



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
- он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

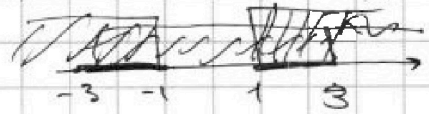
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + (4\sqrt{2}t)x + (9t^2 - 9) = 0$, чтобы у ур-ни было 2 корня, надо $D > 0$,
то есть $32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0 \Rightarrow 36 - 4t^2 > 0 \Rightarrow 9 > t^2$. Также
произв. корней по т. Виета это свободный член $\Rightarrow 9t^2 - 9 > 0 \Rightarrow$

$t^2 > 1$. Отсюда $1 < t^2 < 9 \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$ (если

$t < 0 \Rightarrow t < -1$, иначе $t \geq 0 \Rightarrow t < 3$ ($t^2 < 9 \Leftrightarrow 0 < (t-1)(t+1)$,
 $t^2 < 9 \Leftrightarrow (3-t)(3+t) < 0$)



Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

Заметим, что $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$

$= (a+b)(a+b+3)$, $a+b$ и $a+b+3$ разной четности $\Rightarrow a+b$ или

$a+b+3 : 2 \Rightarrow (a+b)(a+b+3) : 2$, но $(a+b)(a+b+3) = 19p^4$

$19p^4 : 2 \stackrel{(19,2)=1}{\Rightarrow} p^4 : 2 \Rightarrow p=2$ (грубо нечет. и $p^4 : 2 \Rightarrow$)

$(a+b)(a+b+3) = 19 \cdot 16$, пусть $a+b=t \Rightarrow t^2 + 3t = 19 \cdot 16 \Rightarrow$

$(t^2 - 16)(t + 19) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=16 \\ t=-19 \end{cases}$, но $t = a+b > 0$, т.к. $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$t = a+b = 16$, так как $a-b = 12$ сразу вычит $\Rightarrow 2a = 28 \Rightarrow a = 14$

и $b = 2$.

Ответ: $a=14$ и $b=2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

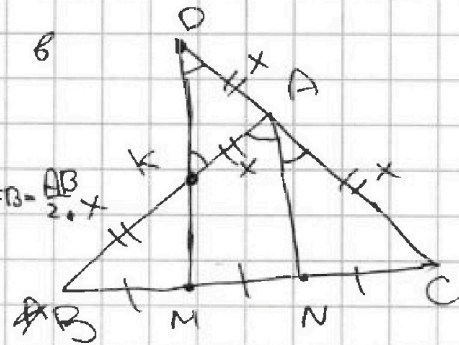
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть DM перес. AB в K , т.к. $\angle B$

$\triangle ABN$ MK - параллельно AN (стор.) и
 $BM = MN \Rightarrow MK$ - сред. линия $\Rightarrow AK = KB = \frac{AB}{2} = x$

$\triangle ABC$ AN - параллельно DM



(сторона) и $MN = NC \Rightarrow AN$ - средняя линия $\Rightarrow AD = AC = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2}$

Значит $AK = AD \Rightarrow \triangle AKD$ - р/д $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$, но

$AN \parallel DM \Rightarrow \angle ADK = \angle ANM$ и $\angle AKD = \angle BAN \Rightarrow \angle ANM = \angle BAN$

$\angle ABC = 2 \angle CAN$. Пусть $AC = x$, тогда $AB = 2x$.

Запишем теорему косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle ABC$$

$$36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos \angle CAN$$

$$36 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$36 = 5x^2 - 3x^2$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (\text{т.к. } x > 0)$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

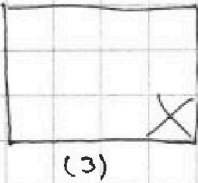
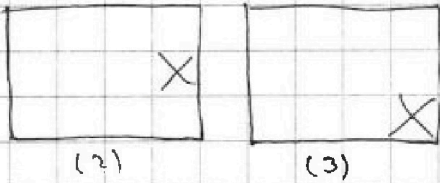
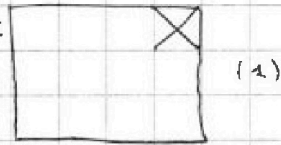
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

