



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(\angle \overset{D}{\underset{AN}{C}}) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0; \text{ два корня} \Rightarrow D > 0 \text{ (дискриминант)};$$

по т.-м Виета  $x_1 \cdot x_2 = \frac{9t^2 - 9}{1} > 0$ , где  $x_1, x_2$  - корни  $\Rightarrow$   
(знак произведения не в уравн.)

$$\begin{cases} (4\sqrt{2}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9t^2 - 9) > 0 \\ 9t^2 - 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32t^2 - 36t^2 + 36 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 36 - 4t^2 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 > |t| \\ |t| > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t \in (-3; 3) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \text{на числовой прямой}$$

-3   -1   0   1   3   t

$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$  - при таких  $t$  выполняется условие

$D > 0 \Rightarrow$  2 реальных корня; и т.е. у нас  $\Rightarrow$  2 корня  $> 0$ .

Ответ:  $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=12 \\ (a+b)^2+3(a+b)=19p^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-b=12 \\ (a+b)(a+b+3)=19p^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a-12 \\ (a+a-12)(a+a-12+3)=19p^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b=a-12 \\ (2a-12)(2a-9)=19p^4 \end{cases}; \quad 2a-12 \div 2 \quad (= 2 \cdot (a-6))$$

тогда где  
т.е.  $a \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (2a-12)(2a-9) \div 2$ , значит  $19p^4$  тоже должно делиться на 2.  $19 \nmid 2$ , значит  $p^4 \div 2$ , но  $p$  - простое,

оно делится только на само себя и 1. Значит единственная возможность, когда простое  $p \div 2$ , это когда  $p=2$  (иначе  $p \div p$  и  $p \div 2 \Rightarrow$  не простое)  $\Rightarrow$

$$(2a-12)(2a-9)=19 \cdot 2^4 \Rightarrow (a-6)(2a-9)=19 \cdot 2^3=19 \cdot 8 \Rightarrow$$

$$2a^2 - 9a - 12a + 54 = 19 \cdot 8 \Rightarrow 2a^2 - 21a + 54 - 80 - 42 = 0$$

$$2a^2 - 21a + 54 - 152 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 21a + 98 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 + 8 \cdot 98}}{4} = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 800 - 16}}{4} =$$

$$= \frac{21 \pm \sqrt{1241 - 16}}{4} = \frac{21 \pm \sqrt{1225}}{4} = \frac{21 \pm \sqrt{5 \cdot 245}}{4} =$$

$$= \frac{21 \pm \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 49}}{4} = \frac{21 \pm 35}{4} = \begin{bmatrix} \frac{56}{4} \\ -\frac{14}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a \neq -\frac{7}{2} \Rightarrow a = 14, \text{ тогда}$$

$$a-b=12 \Rightarrow b=a-12=14-12=2$$

можно проверить:  $a^2+2ab+b^2+3a+3b=(a+b)(a+b+3)=16(16+3)=$   
 $= \frac{2^4}{=p} \cdot 19 \text{ ок!}$

Ответ:  $a=14; b=2$





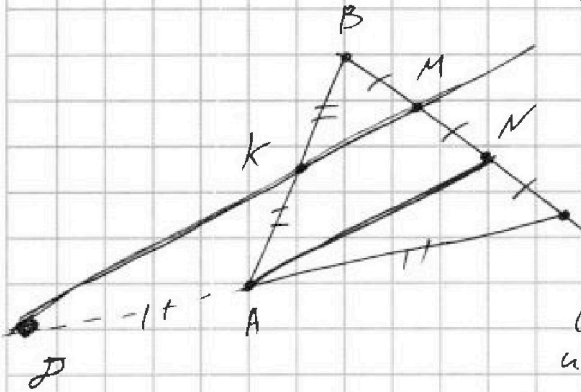
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3



$AN$  - медиана в  $\triangle CFM$ ,  
выходящая из середины  
стороны  $MC$  (т.к.  $MC=CM$ )  $FM$   
и параллельная стороне  $CF \Rightarrow$   
 $AN$  - ср. линия в  $\triangle CFM$ .

(угол. прямая из  $M$ , содержит  $P$   
и параллельна  $AN$ )  $\Rightarrow AN$  - ср. линия  
стороны  $PC$ , т.е.  $A$  - середина  $PC$   
 $PA = AC$

Аналогично в  $\triangle ABN$   $PM$  - это та же прямая, выходящая из середины стороны  $BN$  ( $MB=MN$ ) и параллельная стороне  $AN \Rightarrow PM$  - ср. линия  $\triangle ABN \Rightarrow$  пересекет  $AN$  в середине  $K$  (т.е.  $(PM) \cap (AN) = K$ , тогда  $AK = BK$

$$AP + AC = PC \quad \text{и} \quad AB = PC \Rightarrow AP + AC = AB$$

$$\begin{aligned} AP &= AC = \frac{PC}{2} \\ AK &= BK = \frac{AB}{2} \end{aligned}$$

$$AB = PC \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{PC}{2} \Rightarrow AP = AC = AK = BK$$

$$AP = AK \Rightarrow \triangle PAK - \text{р.т.} \Rightarrow \angle APK = \angle AKP$$

$$\angle APK = \angle KAN, \text{ как накрест лежащие при пересечении } PM \parallel AN.$$

$$\angle KAPK = \angle CAN, \text{ как соответственные углы при пересечении } PM \parallel AN$$

$$\text{т.к. } \angle APK = \angle AKP, \text{ то } \angle KAN = \angle CAN \Rightarrow$$

