



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$70^2 + 4\sqrt{2} \cdot t \cdot x + 9t^2 - 9 = 0$$

Корни ~~получаем дискриминант~~
получаем ~~дискриминант~~ ~~этого!~~

(получаем ~~дискриминант~~)

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 9 \cdot t^2 + 4 \cdot 9 = 4 \cdot 9 - 4t^2$$

$$= 36 - 4t^2$$

Данное уравнение имеет 2 решения при дискриминанте $\geq 0 \Rightarrow$

$$36 - 4t^2 \geq 0 \Rightarrow 36 \geq 4t^2 \Rightarrow 9 \geq t^2 \Rightarrow$$

$$3 \geq t \geq -3$$

получаем корни: $x_1 = \frac{4\sqrt{2} \cdot t - \sqrt{36 - 4t^2}}{2}$
 $x_2 = \frac{4\sqrt{2} \cdot t + \sqrt{36 - 4t^2}}{2}$

По Теореме:

$$9t^2 - 9 = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \text{если } x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ (однозначно)}$$

$$\text{то! } 9t^2 - 9 > 0 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow \text{однозначно при } t > 1, t < -1$$

\Rightarrow у данного уравнения ^{действ.} 2 решения ($D \geq 0$),

это произведение их положительных при

$$t \in (0; 1) \cup (-1; -3)$$

$$\text{ответ: } t \in (0; 1) \cup (-1; -3)$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a - b = 12 \\ a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 12 + b \\ (a + b + 3) \cdot (a + b) = 19p^4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (25 + b)(12 + b) &= 19p^4 \\ 18a + 27b + b^2 &= 19p^4 \end{aligned}$$

Заметим, что если $a + b$ делится на p и $a + b + 3$ делится на p , то p - простое.
Имеем $19 \nmid a + b \equiv 0 \pmod{p^4}$ или $(a + b + 3) \equiv 0 \pmod{p^4}$, при этом второе возможно только потому ≥ 19

Если одно из чисел делится на p , при этом p - простое то тогда одно из чисел $(a + b + 3)$ делится на 3 разное:

$$p = 3$$

Т.к. числа $a + b + 3$ и $a + b$ взаимно просты

$$\begin{cases} (a + b + 3)(a + b) = 19 \cdot 3^4 \\ a = b + 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (b + 15)(2b + 12) &= 19 \cdot 3^4 \\ 2b^2 + 27b + 18 &= 19 \cdot 3^4 \end{aligned}$$

$$2b^2 + 27b + 18 = 19 \cdot 3^4$$

$$D = 27^2 - 4 \cdot 2 \cdot (18 - 19 \cdot 3^4)$$

Заметим, что $2b + 15$ - нечетное, $2b + 12$ - четное (применяем критерий Келли)

\Rightarrow их произведение четное, но их произведение

$19 \cdot 3^4$ - нечетное противоречие

\Rightarrow этот вариант не подходит.

$$\begin{aligned} a + b &= p^4 \\ a + b + 3 &= 19 \\ \downarrow \\ a + b &= 16 \\ a - b &= 12 \\ \downarrow \\ a &= b + 12 \\ a + b &= 16 \\ \downarrow \\ 2b + 12 &= 16 \\ \downarrow \\ 2b &= 4 \\ \downarrow \\ b &= 2 \\ \downarrow \\ a &= 14 \end{aligned}$$

и $p = 2$ подходит это решение.

$$\begin{aligned} a + b + 3 &= p^4 \\ a + b &= 19 \\ a + b + 3 &= 19 \\ a &= b + 2 \\ 2b + 12 &= 19 \\ 2b + 12 &= 7 \\ b &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

b - не натуральное \Rightarrow нет решений. В данном случае.

ответ: $b = 2$
 $a = 14$.

