МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 6$, $\cos(2\angle \underset{CAN}{CEM}) = -\frac{3}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 4\sqrt{2}\,t\,x + 9t^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x_1; x_2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow D > 0$

$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2}t)^2 - 9(t^2 - 1) = 8t^2 - 9t^2 + 9 = 9 - t^2 > 0$

$x = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2}$ (т.к. $9-t^2>0$, x действительны) $\quad t \in (-3;3)$

$x_1 x_2 > 0$

$x_1 x_2 = 9t^2 - 9$ из теор. Виета

$9(t^2-1) > 0 \Rightarrow t \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

$\begin{cases} t \in (-3;3) \\ t \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow$ Ответ: $t \in (-3;-1) \cup (1;3)$

$a - b = 12 \quad a, b \in \mathbb{N}$

$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4 = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3)$

$\Rightarrow (a+b)(a+b+3) \vdots 19; \vdots p^4$

$a - b = 12 \Rightarrow a + b = 2b + 12$

$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$

$2b+12 = 2(b+6) \vdots 2 \Rightarrow 19p^4 \vdots 2 \Rightarrow p^4 \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2 \Rightarrow p = 2$ ($19 \not\vdots 2$; p – прост)

$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 2^4 = 16 \cdot 19$

$2b+15 = 2(b+7)+1 \not\vdots 2 \Rightarrow (2b+12) \vdots 16$

т.к. 19 – прост, и $2b+15 > 17$, если $(2b+12) \vdots 19$, $(2b+15)$ не включ. ~~при~~ ни одного прост. ~~множ~~ дел. ~~при~~ $(2b+12)(2b+15)$, что невозможно. $\Rightarrow (2b+12) \not\vdots 19 \Rightarrow 2b+12 = 16;\ 2b+15 = 19$

$\Rightarrow b = \dfrac{16-12}{2} = 2 \Rightarrow a = 2+12 = 14$

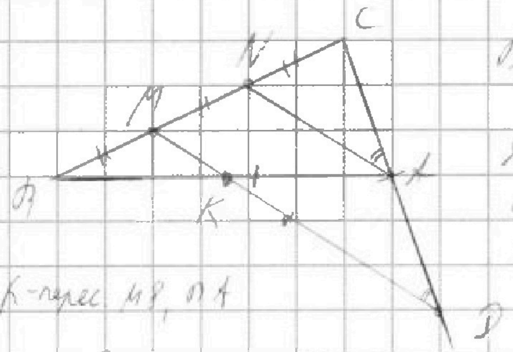
Ответ: $a = 14;\ b = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$BM = MN = NC$; $M, N \in BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{3}$

$AB = CD$ $\quad MD \parallel NA$

$BC = 6$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$ $\quad$ | Найти AB

K-перес. MD, BA

$MD \parallel NA$, $MN = NC \Rightarrow NA$ – сред. лин. $\triangle MDC \Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle NAC$
$\Rightarrow \angle CAN = \angle CDM$

MK – ср. лин. $\triangle$ ~~BNA~~ $\Rightarrow BK = KA = CA = AD = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \triangle KAD$ – р/б (осн. KD) $\Rightarrow \angle DKA = \angle ADK \Rightarrow \angle KAD = 180^\circ - 2\angle CAN$

теор. кос ($\triangle KAD$)

$$KD^2 = 2\frac{AB^2}{4} - 2\frac{AB^2}{4}\cos(180^\circ - 2\angle CAN) =$$

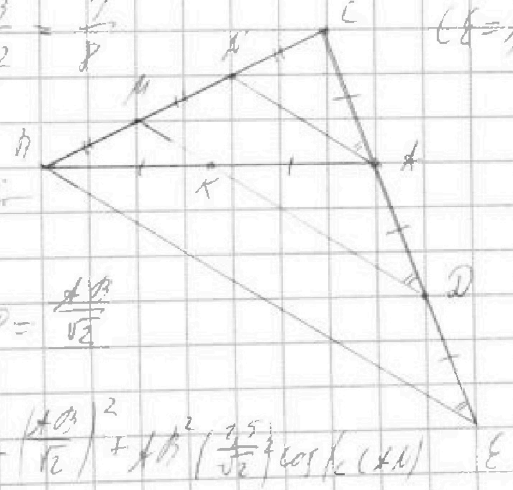
$$= \frac{AB^2}{2}(1 + \cos(2\angle CAN)) = \frac{AB^2}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{AB^2}{8} \quad KD = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$$

