot 2$

$7\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

h на втором

выбрать 3

d d 2 a

x e 2 b

h f 2 c

h на последнем

g на первом

$8 \cdot 3$

h 6 любой

можно a_3 любой в любую ⇒ связно

нельзя добраться > чем 1 путем ⇒ вершин на 1 меньше, чем дорог

в 6 задаче нет циклов ⇒ это дерево

городов

$\underbrace{n-1}_{\text{дорог}} = \dfrac{3+4+5+7+n-4}{2} = \dfrac{n+5}{2} = n-1$

$n + 5 = 2n - 2$

$7 = n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a+b=40$ $\quad b=40-a$

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5$

$(a-b)^2+15(a-b)=17p^5$

$(a-b)(a-b+15)=17p^5$

$(a-(40-a))(a-(40-a)+15)=17p^5$

$(2a-40)(2a-40+15)$

$2(a-20)(2a-40+15)=17p^5$

$2\cdot(a-20)(2a-25)=17\cdot 32$

$(a-20)(2a-25)=17\cdot 16$

или $2a-25=17$

$2a=25+17=42$

$a=21$

$21-20=1$

$1\cdot 17<17\cdot 16$

или $2a-25=-17$

$2a=8$

$a=4$

$4-20=-16$

$-16\cdot -17=16\cdot 17$

$a=4$

$a+b=40 \Rightarrow b=40-a=36$

Для отриц. $|2\sqrt{3}t|>\sqrt{D}$

$2\sqrt{3}t<0 \Rightarrow$

$-b+\sqrt{D}>0$

Все множители справа по левой части $:2$

$17 \not\vdots 2 \Rightarrow p^5 \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2$

$2a-15=4-H=H$

$\not\vdots 2 \Rightarrow \vdots 17$ или

$:17$ либо 17, либо -17

$2a-25=1$

$2a=26$

$a=13$

но $13-20=-7$

$-7\cdot 1=-7<17\cdot 16$

$2a-25=-1$

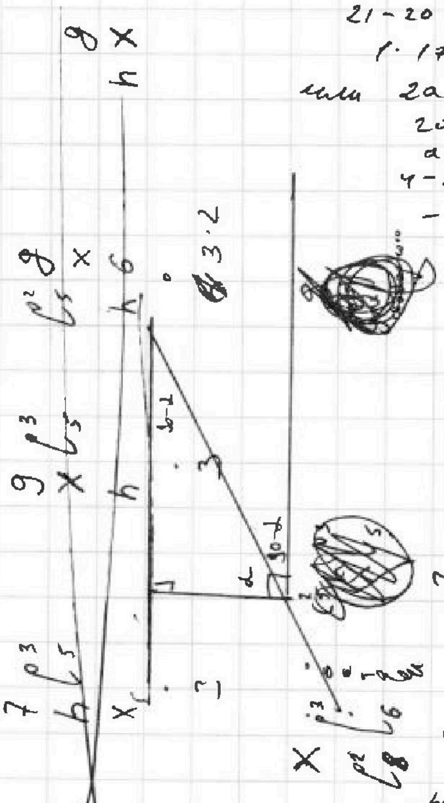
$a=12$

$12-20=-8$

$-8\cdot(-1)<17\cdot 16$

$x^2-4=0$

$2 \quad -2$



$|7|\geq 1$

$|7|>2$