Решим теперь все варианты, покажем, что других нет

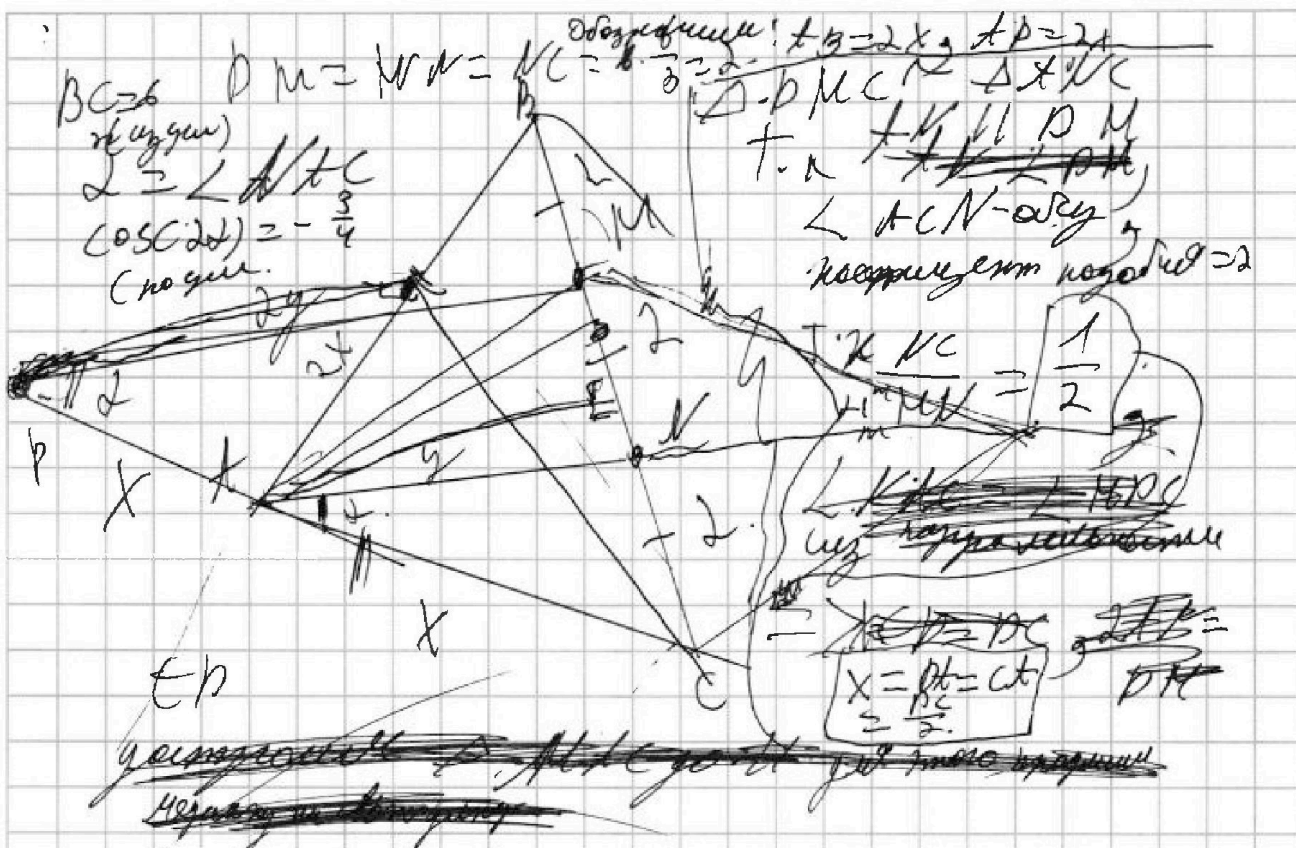


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AN - биссектриса $\triangle ABC$ и делит сторону BC в отношении 2
 $AC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB$ можно AN касательная

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2BC^2$
 можно Tn касательная $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$
 $2 \cos(2\alpha) \cdot AB \cdot AC = BC^2 = 4x^2 + x^2 + \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 2x \cdot x$
 $\Rightarrow 6^2 = 5x^2 + 3x^2 = 8x^2 \Rightarrow 6 = 2\sqrt{2}x$
 $\Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}/2$
 $BC = 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \cdot 1,5\sqrt{2} = 12$
 ответ: 12