$\cos(2\angle CAN) = 1 - 2\sin^2(\angle CAN)$

$\sin^2(\angle CAN) = 1 - \cos^2(\angle CAN) \Rightarrow \cos^2(\angle CAN) = 1 - \frac{1 - \cos(2\angle CAN)}{2} =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\angle CAN)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

$\cos(\angle CAN) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$



$CE = 1{,}5\,AB$

~~теор. кос ($\triangle BAC$) ($\triangle NAC$)~~

проведем $BE \parallel NA$; $E \in CD$

$\triangle BAE \overset{2}{\sim} \triangle KAD \Rightarrow BE = 2KD = \frac{AB}{\sqrt{2}}$

теор. кос (BCE): $BC^2 = (1{,}5AB)^2 + \left(\frac{AB}{\sqrt{2}}\right)^2 + AB^2\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{2}}\right)\cos(\angle CAN)$

$$AB^2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2{,}25\right) = AB^2\left(2{,}75 + \frac{3}{8}\right) = AB^2 \cdot 3\frac{1}{8} = BC^2 = 6^2 = 36$$

$$AB^2 = \frac{36}{3{,}125} = \frac{36 \cdot 8}{25} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{25} \Rightarrow AB = \frac{3}{5} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{5} = 2{,}4\sqrt{2}$$ Ответ

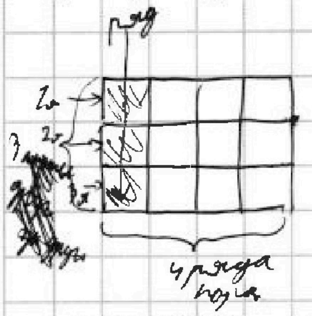
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

т.к. все ученики разного роста, неравн. отн. отсортируем их по росту и назовём ~~то "1"~~ самого низкого "1", следующего "2" и т.д.



всего $4\cdot 3=12$ парт

$12-11=1$ ⇒ ~~так парта~~ свободна всего 1-а парта ⇒ гарантир. есть 3 ряда парт, полностью заполненных. назовем их полными.

~~пусть~~

~~начнем~~ рассаживать учеников ~~по рядам слева направо~~

~~пусть~~

если выбрать 3 ученика, которые ~~ряд~~ будут сидеть на полном ряду, их рассадка однозначна: низший за 1й партой, средний на 2й, высочайший за 3й

⇒ ~~то~~ к-во спб заполнить самый левый полный ряд C_{11}^3 (способы выбрать 3 человека из 11)

~~самый~~ следующий полный — C_8^3 ~~сам~~ при фиксированном 1-м ряде

3-й — C_5^3 ⇒ сущ. $C_{11}^3\cdot C_8^3\cdot C_5^3=\frac{11!}{3!\cdot(11-3)!}\cdot\frac{8!}{3!(8-3)!}\cdot\frac{5!}{3!(5-3)!}=$

$=\frac{11!}{3!\cdot 8!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{11!}{(3!)^3\cdot 2!}$

при выбранном заполнении всех полных рядов остаётся 2 ученика, находящихся на неполном — a, b (a<b)

~~—~~ сущ. 4 способа их рассадить на оставшийся ряд:

a	b	a	
		b	a
b	a		b

b	
c	b
	a

отбрасываются т.к. перед идущим сидеть уч-ка роста < a, b>a

⇒ всего в 4 раза больше способов рассадки учеников ~~а~~ (без учета порядка рядов)

$\frac{11!}{(3!)^3\cdot 2!}\cdot 4=\frac{2\cdot 11!}{(3!)^3}$

сущ. C_4^3 вар. расставить полные ряды:

n	n	n	
	n	n	n
n		n	n
n	n		n

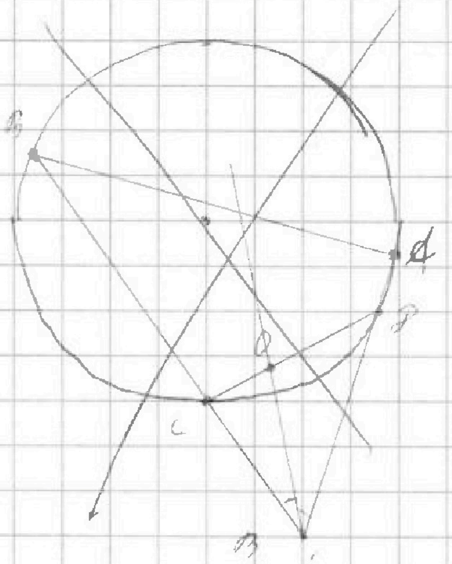
⇒ всего $\frac{2\cdot 11!}{3!^3}\cdot 4=\frac{11!}{3^3}$ ответ $=\frac{11!}{27}$