ВОО obviously пусть нет узелка в 4 ряду (всего 12 карт и 11 ур. ⇒ ровно 4 парта пуста) тогда есть 3 варианта:



В 1 и 3 случаях мы можем выбрать в 1 ряд 3 узелка (далее они однозначны по росту садятся), далее выбрать 3 узелка

в 2 ряд, далее в 3 ряд и в 4 ряд оставшихся в двух узелков, заметим, что везде узелки садятся однозначно по росту (зато видят ⇒ кресты вить в

рядах мы их ~~не~~ не можем) ⇒ в каждом из

(1) и (3) вариантах по $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ вариантов ⇒ всего 11, 8, 5 карт

всего в (1) и (3) вариантах $2 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ вариантов.

В (2) случае у нас тоже самое, только в 4 ряду

узелки могут садиться как угодно (они оба и так

видят) ⇒ вариантов $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2$ ⇒ всего

вариантов $4 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$, заметим, что

такое же кол-во вариантов будет, если карта свободна в 1 или 2 или 3 ряду ⇒ общее кол-во вар. $16 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$

Ответ: $16 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS.

Заметим, что из вписанности $ABCD \Rightarrow \angle EDC =$

$= \angle CBA = 2\beta$ (обозначим за 2β), тогда

$\angle OBE = \beta$, т.к. BO - бис. $\angle EBA$, т.к.

EO - бис. $\angle BEA \Rightarrow$ давайте сделаем

симметрично точке D относ. EO , пусть B

получилась точка $D' \Rightarrow D'E = DE, D'O = DO \Rightarrow D'E + D'O =$

$= DE + DO$, а также $\angle ED'O = 2\beta$ (также из симметрии)

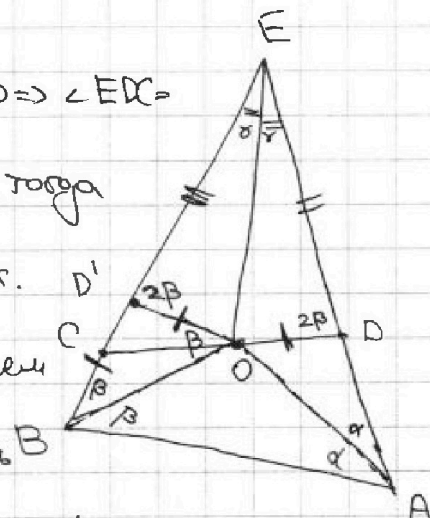
но $\angle ED'O = \angle D'BO + \angle D'OB$ (внеш. для $\angle BDO \Rightarrow$)

$2\beta = \beta + \angle D'OB \Rightarrow \angle D'OB = \beta \Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle D'O B \Rightarrow D'O = D'B \Rightarrow$

$DE + DO = D'E + D'O = D'E + D'B = BE = 12$. Значит всегда

$DO + DE = 12$ всегда.

Ответ: 12.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реш
№6.

Построим граф, где вершины - деревни, дороги - рёбра.

Тогда наш граф - дерево (иначе есть цикл:



, тогда есть 2 пути от верш. к другой?!)

Значит обозначим вершины со степенями 5, 6, 7, 9 "особенными", а со степенями 1 - "не-особенными".

Тогда из не-особенной вершины ребро идет в особенную (иначе \rightarrow и граф не связный?!). Тогда

граф такой. Заметим, что под граф не-особенных вершин тоже дерево (подграф дерева - дерево).

В нем 3 ребра \Rightarrow сумма степеней ~~12~~ вершин

если считать ребра особ. - особ. 6, значит что

оставшиеся ребра забирают у особенных вершин по 1 степени

Значит ребра особ. - не особ. = $5+6+7+9-6=27+9=$
 $= 36 \Rightarrow$ не особ. вершин

Пусть неособенных вершин $k \Rightarrow$ сумма степеней

вершин $1 \cdot k + 5 + 6 + 7 + 9 = k + 27$, а ребер $(k+4) - 1 = k+3$
(кол-во вершин - 1, т.к. дерево) $\Rightarrow k + 27 = 2(k+3) \Rightarrow k = 21 \Rightarrow$
всего деревень $21 + 4 = 25 \Rightarrow$ Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7.