$\angle KAN$  (или же  $\angle CAB$ ) =  $2\angle CAN$ , а это означает что  
зуден. Так как  $\cos 2\angle CAN = \cos \angle CAB = -\frac{3}{4} < 0$ , то  
 $\angle CAB > 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  тупоугольный, но судя  
это не меняется





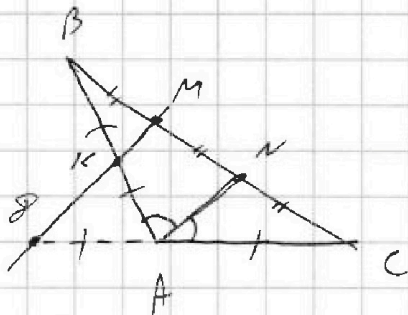
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнительный метод



Как уже было замечено

$$AK = AM = AN = BK = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Следует заметить, что

$\angle K = 90^\circ$  для  $\triangle KAM$

$\triangle ABC$ :

$$AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AK \cdot AC \cos \angle CAB = BC^2$$

$$AC = \frac{AB}{2}; \quad \angle CAB = 2 \angle CAM \Rightarrow \cos \angle CAB = \cos(2 \angle CAM) = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{AB^2}{4} + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = BC^2 = 6^2 \quad (BC = 6 \text{ по условию})$$

$$\frac{5}{4} AB^2 + AB^2 \cdot \frac{3}{4} = 6^2 \Rightarrow \frac{8}{4} AB^2 = 6^2 \Rightarrow 2 AB^2 = 6^2 \Rightarrow$$

$$AB \sqrt{2} = 6 \Rightarrow AB = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Ответ:  $AB = 3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

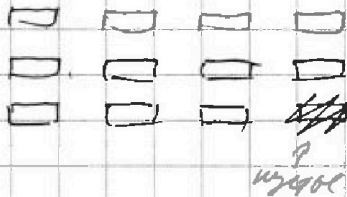
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4

Задача 4. Дети 11, а мест  $3 \times 4 = 12$ . Значит остается одно свободное место. Предположим, что это место в самом дальнем от узки ряду.

вариант



Информация детей на 3 узких  
самых широких - 4 чел  
средних - 4 чел  
высоких - 3 чел.

Тогда можно считать, т.е. все равно работа.

Если Индия находится на 1-й ряд, средний - на 2-й, Волкер - на 3-й. Как-то варианты раскладки: 4 чел на 4 места -  $4!$ . 3-й человек на 3 -  $3!$ , но это еще нужно место, которое можно установить на любую из 4-х мест соседнего ряда, т.е. все  $3! \cdot 4$ . Итого вариантов  $4! \cdot 4! \cdot 4! = 24^3$

Аналогично можно получить  $24^3$  для случая когда нужно место в среднем и 1-ом ряду. Однако возможны и др. перестановки.

Например, когда нужно в 1-ом ряду, человек из среднего ряда может поменяться с кем-нибудь из 1-го ряда. Однако человек из ср. ряда может быть выше, или тот из ср. ряда, перед или в стороне. Самый высокий (а также низкий) 1-й в ряду

не поменяется более 3 места, если след. по ряду 2, 3 или 1, а самый высокий, тогда все место.

Т.е. самый высокий который еще  $24^3 \cdot 3$  варианта, которые уже были, но он меняется (или со 2-го ряда. След. - по ряду след. еще  $24^3 \cdot 2$ , а в начале со 2-го ряда след. еще  $24^3 \cdot 1$ , а самый высокий - 0





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично в случае когда пустое место не  
последний ряд. Можно менять местами людей  
с 2-го ряда и с 3-го.

$$\text{итого } 24^3 \cdot 3 + (24^3 \cdot 3 + 24^3 \cdot 2 \cdot 24^3) \cdot 2 =$$

В остальных случаях перебраться или невозможны,  
или сидят пустое место на др. ряд, что строит  
уже исключительный случай.

$$\text{вариантов: } 24^3 \cdot 3 + 24^3 (6 + 4 + 2) = 24^3 \cdot (3 + 12) = 24^3 \cdot 15$$