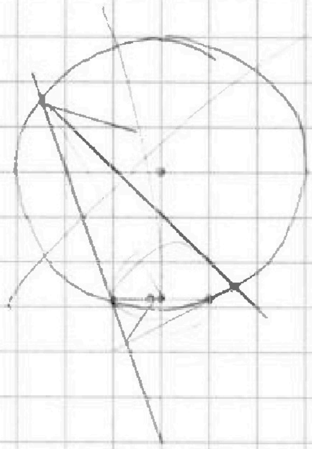
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

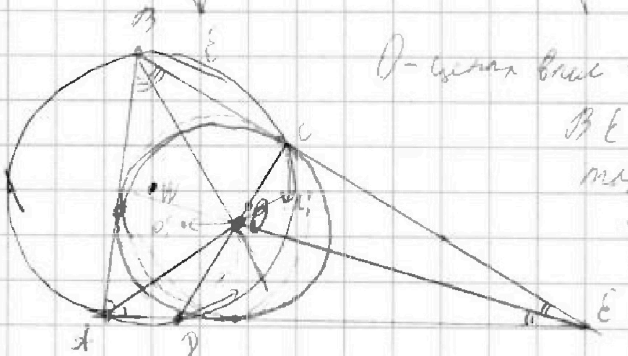
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



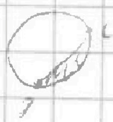


O – вн. пр-ть описан около четырехуг ОСД



O – центр впис в △ABE окр ⇒ BO – бисс ∠ABC
BE = DC EO – бисс ∠DEA
пер (DE + DO)
$\vec{EO} = \vec{ED} + \vec{DO} = \vec{EC} + \vec{CO}$

Ок, зафиксируем A, B и сдвинем O ~~...~~ в O_1' в пределах △ABO
$\angle ABO_1' < \angle ABO \Rightarrow C', D'$ ~~двинутся~~ C' сдвинулся по ∠C
$\angle BAO_1' < \angle BAO$ D' против ∠C ⇒ отр C'D' лежит
вне △ABO'; в этой стороне DE
углом если сдвинуть OB уг. DC, отр DC и ~~...~~ малой дугой DC
D уже сдв по ∠C (далее – уголок DC)
C против ∠C ⇒ $D_1' C_1'$ будет вне уг. DC ⇒ ~~нет~~ вне O



пусть всего n деревень

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой, граф Г, вершины которого – деревни, а рёбра – дороги (верш. соед., если между соотв. дерев. есть ~~*~~ непрох. через другие деревни дорога) связный

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой 1-м способом, в Г нет циклов => Г – дерево.

в дереве на n вершинах $n-1$ рёбер

=>

$$\frac{5+6+7+9+(n-4)}{2} = n-1$$

$n-4$ деревень, в которые входит 1-а дорога

(сум. степеней вершин есть удв. число рёбер)

~~23~~ $\frac{23+n}{2} = n-1$

$23+n = 2n-2$

$25 = n$

~~Отв~~ на острове 25 деревень Ответ: 25

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2 \quad x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$

подкор. выр. $\geq 0 \Rightarrow |x-y-1|\leq 1$; $2x\geq 2y+x^2+y^2$

$1-|x-y-1|\leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-|x-y-1|}\leq 1 \Rightarrow \sqrt{2x-2y-x^2-y^2}\geq 2-1=1$

$|x-y-1|\leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y-1\leq 1 \Rightarrow x-y\leq 2 \\ x-y-1\geq -1 \Rightarrow x-y\geq 0 \end{cases} \quad x-y\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-y\in\{0;1;2\}$

пусть

$x-y=0$

$x=y$

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=\underbrace{\sqrt{-2x^2}}_{\text{невозм}}+\sqrt{0}$

пусть $x-y=1$

$x=y+1$

$\sqrt{2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2}+\sqrt{1-|1-1|}=\sqrt{2y+2-2y-y^2-2y-1-y^2}+\sqrt{1}=$

$=\sqrt{-2y^2-2y+1}+1=2$

$\sqrt{-2y^2-2y+1}=1$

$-2y^2-2y+1=1$

$-2y(y+1)=0$

$y=0,-1$

$x=1,0$

пусть $x-y=2$

$x=2+y$

$\sqrt{2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2}+\sqrt{0}=\sqrt{4-2y^2-4y-4}=\sqrt{-2y(y+2)}=2$

