



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CDM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 размыкает корня $\in \mathbb{R}$ при $D \geq 0$. №2.

По т. Виета $\frac{9(t^2-1)}{7} \geq 0$ (условие $x_1 \cdot x_2 \geq 0$)
Анализ

$$D = 32t^2 - 36(t^2 - 1)$$

$$\begin{cases} t^2 - 1 > 0 \\ -4t^2 + 36 > 0 \end{cases} \begin{cases} t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ t^2 - 9 < 0 \Rightarrow t \in (-3; 3) \end{cases}$$

~~$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$~~

Ответ: $(-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3)$$

$$a - b = 12 \Rightarrow a = 12 + b$$

$$(2b + 12)(2b + 15) = 19p^4$$

$$2(b+6)(2b+15) = 19p^4 \Rightarrow p^4 : 2, \text{ так } p - \text{ простое} \Rightarrow$$

$$p = 2 \text{ (единственное четное простое число)}$$

$$(2b + 12)(2b + 15) = 19 \cdot 16, \text{ пусть } 2b + 12 = x, x \in \mathbb{N}$$

$$x(x+3) = 19 \cdot 16$$

$$x^2 + 3x - 304 = 0$$

$$D = 9 + 1216 = 1225 = 35^2$$

$$x = \frac{-3 \pm 35}{2}, \text{ так } x > 0 \Rightarrow x = 16$$

$$\begin{aligned} b &= 2 \\ a &= 14 \end{aligned}$$

$$b = \frac{16 - 12}{2} = 2$$

$$a = 12 + b = 14$$

Ответ: 14, 2

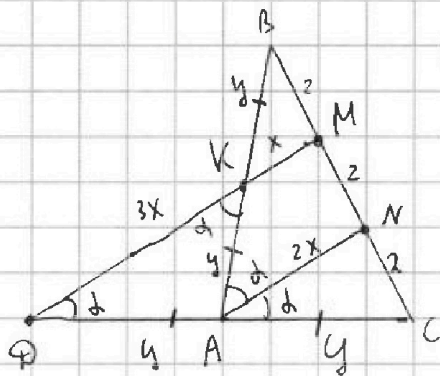


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Из условия } BK = MN = NC = \frac{6}{3} = 2$$

По Т. Чопула $BK = KA$; $\angle A = \angle C$

$$AB = AC \Rightarrow BK = KA = AD = AC = y$$

$$\text{Ср. линия: } 2KM = AK = 2x,$$

$$2AN = DM = 4x \Rightarrow KD = 3x$$

$$\cos 2\alpha = \cos \angle CAN = -\frac{3}{4}, \quad \angle CAN = \alpha$$

$AN \parallel MD \Rightarrow \angle MDC = \alpha$ (соответственные при пер. прямых)

$AD = AK \Rightarrow \angle DKA = \alpha$ (р/д углы при осн.)

$\angle DKA = \angle KAN = \alpha$ (ан. к. $MD \parallel AN$, т.к. углы при осн.)

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

В $\triangle ABC$ Т. косинусов: $6^2 = 4y^2 + y^2 + 4y^2 \cdot \frac{3}{4} = 8y^2$

$$y = \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = 2y = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

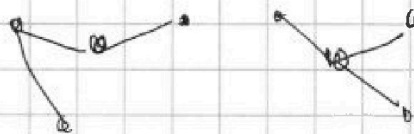
№6 Если 1 из деревень с 1 дорогой соединена с группой таких же, то из них никуда не пойдешь в остальные деревни \Rightarrow

Все деревни с 1 дорогой соединены с деревней с несколькими дорогами. Чтобы из деревни с 1 дорогой поехать

в деревню группу с 1 дорогой надо пройти до узловой деревни по единственной дороге, единственным путем

попасть в группу узловой деревни, и из нее идти к цели. Поэтому узловые деревни соединены

