



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Последнее уравнение $xc^2 + 2\sqrt{3}t \cdot x + (4t^2 - 4) = 0$ имеем $D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) =$
 $= 12t^2 - 16t^2 + 16 = 4(4 - t^2) = 4(2-t)(t+2)$.

П.к. D по условию > 0 (следует из наличия двух различных корней у уравнения), то $(2-t)(t+2) > 0$, $t \in (-2; 2)$.

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t + \sqrt{(2-t)(t+2)}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t - \sqrt{(2-t)(t+2)}$$

Погда произведение $x_1 \cdot x_2 = 3t^2 - \sqrt{3(2-t)(t+2)}$.

$$= 3t^2 - \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t + \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t - (2-t)(t+2) = 3t^2 + t^2 - 4 = 4(t-1)(t+1) > 0$$

$$(t-1)(t+1) > 0 \Rightarrow \text{---} \leftarrow \leftarrow \leftarrow t < -1 \text{ или } t > 1.$$

Погда $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия $a + b = 40$, a и b — натуральные.

$$(a - b)^2 + 15(a - b) = 14p^5, \text{ где } p - \text{простое.}$$

Заметим, что разность $a - b \leq 38$,
(т.к. иначе $b \leq 0$ из $a + b = 40$)

т.к. $a \leq 39$, $a - b \geq 1$. Тогда

$$(a - b)^2 + 15(a - b) = (a - b + 15)(a - b) \leq 38 \cdot (38 + 15) = 2014. \text{ Тогда если } p \text{ хотя бы } 3, \text{ то } 14 \cdot 3^5 = 14 \cdot 243 > 3400 > 2014,$$

то есть равенство точно не будет соблюдаться. Если $p = 2$, то $14 \cdot 2^5 = 14 \cdot 32 = 448$.

Тогда если $a - b = k$, то уравнение имеет вид $k(k + 15) = 14 \cdot (14 + 15)$.

Значит $k_1 = 14$, $k_2 = -32$. В первом случае $a = b + 14$, $a = 40 - b \Rightarrow b = \frac{23}{2}$ — не натуральное число. А во втором случае $a = b - 32$, $a = -b + 40 \Rightarrow b = \frac{72}{2} = 36$ — подходит. Если $b = 36$, то $a = 40 - 36 = 4$.

Ответ: $a = 4$; $b = 36$.

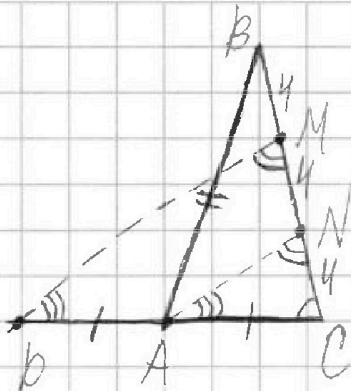
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если $BM = MN = NC = \frac{BC}{3} =$
 $= \frac{12}{3} = 4$ и $AN \parallel MP$, то
 $\triangle NCA \sim \triangle MCK$ (все со-
 ответствующие стороны
 параллельны и соответ-
 ственно ^{углы} углы равны).

с пропорциями вытекает $\frac{NC}{MC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow$
 $CP = 2CA = AB$, $AC = \frac{1}{2} AB$.

Тогда далее заметим, что в
 $\triangle ABC$ $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{CN} \Rightarrow AN$ — биссектриса
 $\angle BAC \Rightarrow \angle BAN = \angle CAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$

Тогда по условию $\cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$.

Тогда по теореме косинусов
 $BC^2 = 444 = AC^2 + \overset{AB^2}{(2AC)^2} - 2\cos(\angle BAC) \times$
 $\times AC \cdot 2AC = 8AC^2$, $AC^2 = 24$, $AC = 2\sqrt{6}$,
 $AB = 2AC = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разберём два таких случая: когда пустое место во втором ^{горизонтальном} ряду или в первом или третьем ^{вертикальном} ряду.

Если оно во втором ^{горизонтальном} ряду, то вариантов для него 3, и для каждого всего $3!$ расположения учеников. Заметим, что из 6 ($3!$) расположений в ряду (без пустого места) ровно одна только ^{каждому} одно подойдёт. Такие рассуждения можно провести и для второго ряда без пустого места. То, как сидят два ученика в ряду с пустым местом, не имеет значения. Значит всего будет $3 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{12}$ способов для этого случая.