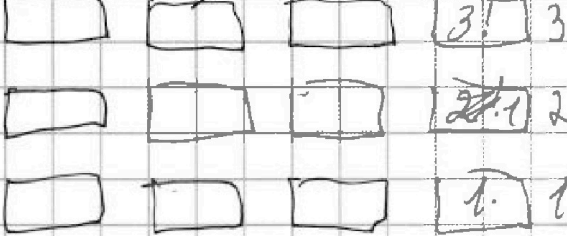
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку могут быть:



Заметим, что на 6 ряду может сидеть 10 человек, а всего

11 человек, а значит видно из ряда, всего 12,

дока \Rightarrow получится всего 1 партия

тогда ~~выбрав 11 - 12 вариантов, ушли~~

и наименьшие ростом $L \neq M$

Всего вариантов раскладки (без учета не подходящих) = 12!

варианта, когда есть 2 человека (один сзади, другой спереди) как у человека сзади, остальные

подходят, тогда ~~выбрав 11 пар из 12 пар в ряду 2 варианта, всего таких вариантов 8 \Rightarrow обратно~~

такого партия ~~сформируется~~

Заметим, что если в ряду нету пустого места, то этот ряд 1-й и 2-й сзади

3х человек можно рассадить однозначно тогда если нете место (например в первом ряду, то рассадить всех можно таким образом

человек: ~~3~~ $C_3^1 C_2^1 C_1^1$ $C_3^3 C_2^2 C_1^1$ $C_3^3 C_2^2 C_1^1$!

(выбрав 3 на 1, выбрано 3 из 6-й ряд, выбрано 3 из 6-й ряд и положить, всех восстановили)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot 2! \cdot 3$
 Выбираем первую туфельку, выбираем 2-ую туфельку и 3-ю туфельку (однозначно) и размещаем в 1 ряду, размещаем в 2 ряду.
 Выбираем пустую коробку в 1 ряд, размещаем как останется случайно сверху.
 Выбираем 3 коробки, размещаем в 1 ряд, размещаем в 2 ряду.

Вариантов выбрать ряд с пустой коробкой

-4 \Rightarrow всего вариантов размещения

$$8 \cdot 3 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = \frac{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 8 \cdot 3}{1! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 8!}$$

Посему можно однозначно разместить в 1 ряду, коробку 2 коробки:

Это верно Т.к. Чеховка (Минималистичный вариант) удерживает себя на 1 коробку, 2 коробки, 3-ий (самый высокий) на помещении)

$$\text{ответ: } 8 \cdot 3 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 24 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(DE - OD) \cdot (DE + OD) > 6$$

при этом по NP-ву $\triangle BOE$

$$PO + PE > OE \Rightarrow PO + PE$$

$$PO + R > DE \Rightarrow (DE - PO) < R.$$

~~Замечают, что максимальное значение~~

~~функции достигается при равенстве, тогда~~
найдем эту функцию

Заметим, что максимальное значение функции достигается на катете и

используем достигнет когда $DE = \sin(\omega) \cdot PE$

$$\text{Максимум} = (1 + \sin(\omega)) \cdot PE \text{ при этом.}$$

$$\text{Но значение } PE = \frac{R}{\cos(\omega)}, \text{ а } R = \frac{PE}{\cos(\omega)} \Rightarrow$$