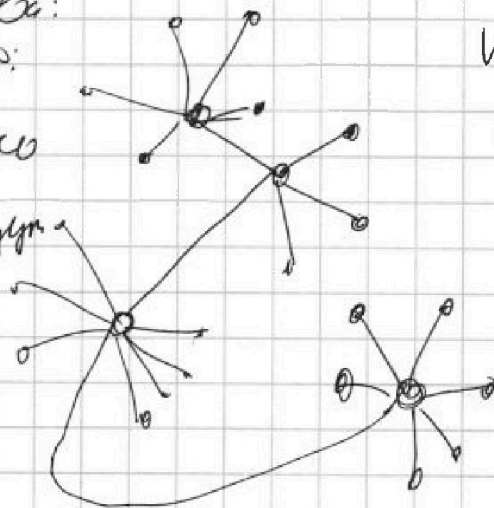
другими дорогами без циклов, поэтому в них 3 ребра



План острова:

сначала считаем из узлов:
 $5 + 6 + 7 + 9 = 27$, то есть

3 дороги не ведут к новым деревням, и они почитают 2 раза. \Rightarrow



Крестиника может

слезка отминусовываться.

Дерево всего 25

$27 - 3 \cdot 2 = 21$ дорог к одиночным деревням, и еще

4 узловые деревни $\Rightarrow 21 + 4 = 25$

Ответ: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

C - число 0 , делит 0 , делится 0 , иначе cc .

$b \in [0, 4]$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab} \leq c$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a^2 + b + 2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} \leq c$$

$$2\sqrt{ab} > 0$$

$$x^2 + y^2 + 2y - 2x \leq 0$$

$$x^2 - y^2 + 2y^2 + 2y - 2x$$

$$1 - |x - y - 1| > 0$$

$$(x-1)(x+y) + 2y(y+1) - 2x + 2(y-x)$$

$$y^2 - x^2 - 2y + 2x + 1 - |x - y - 1| \leq 4$$

$$(x-1)(x+y-2) + 2y^2$$

$$\sqrt{-y(y+2)} + \sqrt{1 - |1+y|} = 2$$

$$0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1$$

$$y < 0 \quad x - y = a, \in \mathbb{Z}$$

~~Анализ~~

и миним.

$$x^2 + y^2 = b, \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{2a - b} + \sqrt{1 - |a - 1|} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$2\sqrt{b} + 1$$

$$x \geq y$$

$$\begin{cases} 2a - b \geq 0 \\ 1 - |a - 1| \geq 0 \\ 2a - b + 1 - |a - 1| \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a \geq b \\ -1 \leq a - 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$0 - 1 \geq 2a - b - 3$$

$$-a + 1 \leq 2a - b - 3$$

$$a \in [0, 2]$$

$$-a \geq -b - 2$$

$$a \leq b + 2$$

$$b + 4 \leq 2a$$

$$b \in [0, 4]$$

$$b \leq 2b + 2 \quad b + 4 \leq b$$

$$0 \leq b + 2$$

$$b \leq 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{a} = ki$ или $\sqrt{a} = k$ ^{нз} \Rightarrow
 если $\sqrt{a} + \sqrt{b} = p, p \in \mathbb{R}$, то
 либо $p=0$, либо $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}$, и тогда $p \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
 поэтому неразумно считать $\sqrt{a} \geq 0$, ~~иначе~~

~~нз~~ $2\sqrt{ab} \geq 0, a, b \geq 0$

$$a+b+2\sqrt{ab} \geq a+b$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}, \text{ поэтому если } \sqrt{a}+\sqrt{b}=2,$$