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = \sqrt{2 - \underbrace{(x-1)^2 - (y+1)^2}_{\leq 0}} \leq \sqrt{2}$$

Заметим, что $|x-y-1|$ — целое, неотриц. (модуль ≥ 0),

Также $|x-y-1| \leq 1$ (иначе $1 - |x-y-1| < 0$ (но это

выбран. под корнем \Rightarrow противоречие) $\Rightarrow |x-y-1| = 0$ или

$$|x-y-1| = 1$$

1) $|x-y-1| = 0 \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow x-1 = y \Rightarrow 2 - (x-1)^2 - (y+1)^2 = 2 - x^2 - y^2$

\neq Такого не может быть, т.к. тогда

$$\sqrt{2 - (x-1)^2 - (y+1)^2} = 2, \text{ но этот корень } \leq \sqrt{2}.$$

2) $|x-y-1| = 1$ Тогда $\sqrt{1-|x-y-1|} = 1 \Rightarrow \sqrt{2 - (x-1)^2 - (y+1)^2} = 1$

$$\Rightarrow 2 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (y+1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 + 2y + 1 = 1$$

$$2y(y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{карты } (1;0) \text{ и } (0;-1).$$

2) $|x-y-1| = 1 \Rightarrow \sqrt{1-|x-y-1|} = 0 \Rightarrow \sqrt{2 - (x-1)^2 - (y+1)^2} = 2,$

$$\text{но } \sqrt{2 - (x-1)^2 - (y+1)^2} \leq \sqrt{2} \text{ ?!}$$

Ответ: $(1;0)$ и $(0;-1)$.