Ответ:  $24^3 \cdot 15$  вар-6



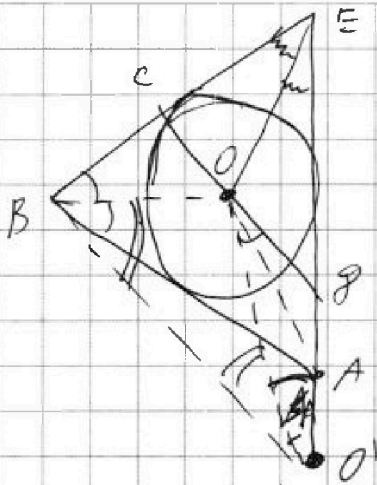


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



от задачи 5  
отложим на  $BE$  на  $(EP)$  от  
точки  $P$  точку  $O'$  так, что  
 $PO' = PO$ , тогда

$$EP + PO = EP + PO' = EO'$$

$\triangle BOP$  внешний  $\Rightarrow \angle CBA = \angle CPE$

$\angle CPE$  - внешний для  $\triangle POO'$  (т.к.

$$OP = PO') \Rightarrow \angle POO' = \angle PO'O =$$

$$= \frac{\angle CPE}{2}, \text{ т.к. } \angle POO' + \angle PO'O = \angle CPE$$

или внешний угол.

$$\angle POO' = \angle PO'O, \text{ т.к. } OP = PO'$$

$O$  - к  $PO$ .

$O$  - центр впис. окр. - т.к. для  $\triangle ABE$

$\Rightarrow$  т.к. пересечение бис-с, т.е.

$$BO - \text{бис-са } \angle ABE \Rightarrow \angle EBO = \angle OBA =$$

$$= \frac{\angle EBA}{2} = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\angle CPE}{2} = \angle PO'O$$

$\Rightarrow BOAO'$  внешний, т.к. равны углы, отну-ся на одну сторону  $\angle OBA = \angle PO'O$  или  $\angle AO'O \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle OBO' = \angle OAE; \angle OO'B = \angle OAB \text{ (из вписан. уг.)}$$

т.к.  $O$  - пересечение точек пересек бис-с для  $\triangle ABE \Rightarrow$

$$AO - \text{бис-са } \angle BAE \Rightarrow \angle EAO = \angle BAO \Rightarrow$$

$$\angle OBO' = \angle OO'B \Rightarrow \triangle BOO' - \text{р/с} \Rightarrow BO = O'O$$

$EO$  - тоже бис-са, из угла  $\angle BEA \Rightarrow \angle BEO = \angle AEO$

$\Rightarrow \triangle BEO = \triangle O'EO$  по I-му признаку

$OE$  - общ. сторона,  $BO = O'O$  из р/с  $\triangle BOO'$

$$\angle BOE = 180 - \angle OBE - \angle OEB; \angle O'OE = 180 - \angle O'OE - \angle OEO'$$

$$\angle OBE = \angle O'OE - \text{уже мы знаем}$$

$$\angle OEB = \angle OEO', \text{ т.к. } EO - \text{бис-са}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \angle ABE = \angle BOE = \angle O'E$  как углы-то равны  $\Rightarrow$

$$\triangle BEO \stackrel{I}{=} \triangle O'E \Rightarrow BE = O'E = 12$$

Узнаем, что  $O'E = EP + PO = EP + PO \Rightarrow$

$$BE = EP + PO = 12$$

Решив, можно предположить, что  
не стоит  $EP + PO = 12$  всегда, значит это и максимальное  
значение тоже. (налево от нуля, где  $ABE$  не считается  
в отрезок.)

$$\text{Ответ: } (EP + PO) = 12$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

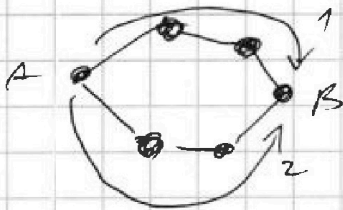
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6

Представим этот остров как граф: деревья - вершины, горы - ребра. То есть, из каждой вершины можно сделать в любую сторону  $\Rightarrow$  все вершины связаны, и может быть, что бы граф состоял из неск-их компонент например:



Значит из каждой вершины в каждую сторону можно сделать единичный шаг. Это значит, что в графе нет циклов, иначе бы в процессе старта (например по и пути в посылке) забав бы уже два пути:

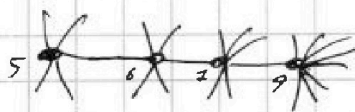


Значит наш граф без циклов  $\Rightarrow$  он дерево. В этом случае деревья с одной горой (вершина с одним ребром) - это листья.

Те четыре дерева из дерева не могут быть связаны между собой никак-то из оставшихся деревьев. Иначе бы в этой связывающей деревце было бы 2 цикла.



Значит те 4-е дерева связаны друг с другом на прямую.