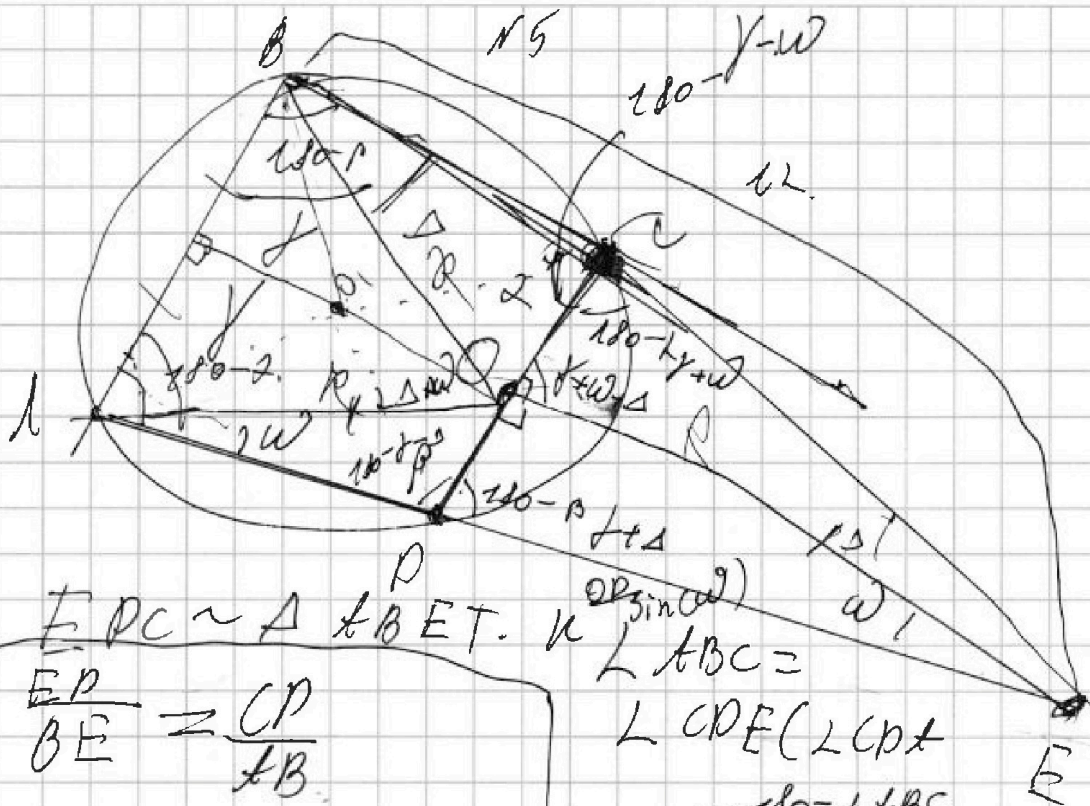


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle EPC \sim \triangle BCT$. $\kappa \angle ABC =$
 $\Rightarrow \frac{EP}{BE} = \frac{CP}{CB}$
 $\angle CPE (\angle CPB + \dots)$
 $\Rightarrow 180 - \angle ABC$
 $+ \dots$
 $\angle BTP > \angle PCE$
 $\angle ABE - \dots$

Также заметим, что $\angle POE = \angle EOC = 90^\circ$
 Т.к. $\angle EOP = \beta + \delta (= \angle ABC)$
 $\angle OEP = \omega$ Т.к. $\angle OEP = \rho / \delta$
 $\Rightarrow \angle CPE = \beta + \delta + \omega$
 (т.к. смежные с треугольником), но сумма всех углов в $\triangle BPE = 180^\circ \Rightarrow \beta + \delta + \omega = 90^\circ$
 $2\beta + 2\omega + 2\delta$
 Тогда пусть радиус окружности $\triangle BPE = R$
 $\Rightarrow R^2 \geq PE^2 + OB^2 \Rightarrow R^2 \geq PE^2 + OP^2$
 но т.к. перпендикуляр POE
 катетов, тогда по гип-тез $\triangle BOE$ $2R > BE$
 Заметим, что с стороны OE
 $\Rightarrow \frac{PE}{\cos(\omega)}$ с другой стороны $R \geq PE \Rightarrow R \geq \frac{PE}{\cos(\omega)}$
 $(PE^2 - OR) (OR + 90) \dots$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