сделаем замену

$$\text{то } \sqrt{a+b} \leq 2 \Rightarrow a+b \leq 4.$$

$$x-y=a, a \in \mathbb{Z}, x^2+y^2=b, b \in \mathbb{Z}, b \geq 0$$

(*) $\sqrt{2a-b} + \sqrt{1-|a-1|} = 2$ Составим систему с одной

$$\begin{cases} 2a-b \geq 0 & (1) \\ 1-|a-1| \geq 0 & (2) \end{cases}$$

ка внешней. $\sqrt{\quad}$

$$\left[2a-b+1-|a-1| \leq 4 \right] (3)$$

(2) $|a-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 2$

(1) $\begin{cases} b \leq 2a \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq b \leq 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) |a-1| \geq 2a-b-3$$

$$\begin{cases} a-1 \geq 2a-b-3 \\ a-1 \leq b+3-2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq b+2 \\ 3a \leq b+4 \end{cases}$$

$$a=0, b=0 \quad (4)$$

$$a=1, b=0, 1, 2 \quad (5)$$

$$a=2, b=0, 1, 2, 3, 4 \quad (6)$$

переберём все варианты
решения.

$$(4) \sqrt{0} + \sqrt{0} = 2 \quad (\text{н!})$$

$$(5) \sqrt{2-b} + 1 = 2$$

$$\sqrt{2-b} = 1$$

$$2-b = 1$$

$$b = 1$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1 \\ y^2+2y+y^2+1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1 \\ 2y^2+2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1 \\ y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$(0, 1)$ $(-1, 0)$ - решения.

$$(6) \sqrt{4-b} + 0 = 2$$

$$\sqrt{4-b} = 2$$

$$4-b=4$$

$$b=0$$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2 \\ y^2+4y+y^2=0 \end{cases}$$

$$\sqrt{y^2+4y+4}=0$$

компл. корни.

Решения (*) это $(1, 1)$ и $(2, 0)$

Ответ: ~~$(0, 1), (-1, 0)$~~ ; $(1, 0); (0, -1)$

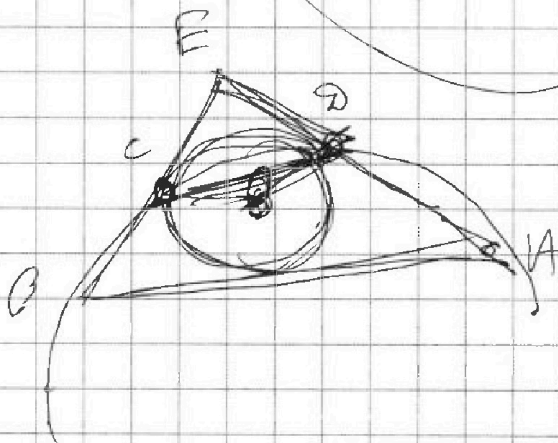
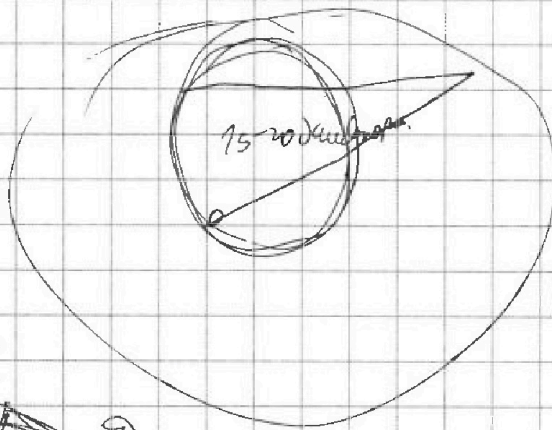
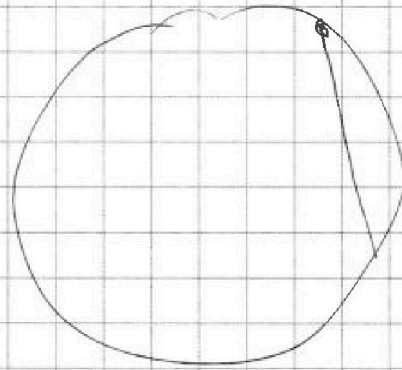
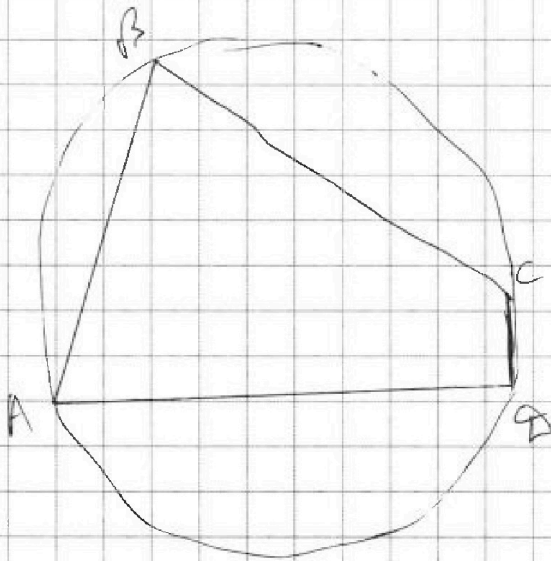


