



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow D > 0$$

$$\frac{D}{4} = 40(2\sqrt{2}t)^2 - 9(t^2 - 9) = 8t^2 - 9t^2 + 9 = 9 - t^2 > 0$$

$$x = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2} \quad (\text{п.к. } 9-t^2 > 0, \text{ } x \text{ действительна}) \quad t \in (-3; 3)$$

$$x_1, x_2 > 0$$

$$x_1, x_2 = 9t^2 - 9 \quad \text{из неотрицательности}$$

$$9(t^2 - 1) > 0 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} t \in (-3; 3) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^7 \Rightarrow (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b+3) = 19p^7; \quad \therefore p^7$$

$$a - b = 12 \Rightarrow a + b = 2b + 12$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^7$$

$$\begin{matrix} 2b+12 \\ = 2(b+6) \end{matrix} \div 2 \Rightarrow 19p^7 \div 2 \stackrel{19 \times 2}{=} p^7 \div 2 \stackrel{\text{простое}}{=} p \div 2 \Rightarrow p = 2$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 2^7 = 16 \cdot 19 \quad a$$

$$2b+15 = 2(b+7) + 1 \div 2 \Rightarrow (2b+12) \div 16$$

н.к. 19 - простое, и  $2b+15 > 12$ , если  $(2b+12) \div 19$ ,  $(2b+15)$  не делится.

А так ни одного прост. дел. для  $(2b+12) \div (2b+15)$ , тогда возможно  $\Rightarrow (2b+12) \div 19 \Rightarrow 2b+12 = 16; 2b+15 = 19$

$$\Rightarrow b = \frac{16-12}{2} = 2 \Rightarrow a = 2+12 = 14$$

Ответ:  $a = 14; b = 2$

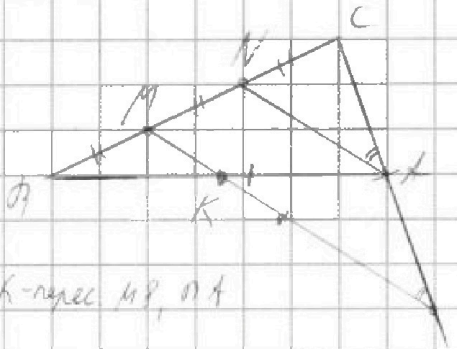


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$BM = MN = NC$ ;  $M, N \in BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{3}$

$AB = CA$   $MS \parallel NA$

$BC = 6$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$  [Косинус  $\neq 1/3$ ]

$K$  - серед  $MS, SA$

$MS \parallel NA$ ,  $MN = NC \Rightarrow NK$  - сред  $MS$   $\triangle MSK \rightarrow \triangle NPK \sim \triangle NKC$   
 $\Rightarrow \angle CKN = \angle KSN$

$MK$  - ср.  $MS$   $\triangle MSK \sim \triangle NPK \Rightarrow PK = KN = CL = AP = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \angle KAP = \frac{1}{2}(\text{угн } A) \Rightarrow \angle PKN = \angle KPN \Rightarrow \triangle KAP \sim \triangle PKN \Rightarrow 2\angle CAN$

теор. кос  $\triangle KPN$

$KN^2 = 2 \frac{AB^2}{4} - 2 \frac{AB^2}{4} \cos(180^\circ - 2\angle CAN) =$

$= \frac{AB^2}{2} (1 + \cos(2\angle CAN)) = \frac{AB^2}{2} (1 - \frac{3}{4}) = \frac{AB^2}{8}$   $KN = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$

$\cos(2\angle CAN) = 1 - 2\sin^2(\angle CAN)$

$\frac{AB^2}{8} \sin^2(\angle CAN) = 1 - \cos^2(\angle CAN) \Rightarrow \cos^2(\angle CAN) = 1 - \frac{1 - \cos(2\angle CAN)}{2}$

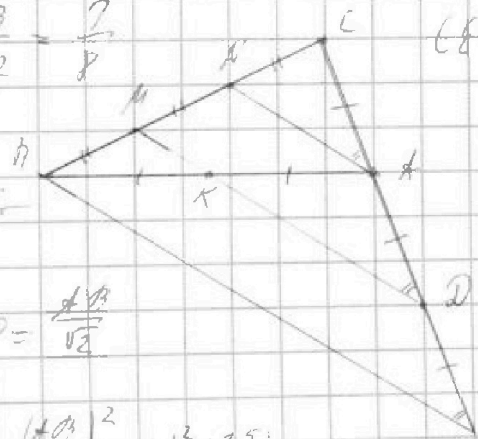
$= \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\angle CAN)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