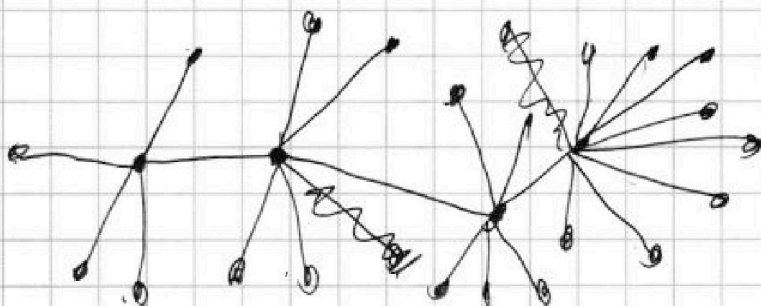
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Крива \Rightarrow количество деревьев кроме этих
 $4-x=27$ (деревья из остальных деревьев
горюхи идут только в эти 4 (т.к. степень
каждой - 6), а если берем и другие
деревья и больше, то найдется такая
деревья (не из 4-х упирает), со степенью ≥ 7
а такого не бывает по ул) \Rightarrow всего 25
деревьев

Пример:



тут всего 25 деревьев, условие
выполняется
ответ: ~~25~~ 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим рассуждать в том же духе
 $y + t = x$ Мы дошли до того (как предыдущий шаг)
 что $y(y+t) = 0$

т.е. тогда либо $y = 0$ либо $t = 0$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ если $y = 0$ то $x = t$ если $y = -1$ то $x = 0$, оба этих варианта

подходят, упрощаем:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = t \\ y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ответ: $(0; -1)$ и $(1; 0)$ так же это

равно:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = t \\ y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-x-y-1} = 2$$

Т.к. значения под корнями неотрицательны \Rightarrow

$$1 - |x-y-1| \geq 0 \Rightarrow 1 \geq |x-y-1|$$

Запишем модуль, рассмотрим 2 варианта:

$$x \geq y+1$$

$$x < y+1$$

тогда: $|x-y-1| = x-y-1$

тогда:

$$|x-y-1| = y+1-x$$

$$\Rightarrow 1 \geq x-y-1$$

$$\Rightarrow 1 \geq y+1-x$$

$$y+2 \geq x$$

$$x \geq y+1$$

т.к. $x \geq y$ — условие то

рассмотрим 2 варианта:

$$x = y+2, \quad x \neq y+1.$$

$x \geq y$, но при этом

$x < y+1$ — противоречие

\Rightarrow данный вариант не подходит.

$$\sqrt{2y+4-2y-(y+2)^2-y^2}$$

$$+ \sqrt{1+1+y-y+2} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-(y+2)^2-y^2} = 2$$

$$\Rightarrow 4 = 4 - (y+2)^2 - y^2$$

$$\Rightarrow (y+2)^2 + y^2 = 0$$

но т.к. $y \geq 0$

$$\Rightarrow 2y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$D = 16 - 32 = -16$$

$$D < 0 \Rightarrow y \in \emptyset$$

Вариант
случае \Rightarrow от него ходят

$$y+1 = x \text{ подставим в уравнение}$$

$$\sqrt{2+2y-2y-(y+1)^2-y^2}$$

$$+ \sqrt{1-1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2-(y+1)^2-y^2} = 2$$

$$\Rightarrow 2 - (y+1)^2 - y^2 = 4$$

$$y^2 + 2y + 1 - y^2 - 2 = 0$$

$$2y - 1 = 0$$

$$2y^2 + 2y = 0$$

$$y(y+1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{PE}{\cos(\omega)}$ $\frac{OD}{\sin(\omega)}$ $\frac{OP \cdot \cos^3 \omega}{\sin(\omega)}$