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

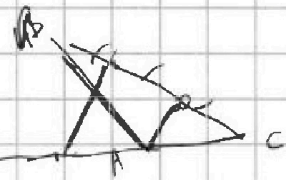
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Gamma \cos \alpha \text{ в } \Delta ABC: \quad 16 = 16x^2 + y^2 + 8xy \cdot \cos \alpha.$

$\cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ 5,7-?



$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \sqrt{1 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$

$1 - 4(1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha = 1 - 4\cos^2 \alpha + 4\cos^4 \alpha$

$\sqrt{(1 - 2\cos^2 \alpha)^2} = 1 - 2\cos^2 \alpha = \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$

30, 60

$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$

~~ген. ге.~~

$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$

$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$-\frac{3}{4} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$

60, 120

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\cos^2 \alpha - 1$

$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} -$

$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

$\frac{1}{4} = 2\cos^2 \alpha$

$\frac{1}{8} = \cos^2 \alpha$

$\cos \alpha = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$-\sin^2 \alpha = -1 + \cos^2 \alpha$

~~ген.~~

8, 5.

4, 4, 4.



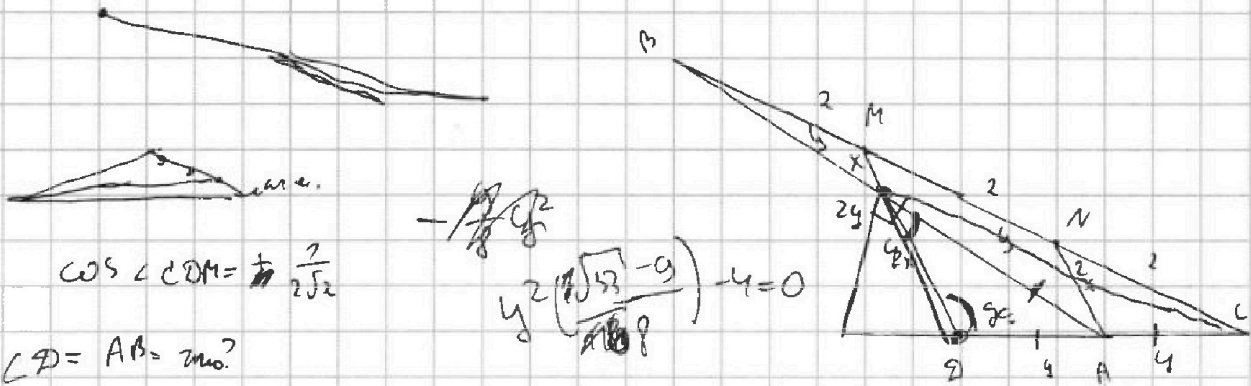


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ _ ИЗ _ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \angle COM = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\angle D = AB = \text{mo?}$$

$$y^2 \left(\frac{\sqrt{33}-9}{16} \right) - 4 = 0$$

$$\cos \text{ для } \triangle ANC: y = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$x^2 + y^2 - \frac{xy}{\sqrt{2}} - 4 = 0 \quad | : y^2$$

$$\left(\frac{x}{y} \right)^2 - \left(\frac{x}{y} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 = 0$$