$\cos(\angle CAN) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

теор. кос  $\triangle BAE$   $\triangle NAK$

проведем  $BE \parallel NA$ ;  $E \in CD$

$\triangle BAE \sim \triangle KAP \Rightarrow BE = 2KP = \frac{AB}{\sqrt{2}}$



$CE = \frac{1}{3}AC$

теор. кос  $\triangle BCE$ :  $BC^2 = (\frac{2}{3}AB)^2 + (\frac{AB}{\sqrt{2}})^2 + AB^2 (\frac{2}{3}) \cos(\angle CAN)$

$\frac{AB^2}{9} (2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = AB^2 (2 + \frac{3}{8}) = AB^2 \cdot \frac{19}{8} = BC^2 = 6^2 = 36$

$AB^2 = \frac{36}{\frac{19}{8}} = \frac{36 \cdot 8}{19} = \frac{288}{19} \Rightarrow AB = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{19}} = \frac{12\sqrt{38}}{19}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

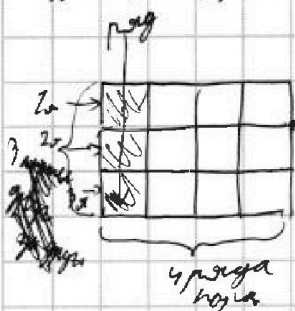


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. все деревья разного роста, терминал, обшит, ослепит-  
руши их по росту и позовам ~~т.о.~~ самого низкого  
"7", следующего "2" и т.д.



Всего  $2 \cdot 3 = 72$  партов

$72 - 11 = 61 \Rightarrow$  партов свободно всего 7-а партов  $\Rightarrow$   
параллель с 3 ряда партов, полностью  
заполненные позовом их партами.

кусочек  $\rightarrow$   
частично расширяем участок на заданных условиях

если выберем 3 человека, которые будут сидеть  
на партах, их рассада справа от них  
за 1й партой, средний за 2й, выходящий за 3й  
 $\Rightarrow$  так-то все заданные значения партов  
 $C_{11}^3$  (способы выбрать 3 человека из 11)  
оставшийся партом -  $C_5^1$  (так при фиксации

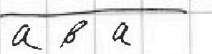
1-й ряду

$$9 \cdot 6 - C_5^3 \Rightarrow \text{сумма } C_{11}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_5^3 = \frac{11!}{3! \cdot (11-3)!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} =$$

$$= \frac{11!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!}$$

при выбранной заданности всех партов рядов  
остается 2 человека, находящиеся на терминалах -  
тогда a, b (a < b)

сумма 4 способа



отражаются м.к.  
перед и после сидят  
участки роста ca, bza

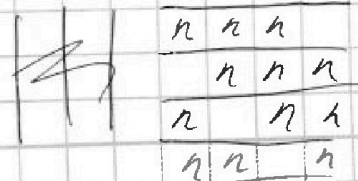
на рассаду на  
оставшихся партах:

$\Rightarrow$  всего в 4 ряда различные способы рас-  
сады человек, а/б/с/е по порядку рядов

$$\frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 11!}{(3!)^3}$$

сумма  $C_3^1$  в том, рассмотрим партия рядов:

$\Rightarrow$  всего  $\frac{2 \cdot 11!}{3!^3} \cdot 3 = \frac{22!}{3!^3}$  ответ  $\frac{11!}{24}$



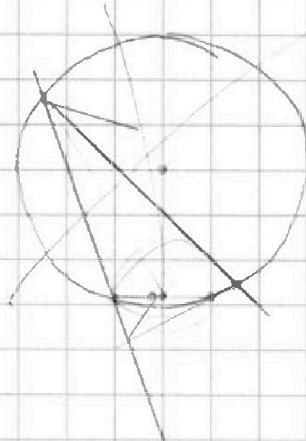
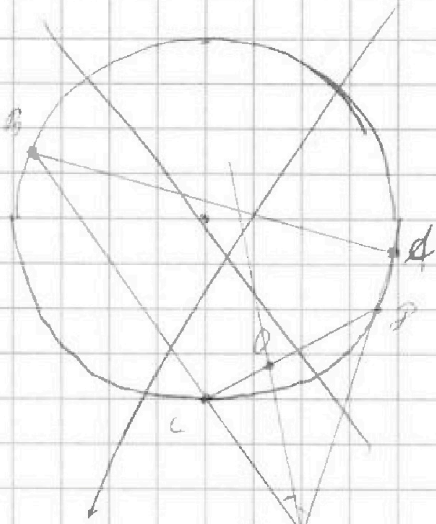