Черновик

$(2x)^2 + x^2 = 1,5x \cdot 2x$

$8x^2 =$

$2\sqrt{PE^2 + OD^2} \geq 12$

$PE^2 - OD^2 \geq 36$

$30^\circ \frac{(PE - OD)(PE + OD)}{OP(1 - \sin^2(\omega))}$

$2 \cdot x \cdot PE = \frac{OP(1 - \sin^2(\omega))}{\sin(\omega)}$

$\frac{2a}{a} = \frac{x}{y}$

$PE = \frac{OD(1 + \sin(\omega))}{\sin(\omega)}$

$2x \cdot \omega = 1$

$\frac{1 + \sin(\omega) - \sin^2 \omega}{\sin(\omega)}$

$\rightarrow \max$

$4a^2 + 5a^2 - 2a^2 = x^2$

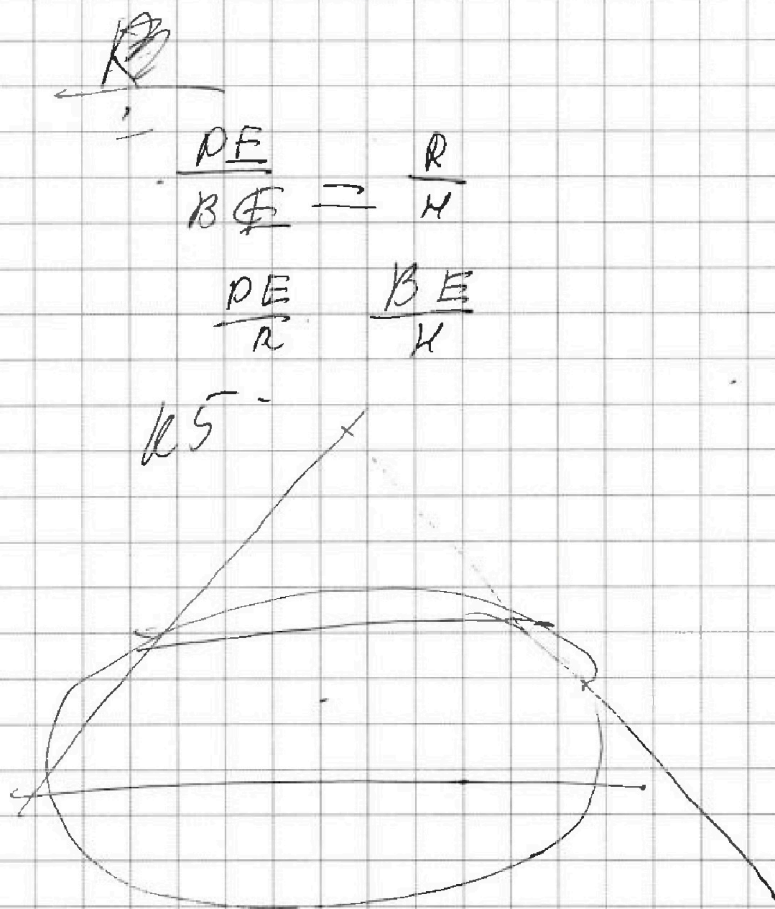


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{2-|x-y-1|} = 2.$$

$$2x \geq 2y + x^2 + y^2 \quad 1 - |x-y-1| \geq 0$$

$$2x - x^2 - 2y - y^2 \geq 0 \quad \begin{matrix} \rho \sin(\omega) \\ \cos(\omega) \end{matrix} + R \cos(\omega) \quad \delta + \epsilon +$$

$$\Phi = 4 - 8y - 8y^2$$

это параболка направлена
вниз в низ \Rightarrow при $\Phi \geq 0$ $2R \geq x \geq \sqrt{y+1}$

условие что $2x - x^2 - 2y - y^2 \geq 0$ $1 - x + y + 1 \geq 0$
всегда верно $\rho \geq 0$ ω

$$\Rightarrow 4 - 8y - 8y^2 \geq 0 \quad x \geq y+1 \quad 2 \geq x-y$$

$$8y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad 1 + x - y - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq y+1$$

$$\Phi = 6y + 4$$

$$\sqrt{2-|x-y-1|} + \sqrt{2-x+y(2-y)} = 2.$$

Т.к. $(2-x) \cdot x + y(2-y) - 2$ — число, $2 - |x-y-1|$ — тоже число, то:

$$\frac{2-x}{1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{y}{1} \cdot \frac{2-y}{1} = 2$$

$$\frac{2-x}{1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{y}{1} \cdot \frac{2-y}{1} = 2$$

$$(2-x) \cdot x + y(2-y) = 2$$

$$2x - x^2 + 2y - y^2 = 2$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos^2(\omega)$$