А на концах свободных гор (ребра) размещаем ~~Итак~~ ~~дерева~~ ~~листья~~ деревья - листья

На каждую вершину из центра может приходить или  $n-1$  или  $n-2$  листьев, где  $n$  - во сколько вершин (или в горку из дерева).  $n-1$  - если дерево "с краю" (как 549 на рисунке),  $n-2$  - если дерево в середине (как 647) В любом случае всего листьев

бюджет  $\Rightarrow 5+6+7+9 - 1-1-2-2$ , т.е. всего бюджет





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Каждый - 70 дрв деревьев в середине и по краям.

итого  $5+6+7+9 - 2 - 4 = 5+7+9 = 12+9 = 21$

и еще сомм 4 дерева (с 5, 6, 7 и 9 -ю деревьями):

$$21 + 4 = 25$$

Ответ: 25 деревьев

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Печать QR-кода недопустима!

Задача 7

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

Корень кв-й из любого числа  $\geq 0$ . Значит подкоренные выражения могут принимать значения от 0 до 4.

Меньше 0 никогда, иначе корень не берётся, больше 4, приведёт к тому, что корень кв-й из ~~отрицательного~~ отрицательного значения будет равен 5, а такое не бывает.

П.с.к.  $x$  и  $y$  целые,  $\forall$  все ост. числа вып-ли того же класса, значит подкоренные выражения целые.

Если одно из них = 0, тогда другое = 4. ↑. т. е. из уравн. тех корней = 2 Сводится...  
Если одно из них = 1, то другое = 1, сводится.

Если одно из подкор. выражений = 2, то корень из другого должен быть равен  $2-\sqrt{2}$ , тогда само 2-е подкоренное выражение  $(2-\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$  - не целое, значит так не может быть.

Аналогично, если одно из вып-й = 3, то другое  $(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3}$  - не целое (есть радикал).

Итого вариантов 3:

кор.	$2x-2y-x^2-y^2$	$1- x-y-1 $
1.	4	0
2.	0	4
3.	1	1

1.  $1-|x-y-1|=0 \Rightarrow |x-y-1|=1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-y=2 \end{cases} \dots$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=2+y \end{cases}$$

1.1  $x=2 \Rightarrow 2x-2y-x^2-y^2 = 2x-2y-x^2-x^2 = -2x^2$   
 $x^2 \neq 0$  для  $\forall x \Rightarrow -2x^2 \leq 0$ , а нам нужно 4,  
 что  $> 0 \Rightarrow$  такой вариант не реализуется





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. 2 \quad x = y + 2 \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 = 2(y + 2) - 2y - (y + 2)^2 - y^2 =$$

$$= 2y + 4 - 2y - y^2 - 4y + 4 - y^2 = -2y^2 - 4y = 4 \Rightarrow$$

$$y^2 + 2y = 2 \Rightarrow y^2 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$$

эти корни, но  $y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$  не подходит  
(целые)

2.  $1 - |x - y - 1| = 4 \Rightarrow |x - y - 1| = -3 < 0$ , но  $|x|$ , где  $x$  и  $y$  всегда  $\geq 0 \Rightarrow$  так вообще не бывает

3.  $1 - |x - y - 1| = 1 \Rightarrow |x - y - 1| = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{x = y + 1} \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 = 2(y + 1) - 2y - (y + 1)^2 - y^2 =$$

$$= 2y + 2 - 2y - y^2 - 2y - 1 - y^2 = -2y^2 - 2y + 1 \stackrel{1}{=} 1$$

$$2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow (y + 1)y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Если  $y = 0$ , то  $x = 1$ , тогда

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = \sqrt{2 - 0 - 1 - 0} + \sqrt{1 - |1 - 0 - 1|} =$$

$$= \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

Если  $y = -1$ , то  $x = 0$ , тогда

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = \sqrt{0 + (-2) - 0 - 1} + \sqrt{1 - |0 - (-1) - 1|} =$$

$$= \sqrt{2 - 1} + \sqrt{1 - |1 - 1|} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \Rightarrow$$

корте  $(1; 0)$  и  $(0; -1)$  подходит. ~~В~~ для случая, когда подкоренное выражение равно 1, в другом случае не вычитается одно из значений (или что не делит, или  $\notin \mathbb{Z}$ )