$-2y(y+2)=4$

$-2y^2-4y-4=0$

$y^2+2y+2=0$

$D=4-4\cdot 2\cdot 1=-4 \Rightarrow$ корней у выр. нет $\Rightarrow$ случай $x-y=2$ невозможен

Ответ: $(x,y)\in\{(0,-1);(1,0)\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7	СТРАНИЦА
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

k:

из каньонов, 2 в новые

a_1 — a_1: $k-2$

a_2 — a_2: $k-a_1-1$

a_3 — a_3: $k-a_2$

$(n-1)$

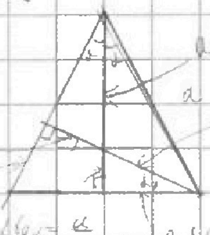
$x(2-x)-y(2+y)$

$2x-2y-(x+y)^2+2xy$

$x(2+y)-y(2-x)-(x+y)^2>0$

$5+6+7+9=$

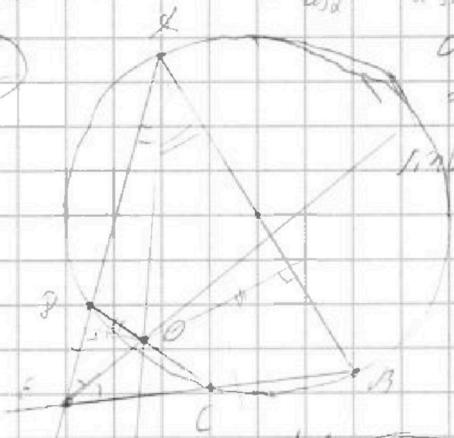
$=11+9+7=27$

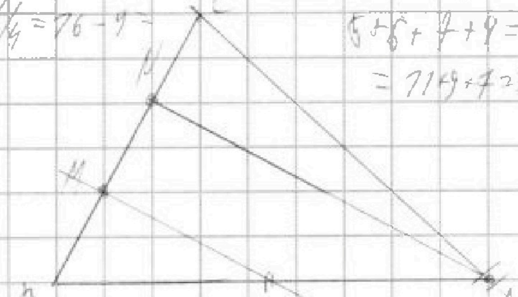


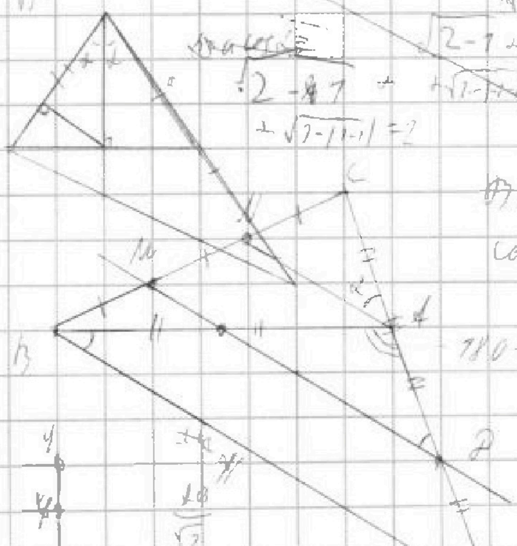
$a\,tg\,\alpha$

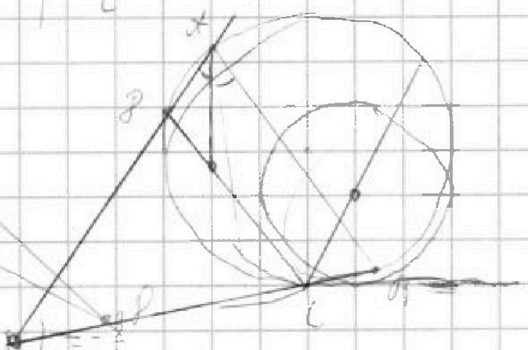
$\cos 2\alpha = \frac{a-2a\sin^2\alpha}{a}$

$=1-2\sin^2\alpha$









$BC=6$

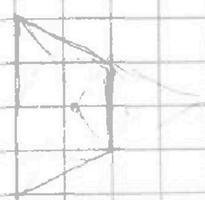
$\cos(180-2\alpha) = -\cos(2\alpha)$

$180-2\alpha$

$BE^2 = 2BA^2 - 2BA^2\cos(180-2\alpha) =$

$= 2BA^2\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{2BA^2}{4}$

$BC^2 = BE^2 + 0{,}25\,AD^2 -$



$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4} = 1-2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = \frac{7}{4}$

$\sin^2\alpha = \frac{3{,}5}{4}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = \frac{1}{8}$ $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!