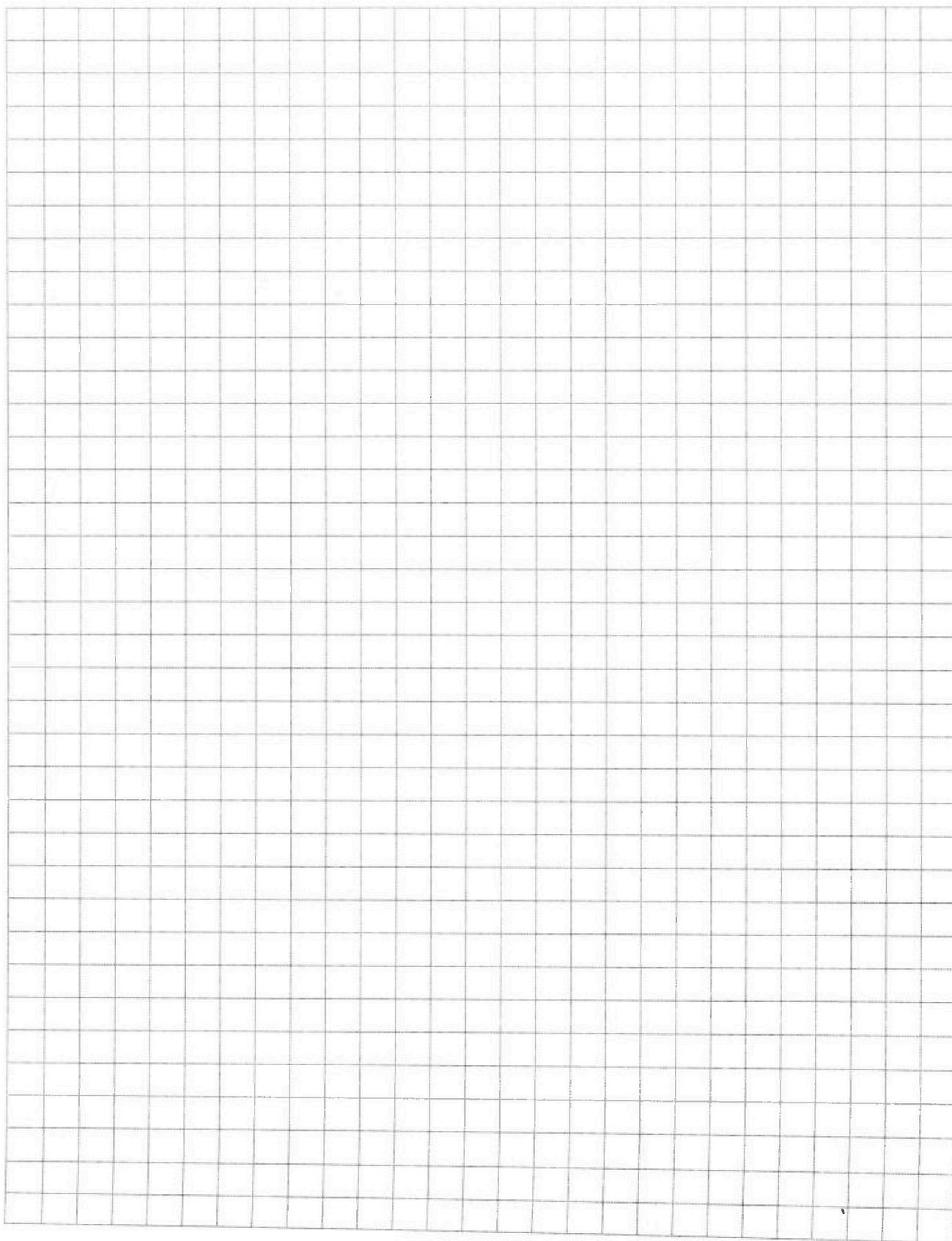


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



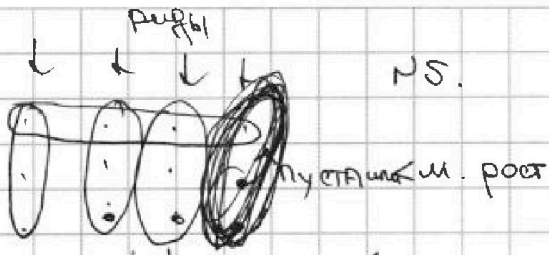
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

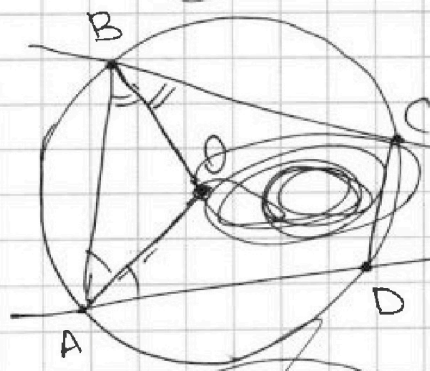
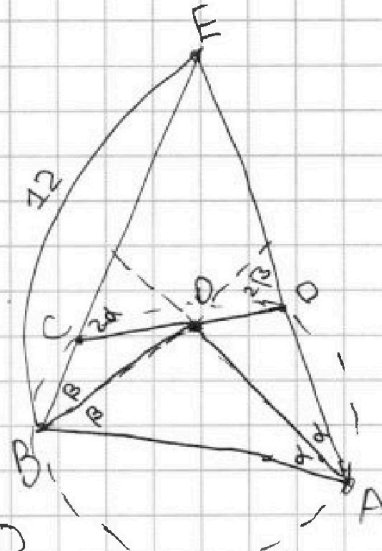
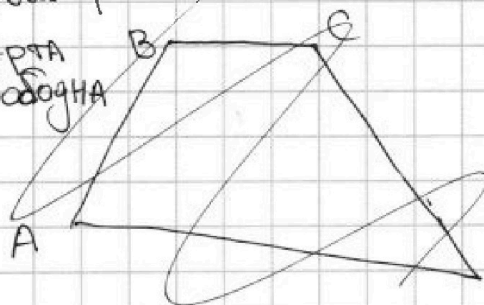
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