$$\cos \triangle ABC:$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + 16}}{2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{33}{2}}}{2}$$

$$\frac{2x}{y} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4\sqrt{2}}$$

$$AB = 2y$$

$$\cos \triangle ANC \text{ и } \triangle BMC$$

$$y^2 = 4y^2 + 36 - 24y \cdot \cos \beta$$

$$x = \frac{(-1 + \sqrt{33})y}{4\sqrt{2}}$$

$$x^2 = y^2 + 4 - 4y \cdot \cos \beta$$

$$y^2 - 6x^2 = 4y^2 + 36 - 24y$$

$$y^2 - 2x^2 = 4$$

$$y^2 - 4 = \frac{2(-1 + \sqrt{33})^2 y^2}{16 \cdot 2}$$

$$y^2 - 4 = \frac{y^2}{16} + \frac{y^2 \sqrt{33}}{8} - \frac{33y^2}{16} = 0$$

$$3y^2 - 6x^2 = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ _ ИЗ _ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 19t^2 - 9 = 0 \quad D > 0, \quad x_1 x_2 > 0 \quad \frac{9t^2 - 9}{1} > 0$$

$$\begin{cases} 16 \cdot 2 \cdot t^2 - 4 \cdot 9(t^2 - 1) > 0 & -4t^2 + 36 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9$$

$$D = 64 - 36 \geq 0 \quad 9 > 0$$

$$\begin{array}{c} + & - & + \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ -1 & 1 & 36 \end{array}$$

1 root.

$$a - b = 12$$

$$-\frac{4\sqrt{2}t}{1} > 0$$

$$0 = 12 + b$$

$$320 - 76 = 304$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

p - произв.

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

2 root.

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+2)(2b+15) = 19p^4$$

$$2(b+1)(2b+15) = 19p^4 \Rightarrow p: 2 \Rightarrow p = 2$$

$$2b+15 = 19$$

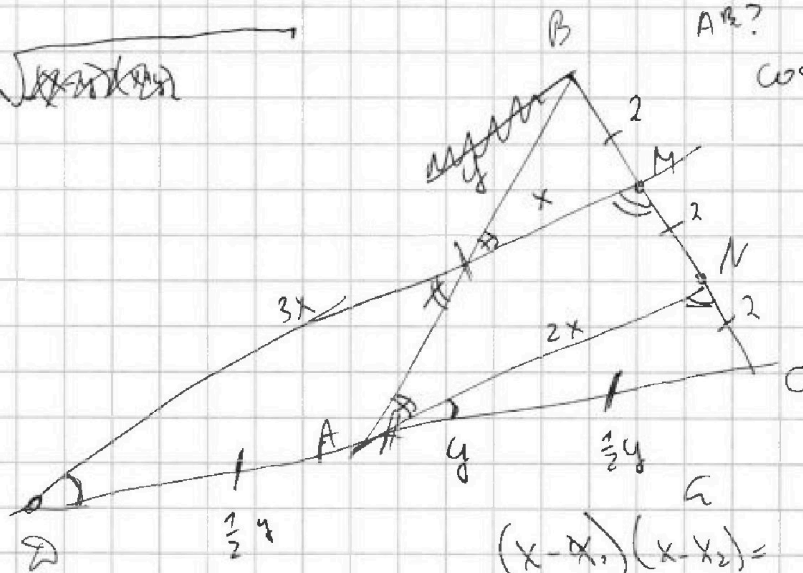
$$b = 2$$

$$c = 24$$

$$-1 < x - 4 < 1$$

$$\sqrt{x(2-x) + y(2-y)} \in (1, 2)$$

~~sqrt(x(2-x) + y(2-y))~~



$$AR? \quad \beta L = 6$$

$$\cos 2\angle CFM = -\frac{3}{4}$$

$$\angle = ? \quad \text{none}$$

$$= \emptyset$$

$$\text{None}$$

$$(x-x_1)(x-x_2) =$$

$$= x^2 - (x_1+x_2)x$$

$$x_1+x_2 =$$