Ответ:  $(x; y) : (1; 0)$  и  $(0; -1)$



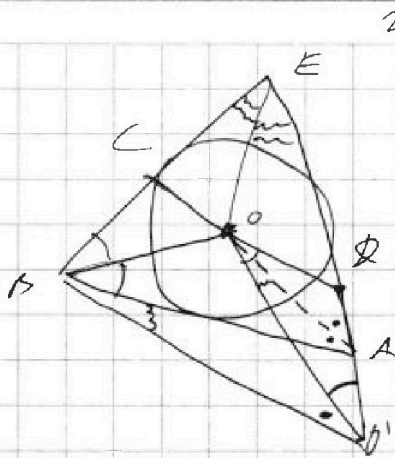


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



*Черновики*

$$\angle CPE = \angle CBA \text{ внешн-т.}$$

$$\triangle OPO' - \text{P.C.B.}$$

$$\angle POO' = \angle PO'O = \frac{\angle CPE = \angle CBA}{2}$$

$$\triangle OAO' \text{ внешн } \Rightarrow$$

$$\angle BO'O = \angle BAO \text{ внешн}$$

$$AO - \text{биссектр.} \Rightarrow \angle BAO = \angle OAP$$

$$\angle BO'O = \angle OAP \text{ (внешн-т.)} \Rightarrow$$

$$\angle BO'O = \angle OAO' \Rightarrow$$

$$\triangle BO'O - \text{P.C.B.}$$

$$\Rightarrow \angle BOE = \angle D'O'E \text{ как углы при вершине}$$

$$OE \in \text{прямой}$$

$$BO = O'O$$

$$\Rightarrow \angle BOE = \angle O'O'E \Rightarrow \angle O' = 12$$

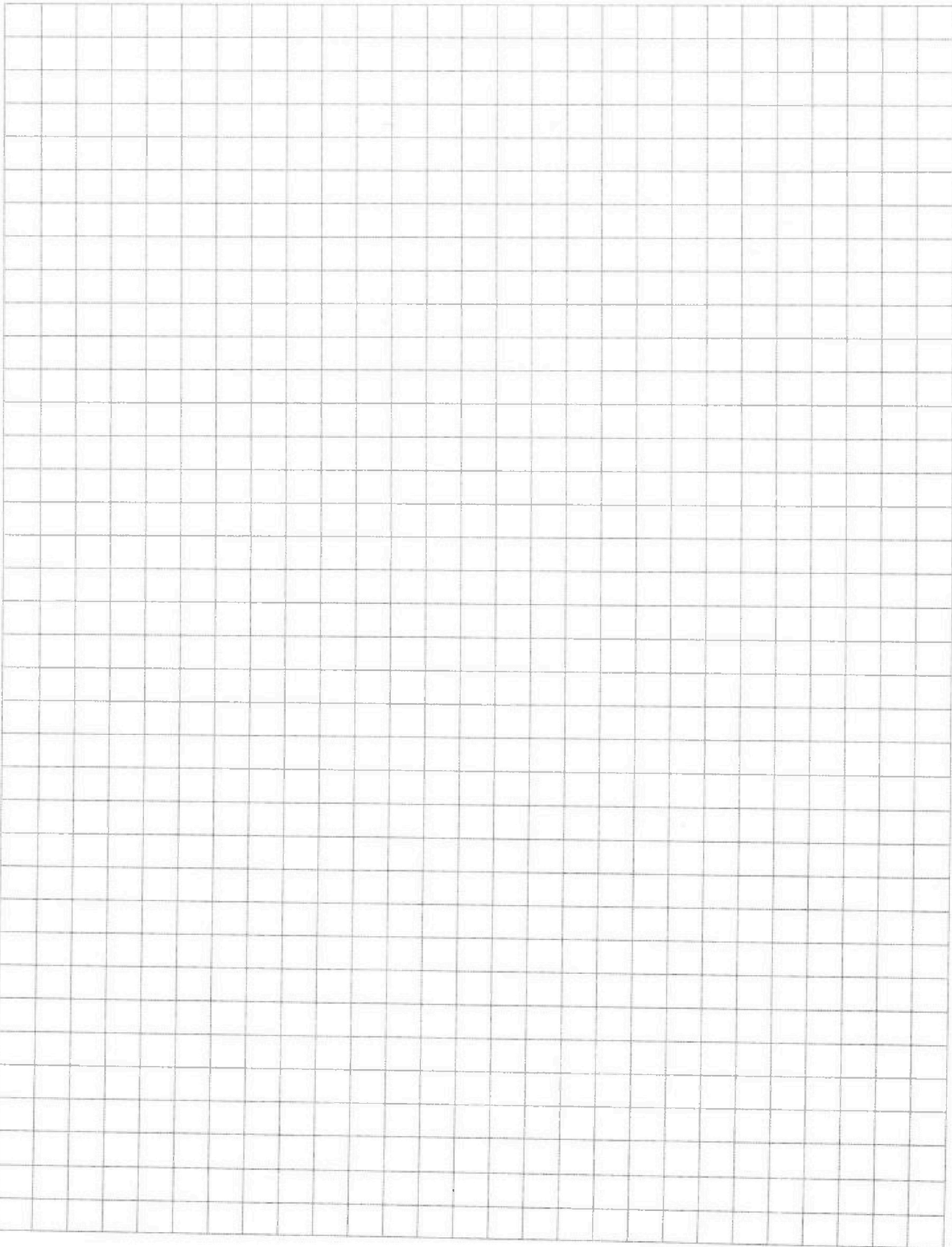


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



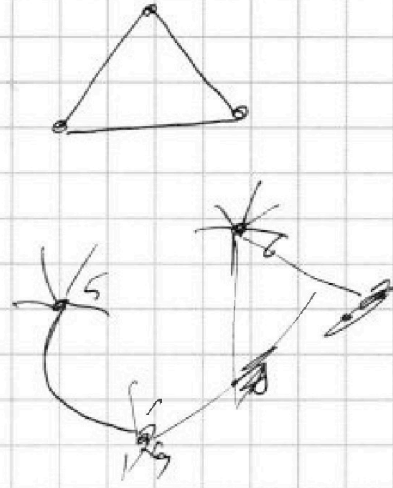
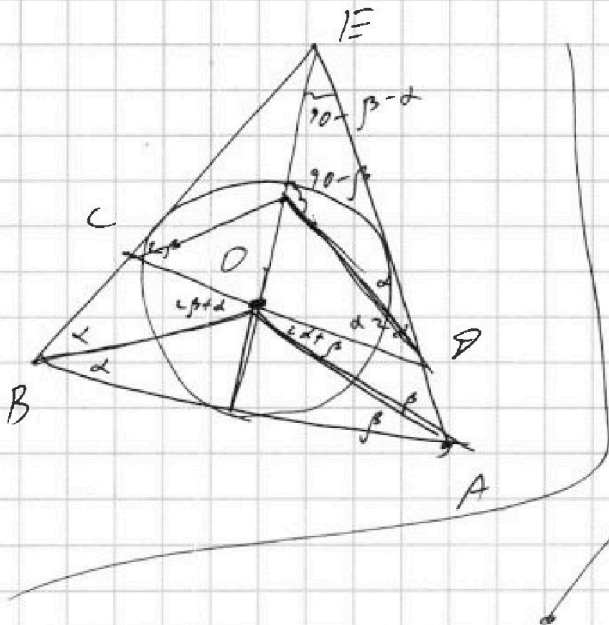


