



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ 1 _ ИЗ _ 1 _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9(t^2 - 9) = 0$$

x_1, x_2 - решения

Если есть 2 корня, то дискриминант положителен. \Rightarrow

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

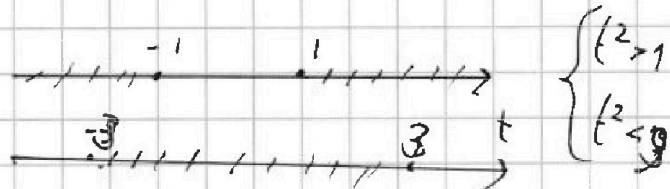
Если $x_1 \cdot x_2 > 0$, то по th. Виета $9(t^2 - 9) > 0$

$$t^2 > 1$$

$$8t^2 - 9t^2 + 9 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

$$t^2 < 9$$



$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

\uparrow кетим $\Rightarrow 19p^4$ - кетимал $\Rightarrow p^4$ - кетимал $\Rightarrow p=2$,
безо все групе претиме кетим кетимал \Rightarrow

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$2b^2 - 4b + 31b - 62 = 0$$

$$2b(b-2) + 31(b-2) = 0$$

$$(2b+31)(b-2) = 0$$

$$b = -\frac{31}{2} \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 14$$

\uparrow
b - кетим кетимал \Rightarrow
кетим кетимал

Ответ: $a = 14$ $b = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BC = 6 \Rightarrow BM = MN = NC = 2$

$AN \parallel DM \quad MC = 2NC \Rightarrow$

NA - сред. линия Δ

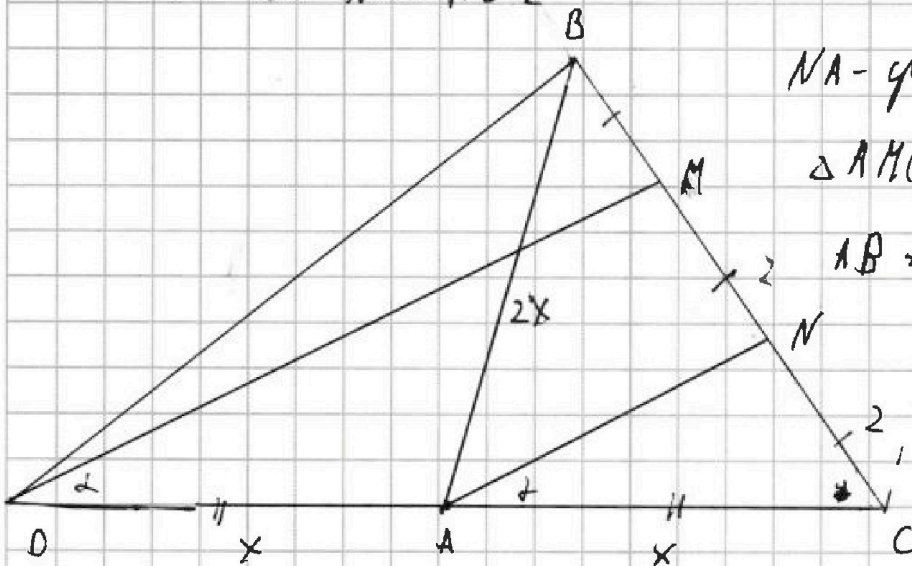
$\Delta AMC \Rightarrow DA = AC \Rightarrow$

$AB = 2AC$

$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$

$NA \parallel DM \Rightarrow$

$\angle MDC = \alpha$



$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

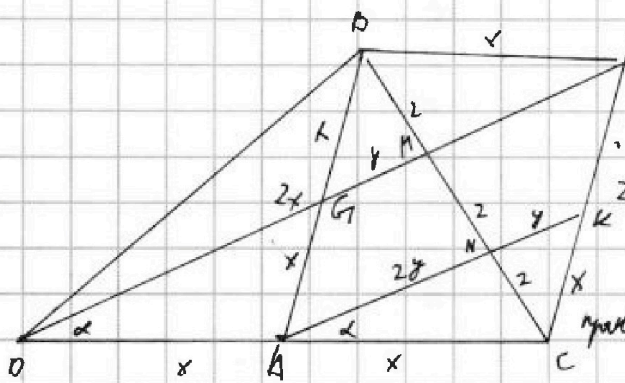
$-\frac{3}{4} = 1 - 2\sin^2 \alpha$

$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$

$\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}}$



пробегит FC, что

$FC \parallel AB \quad FC = AB,$

$\square ABFC$

параллелограмм $BM = MC \Rightarrow$

DM параллельна AF

через F \Rightarrow

По th. Фалеса $BG = AG$, если $BM = MC$ $GM \parallel AN$

Если $AN = 3y$, то $GM = y$ на параллелем $\Rightarrow MK = y \Rightarrow AK = 3y$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