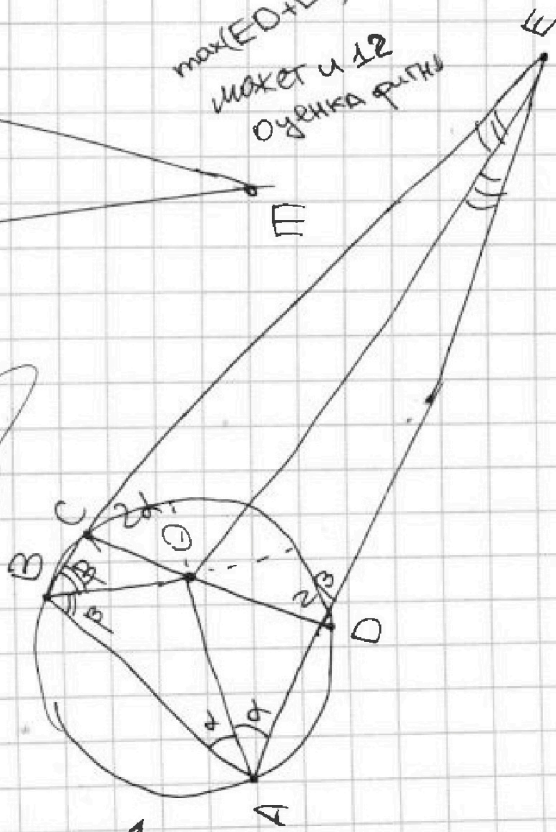
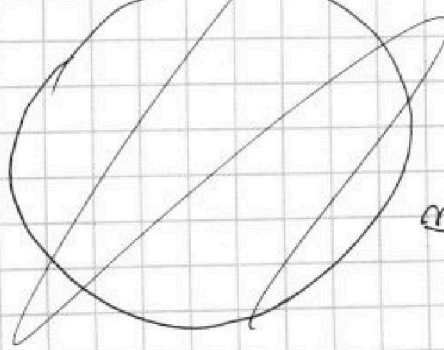


11 угеников
разный рост

1 ПАРТА
свободна
А ПАДА



max(ED+DO)
может и 12
оценка фига



BE=12
max(ED+DO)
BE=12

жесткая довольно конструкция



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$(x-y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x + 2y - 2xy$$

$$* \quad |x-y-1| = t$$

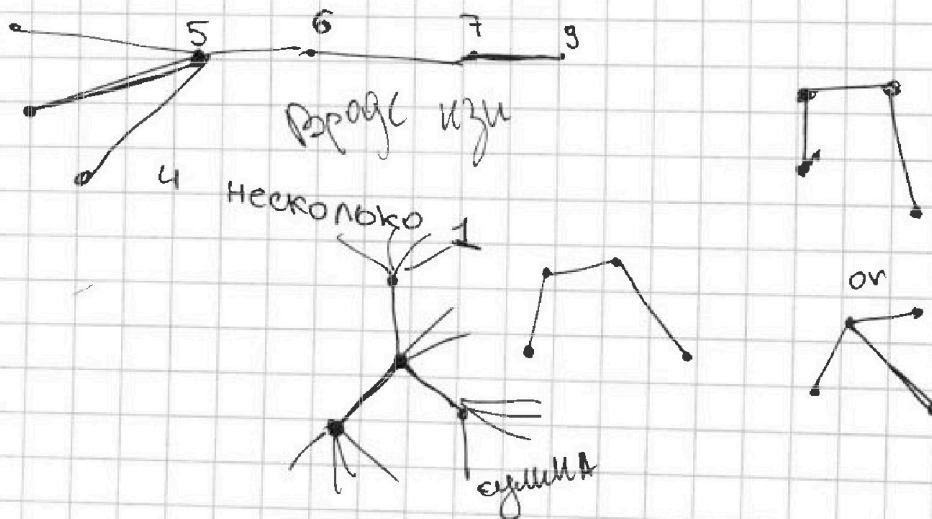
$$t^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x + 2y - 2xy$$

$$-t^2 = 2x - 2y - x^2 - y^2 - 1 + 2xy$$

$$1 - t^2 - 2xy = 2x - 2y - x^2 - y^2$$

~~$$1 - |x-y-1| = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2 + 2$$~~

~~$$\sqrt{-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2} + \sqrt{1 - (x-y-1)^2} = 2$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ 9t^2 - 9 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0 \\ 9(t^2 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32t^2 - 36t^2 + 36 > 0 \\ t^2 > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 9 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow t^2 \in (1; 9)$$