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

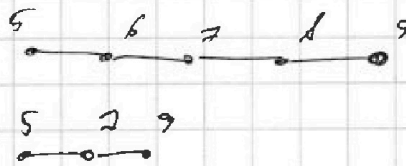
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ \_ ИЗ \_ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 27$$



$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

Пусть  $x > y + 1$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - (x - y - 1)} = 2$$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{2 - x + y} = 2$$

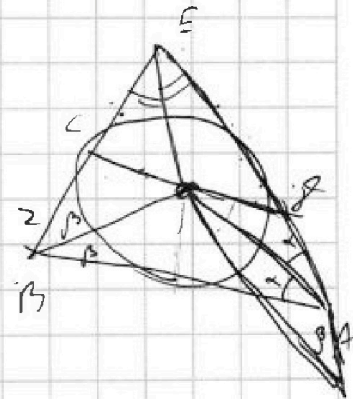
$$\sqrt{-x^2 + 2x - 1 + 1 - 2y - y^2 + 1} + \sqrt{2 - x + y} = 2$$

$$\sqrt{-(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2} + \sqrt{2-x+y} = 2$$

0 4  
4 0  
1 1

$$1 + 2 \rightarrow 2x = (2 - \sqrt{2})^2 \notin \mathbb{Z}$$

ошибка 3





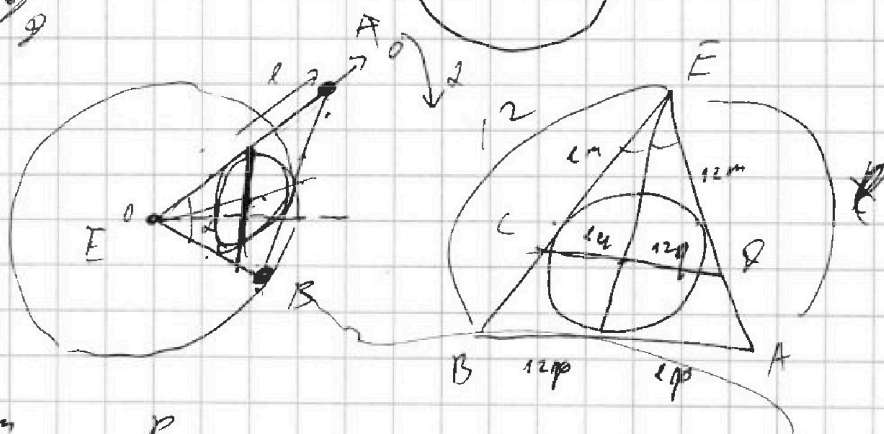
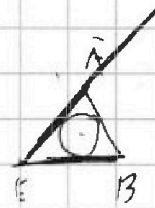
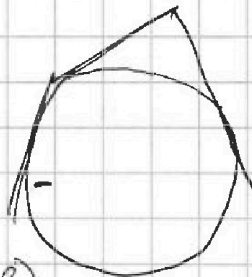
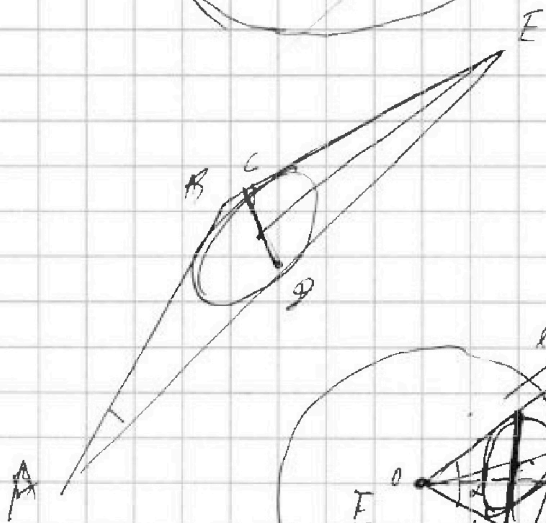
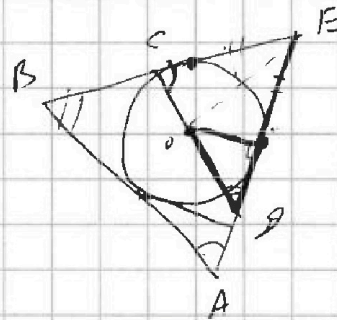
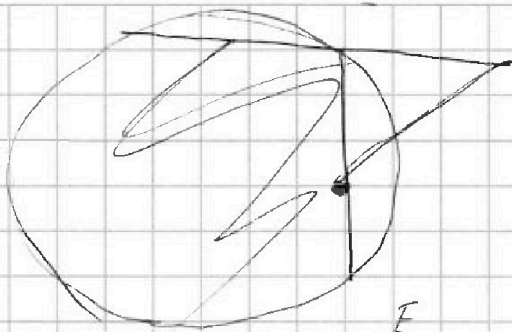