th cos

$$x^2 = x^2 + 9y^2 - 2\cos\alpha \cdot 3y \cdot x$$

град КС

$$4 = x^2 + 9y^2 - 2\cos\alpha \cdot 2y \cdot x$$

ге Δ ANC

$$9y^2 = 6\cos\alpha \cdot yx$$

$$y = \frac{2}{3}\cos\alpha x$$

4x²

$$9y^2 = 2\cos\alpha \cdot x$$

$$4 = x^2 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 x^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3}\cos\alpha x^2$$

$$4 = x^2 \left(1 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3} \right)$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3}}$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}} = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 8}$$

Ответ: $AB = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 8}$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим мы выбрали каких-то 3 школьника, чтобы они сели в один ряд. Их рассаживаем - 1 вариант. Везде свободных мест нет \Rightarrow 1 место на первую парту, все остальные выше него. Второй сидит на второй парту, все третий выше него.

Если мы выбрали двух школьников и посадили в один ряд, то есть такие варианты:

к - мальчик в - девочка х - пустая

- 1) к в х
- 2) к х в
- 3) х к в
- 4) в х к

в этих случаях перед мальком сит девочка. \Rightarrow количество вариантов

зависит от того, как мы рассаживаем предметы учеников по разным партам.

Выборать ряд, где 2 человека - 4 вар, рассаживать их - 4 вар
 Выбран в него маль - C_{11}^2 . Выбран в третий маль
 в первый из оставшихся - C_3^3 ; во второй из оставшихся - C_6^3 ; в четвертой - 1 вар. \Rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

всего вариантов:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 1 =$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot 20 \cdot 84 =$$

$$4 \cdot 6720 \cdot C_{11}^2$$

Ответ: ~~6720~~ $\cdot C_{11}^2$
26880

из трех частей

$$C_6^3 = 20$$

$$C_9^3 = 84$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$|x - y - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$y \leq x \leq 2 + y$$

Сумма корней квадратного уравнения - целое \Rightarrow
сами корни - целые числа

$$0 \leq \sqrt{1 - |x - y - 1|} \leq 1 \Rightarrow$$

Если $\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 1$, то

$$x - y - 1 = 0 \quad x = y + 1$$

$$2y + x - 2y - y^2 - 2y - x - y^2 = x$$

$$-2y^2 - 2y = 0 \quad 2y(y + 1) = 0$$

$$\begin{matrix} y = 0 & x = 1 \\ y = -1 & x = 0 \end{matrix}$$

Если $\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0$

$$|x - y - 1| = 1$$

$$x - y - 1 = 1$$

$$x - y = 2$$

$$x = y + 2$$

$$x - y - 1 = -1$$

$$x = y$$

дискриминант ≤ 0

$$2y + x - 2y - y^2 - 4y - x - y^2 = 4$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{4}$$

$$2y^2 + 4y + 4 = 0 \quad (y + 2) = 0 \quad y = -2 \quad x = 4$$

$$2) x = y \quad 2x - 2x - x^2 - x^2 = 4$$

$$-2x^2 = 4 \quad x$$

Ответ: $y = 0 \quad x = 1 \quad y = -1 \quad x = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим дерево, из которой выйдут 1 дерево.
Та или другая с задан, где 5, 6, 7 и 9 верш
или с дер., где один дерева. Рассмотрим
такой вер. Эти 2 дер. являются только друг
→ (другие) → из других деревьев
начать в эту ветвь ⇒ также не может быть.
⇒ Все деревья с 1 деревом связаны с
дер. с верши 5, 6, 7 и 9.

Рассмотрим эти четыре дерева и верши
между ними. Дерев равно 3. Ведь через
оставшиеся верши мы не можем никаки
пробить, крате них ⇒ этот граф на 4 вершинных
связный, но в нем нет циклов, иначе
так можно добраться между верши дву-
мя способами ⇒ это дерево ⇒ у дерева на
n вершинных n-1 ребра ⇒ между этими 4 вер-
шинами 3 ребра ⇒ осталось 24 верши ⇒ у нас
24 верши с 1 деревом ⇒ ответ: 28 деревьев