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

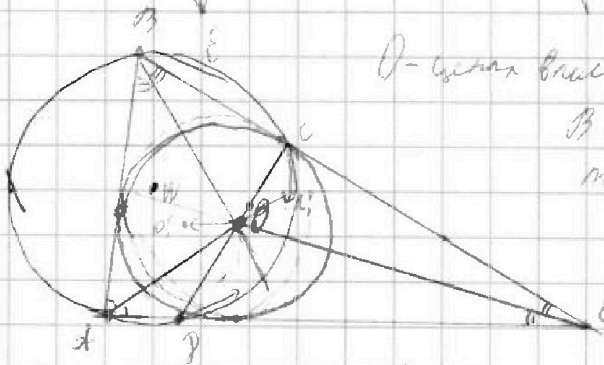
- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



U-34. Крестиком  
отметить номер задачи  
и номер страницы



O - центр окружности  $\Rightarrow$   $AO = BO = CO = RO = EO = r$   
 $BE = r$   
 $AO = BO = CO = RO = EO = r$   
 $AO = BO = CO = RO = EO = r$

$$\vec{EO} = \vec{EO} + \vec{BO} = \vec{EO} + \vec{CO}$$

Решение задачи 1, 2 и 3

сделан  $O$  центр окружности  $\Rightarrow$   $AO = BO = CO = RO = EO = r$

$\angle ABO = \angle ACO \Rightarrow C, B, A, O$  лежат на одной окружности

$\angle ABO = \angle ACO$

значит если соединить  $OB$  и  $OC$ ,

то  $\angle ABO = \angle ACO$

$\angle ABO = \angle ACO \Rightarrow C, B, A, O$  лежат на одной окружности

$\Rightarrow$   $\angle ABO = \angle ACO$

все в  $\triangle ABO$ , в  $\triangle ACO$ , окружность

от  $PC$  и  $PO$  и  $AO$  и  $CO$  (лучше - углы  $PC$ )

(лучше - углы  $PC$ )





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть всего  $n$  деревьев

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой, значит, вершины которого - деревни, а ребра - дороги (или соединенные между собой дерев. если \* перекресток через другие деревни дороги) связный

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой  $n$ -м способом, в  $n$  есть циклов  $\Rightarrow$   $n-1$  ребро.

в дереве  $n$  вершин  $n-1$  ребро

$\Rightarrow$   $5+6+7+9+(n-4)$   $n-4$  деревень, с которыми соединяется каждая деревня

$$\frac{5+6+7+9+(n-4)}{2} = n-1 \quad (\text{каждая степень вершина имеет удв. число ребер})$$

$$23+n = 2n-2$$

$$23+n = 2n-2$$

$$25 = n$$

Ответ: на ветловке 27 деревень всего: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2(x-2y-x^2-y^2)} + \sqrt{7-|x-y-1|} = 2 \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y \in \mathbb{Z}$$

логар. вып.  $\geq 0 \Rightarrow |x-y-1| \leq 1; 2x \geq 2y+x^2+y^2$

$$7-|x-y-1| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{7-|x-y-1|} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \geq 2-1=1$$

$$|x-y-1| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y-1 \leq 1 \Rightarrow x-y \leq 2 \\ x-y-1 \geq -1 \Rightarrow x-y \geq 0 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y \in \{0, 1, 2\}$$

пусть

$$x-y=0$$

$$x=y$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{7-|x-y-1|} = \underbrace{\sqrt{-2x^2}}_{\text{невозм}} + \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$$

пусть  $x-y=1$

$$x=y+1$$

$$\sqrt{2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2} + \sqrt{7-|1-1|} = \sqrt{2y+2-2y-y^2-2y-7-y^2} + \sqrt{7} =$$

$$= \sqrt{-2y^2-2y+1} + 7 = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-2y+1} = 7$$

$$-2y^2-2y+1 = 49$$

$$-2y(y+1) = 48$$

$$y = 0; -7$$

$$x = 1; 0$$

пусть  $x-y=2$

$$x=2+y$$

$$\sqrt{2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2} + \sqrt{0} = \sqrt{4-2y^2-4y-4} = \sqrt{-2y(y+2)} = 2$$

$$-2y(y+2) = 4$$

$$-2y^2-4y-4 = 0$$

$$y^2+y+2 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \Rightarrow \text{корней } y \text{ нет. следовательно}$$