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

№4. $a - b = 12$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$\parallel \\ (a+b)^2 + 3(a+b)$$

Пусть $a+b = t$

$$t^2 + 3t = 19p^4$$

$$t(t+3) = 19p^4 = 19p^2 \cdot p^2$$

$$p=2 \Rightarrow t(t+3) = 19 \cdot 16$$

$$\begin{matrix} t=16 \\ t=-19 \end{matrix} \quad t^2 + 3t - 16 \cdot 19$$

1) $a+b = 16$
 $a-b = 12$

$$\begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$$

2) ~~$a+b = -19$~~

~~$a-b = 12$~~
 a и b кооруп $\Rightarrow X$.

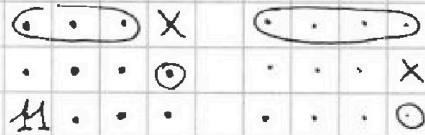
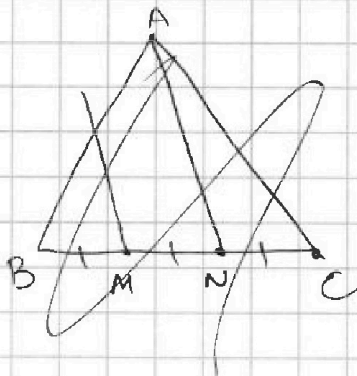


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Много вариантов

Планшет в ААК

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n+1}$$

$$\sqrt{2 - (x-1)^2 - (y+1)^2} + \sqrt{1 - (x-y-1)}$$

$$\sqrt{2 - a^2 - b^2} + \sqrt{1 - |a-b|}$$

$AB = CD$

$BC = 6$

Пусть $\angle COM = \alpha$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

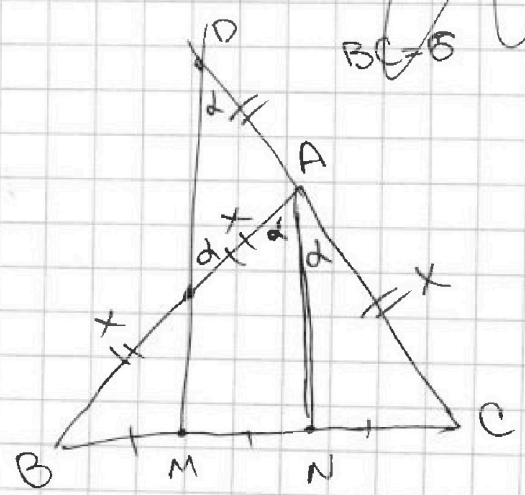
$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$2\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{8}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$

$$36 = x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$36 = 5x^2 + 3x^2$$

$$8x^2 = 36$$

$$2x^2 = 9$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$2\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2-a^2-b^2} + \sqrt{1-a-b+1} = 2$$

$$\begin{aligned} a &= x-1 \\ b &= y+1 \end{aligned}$$

Пусть $a \geq b-1$

$$\begin{aligned} 2ab &\leq a^2 + b^2 \leq 2 \\ ab &\leq 1 \end{aligned}$$

~~уеловик $x \geq y$~~
~~уеловик~~

$$\sqrt{1-|x-y-1|} \leq 1$$

$$x = y+1$$

$$\sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2} = 1$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned} x=1 & \quad y=0 \\ x=0 & \quad y=-1 \end{aligned}$$

Но не факт
может быть и рау.

$$|x-y-1| - \text{уелов}$$

$$1 - |x-y-1| - \text{уелов}$$

$$1 - |x-y-1| = 0$$

$$1 - |x-y-1| = 1$$

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \circ \\ & \Leftarrow \\ & x = y+1 \end{aligned}$$

$$2y^2 + 2y + x = x$$

$$2y(y+1) = 0 \quad \text{все}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$|x-y-1| = 1$$

Пусть $x \geq y+1$

$$\begin{cases} x = y+2 \\ x = y \end{cases}$$