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

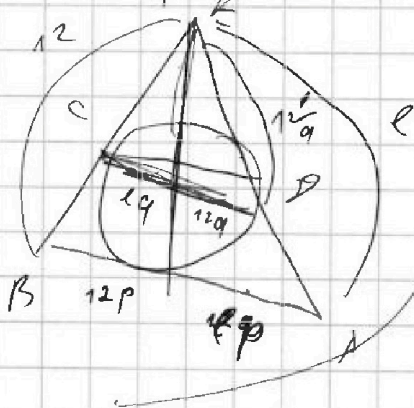
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

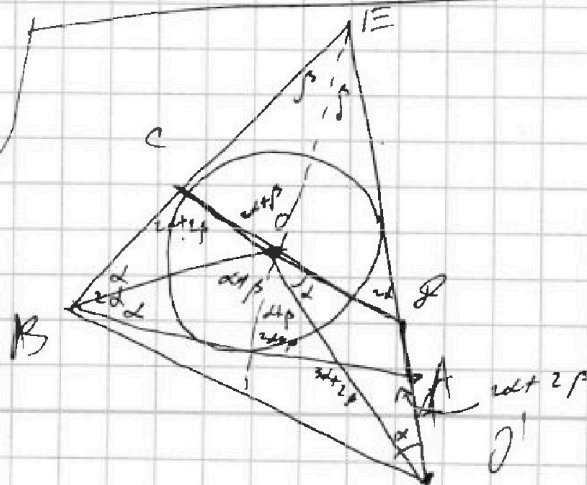
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{12p}{12q} = \frac{12m}{72} \Rightarrow \frac{p}{q} = m$$



$$V = p + p_0 = 12 \left( \frac{p}{q} + q \right) = 12 \frac{p + q^2}{q}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

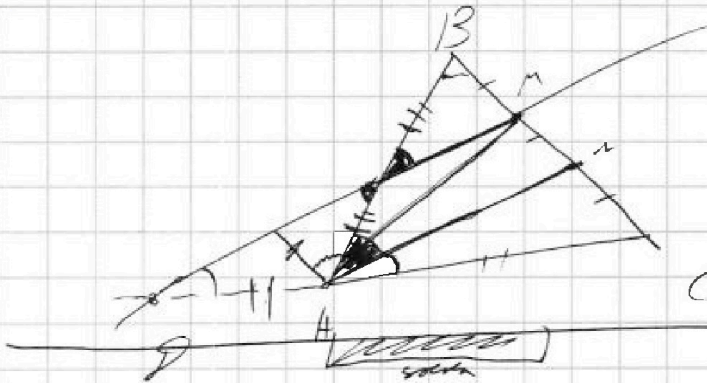
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*методом*