случай  $x-y=2$  невозможен

$$\text{Ответ: } (x, y) \in \{(0, 1); (1, 0)\}$$





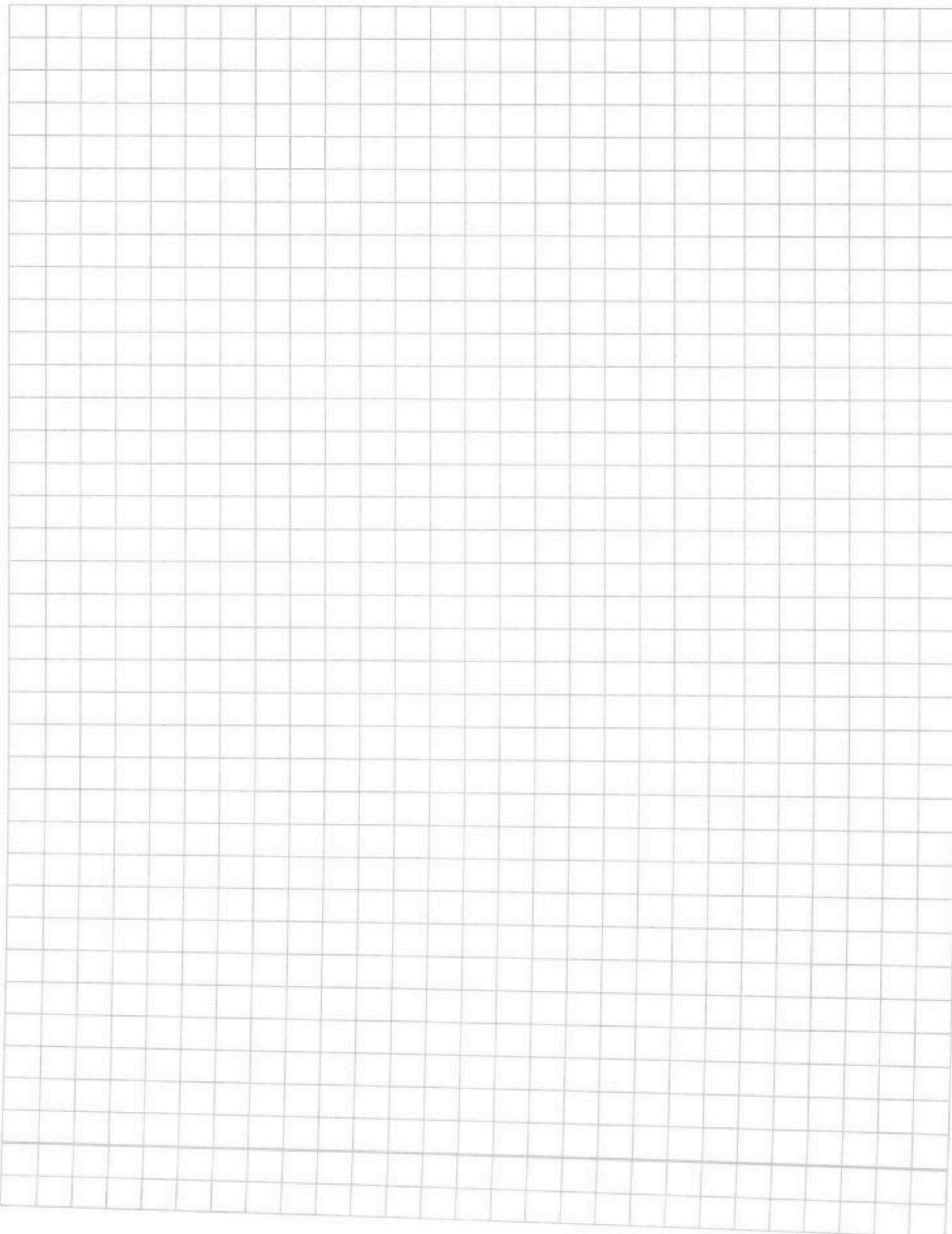
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k$ :

$a_1: k-2 \cos$   
 $a_2: k, 2k-k-a_1-1$   
 $a_3: k-a_2, k-a_1$

$x(2-x) - y(2+y)$   
 $2x+2y - (x+y)^2 + 2xy$   
 $x(2+y) - y(2-x) - (x+y)^2 > 0$   
 $x^2 + y^2 + 9 = 0$   
 $9/y = 76 - 9$

$3^2 = 9 \cdot 28 / 8$   
 $5+8+7+9 = 71+9+7+27$

$2-7+2-8+7+11-11+1 = 2$   
 $+ \sqrt{7-11-1} = 2$

$AC = 6$   
 $\cos(120^\circ) = \dots$   
 $\cos(180-2\alpha) = \dots$   
 $\cos(180-2\alpha) = -\cos(2\alpha)$   
 $AE^2 = 2AD^2 - 2BD^2 \cos(180-2\alpha) =$   
 $= 2AD^2 (7 - \frac{3}{4}) = \frac{2AD^2}{4}$   
 $BE = \frac{AD}{2}$   
 $BC^2 = BE^2 + 0.25 AD^2$

$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4} = 7 - 2 \sin^2 \alpha$   
 $2 \sin^2 \alpha = \frac{11}{4}$   
 $\sin^2 \alpha = \frac{11}{8}$   
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{8}}$

$\cos^2 \alpha = 7 - \sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$   
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$   
 $\tan 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 2\alpha}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