$$AC^2 + 4a^2 - 4a \cdot AC \cdot \frac{1}{2R} = 4$$

$$AP^2 + 9a^2 - 6a \cdot AP \cdot \frac{1}{2R} = \frac{AB^2}{4}$$

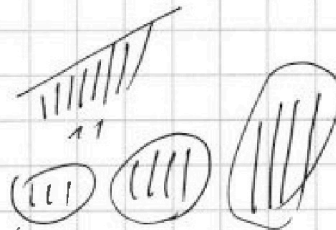


$$AB = CP$$

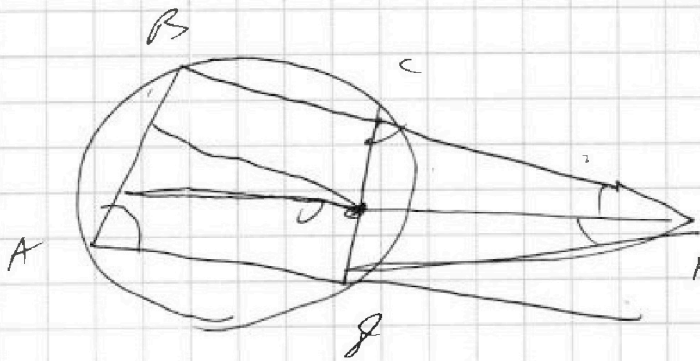
$$\frac{AB}{2} = \frac{CP}{4}$$

$$AB^2 + \frac{AB^2}{4}$$

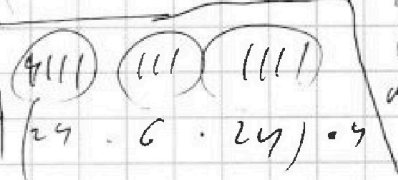
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12



~~3~~



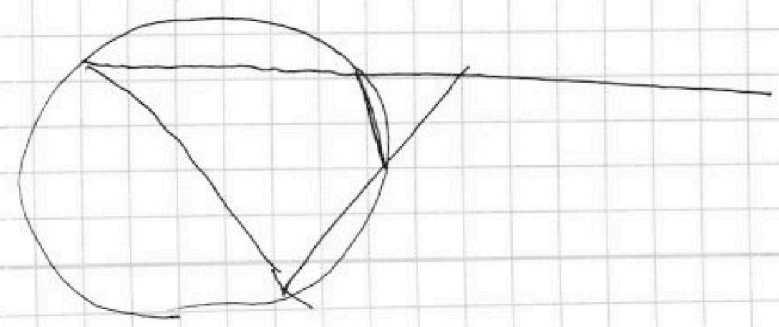
$$1) (6 + 24 \cdot 24) \cdot 4 - 3 \cdot 4$$



$$2) (24 \cdot 6 \cdot 24) \cdot 4$$

↑  
ввод ок  
до + переводит  
в 1-0-0-0

$$3) (1111) (1111) (111)$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*черновик*

N2

$$a - b = 12$$

$$b = a - 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a + b)^2 + 3(a + b) = 19p^4$$

$$(a + b + 3)(a + b) = 19p^4$$

$$(a + a - 12 + 3)(a + a - 12) = 19p^4$$

$$(2a - 9)(2a - 12) = 19p^4 \Rightarrow p = 2$$

$$\begin{matrix} :2 \\ :2 \end{matrix}$$

$$(2a - 9)(2a - 12) = 19 \cdot 2^4$$

$$4a^2 - 42a + 108 = 19 \cdot 16$$

$$2a^2 - 21a + 54 - 19 \cdot 8 = 0$$

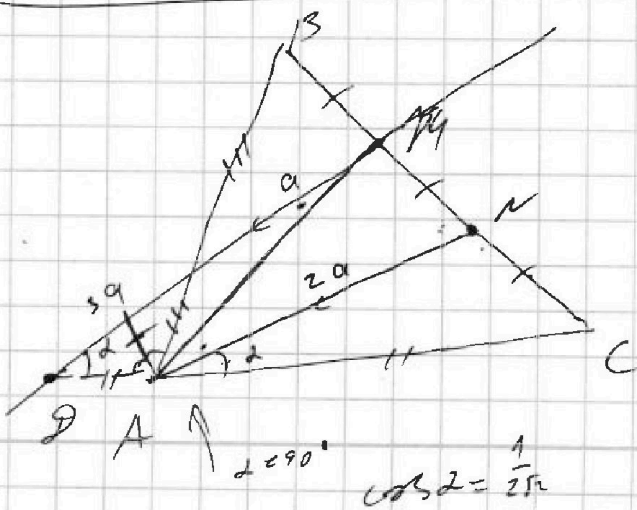
$$21 \pm \sqrt{441 - 8 \cdot 54 + 8 \cdot 19 \cdot 8} \quad 21 \pm \sqrt{441 - 8(54 - 19 \cdot 8)} \quad 21 \pm \sqrt{441 + 8 \cdot 78}$$

$$= \frac{21 \pm \sqrt{441 + 484}}{4} = \frac{21 \pm \sqrt{1225}}{4} = \frac{21 \pm 35}{4} = \begin{cases} \frac{19}{4} \\ < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \overline{) 5} \\ 245 \overline{) 5} \\ 49 \overline{) 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 65 \\ \hline 775 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 98 \\ \hline 784 \\ 441 \\ \hline 1225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ \hline 252 \end{array}$$



$$AB = CD$$

$$BC = 6$$

$$\cos(2 \angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$2\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{8}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$