Для второго случая расположений пустого места в 6 расположений учеников $8!$, также в каждом ряду без пустого места только 1 из $3!$ расположений трёх учеников будет подходить, и в ряду с пустым местом будет подходить только один из двух расположений (т.к. они сидят подряд и это уже имеет значение).

Значит всего будет $6 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{12}$.

Значит всего существует $\frac{8!}{12} + \frac{8!}{12} = \frac{8!}{6}$ способов посадить 8 учеников в классе, так как $8!$ моды всем было хорошо видно доску.
Ответ: $\frac{8!}{6}$ способов.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если из любой вершины графа можно добраться в любую другую, то граф связный, а если единственным способом — то без циклов. Значит ориентированная сеть на скрепе является деревом (в последующем формате — рёбра, деревья — вершины).

Значит в дереве есть вершины степеней 3, 4, 5, 7 и висячие (степени 1). Чтобы граф сохранил связность, нужно, чтобы вершины степеней 3, 4, 5, 7 были связными (иначе оторвутся ^{или} ~~компоненты~~ ^{или ещё одна} ~~компоненты~~ вида  или ). Тогда заметим, что всего рёбер в графе k (между вершинами степеней 3, 4, 5, 7) $+ (3+4+5+7) - 2k$ (т.к. каждое ребро считается по 2 раза) $= 3+4+5+7 - k = 19 - k$ рёбер.

Если между вершинами 3, 4, 5, 7 хотя бы 3 рёбра (и при этом не более 6 (6 в полном графе на четырёх вершинах)), то $19 - 2k$ (число рёбер k висячих вершин, равное их количеству) $\geq 19 - 2 \cdot 6$ и $\leq 19 - 2 \cdot 3 \Rightarrow$ количество висячих вершин 7, 9, 11 или 13 (т.к. $2k$ всегда чётно, то $19 - 2k$ всегда нечётно), а значит всего вершин (дерева) 11, 13, 15 или 17.

Ответ: 11, 13, 15, 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

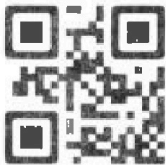
В выражении $\sqrt{2x - x^2 + 2y - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1$ $|x + y - 2| \leq 1$, иначе оно не имеет смысла.

т.к. x и y — целые, то $|x + y - 2|$ может быть $\Rightarrow x + y - 2 = \pm 1$, или $x + y - 2 = 0$, или $x + y - 2 = -1$, $x + y = 3$ или $x + y = 2$, или $x + y = 1$. Значим или (можно без ограничения общности (так как выражение симметричное) $x \geq y$) $x = 2, y = 1$, или $x = 3, y = 0$, или $x = 2, y = 0$, или $x = 1, y = 1$ или $x = 1, y = 0$, или $y < 0$, и $x \geq 0$ (или $x < 0$ и $y \geq 0$ первое слагаемое не имеет смысла).

Заметим, что все варианты, где или $x, y \leq 2$ (но не одновременно) или $x, y > 2$ (но не одновременно) не подойдут, т.к. $\sqrt{x(2-x) + y(2-y)}$ имеет смысл и $x(2-x) + y(2-y) \geq 0$

Для $x = 2, y = 1$ $\sqrt{4 - 4 + 2 - 1} + \sqrt{1 - |1|} = 1$ выполняется, для $x = 3, y = 0$ $\sqrt{6 - 9 + 0 - 0} + \sqrt{1 - |1|} = 1$ имеет смысл, для $x = 2, y = 0$ $\sqrt{4 + 0 - 4 - 0} + \sqrt{1 - |0|} = 1$ выполняется, для $x = 1, y = 1$ $\sqrt{2 - 1 + 2 - 1} + \sqrt{1 - |0|} = 1 + \sqrt{2} \neq 1$, для $x = 1, y = 0$ $\sqrt{2 - 1 + 0 - 0} + \sqrt{1 - |-1|} = 1$ выполняется.

Если же $x > 0, y < 0$, и $|y|$ меньше чем $|x|$ но $\neq 1, 2$ или 3 , то слагаемое $\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} = \sqrt{x(2-x) + 2y - y^2}$, которое имеет смысл только при $x \leq 2$ и $|y| \leq 2 - x = 1$. Значим опять получаем варианты $x = 2, y = \pm 1$; $x = 1, y = 0$ или -1 ; $x = 0, y = -1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но из этих случаев не были еще рассмотрены только $x=2, y=-1$; $x=1, y=-1$ и $x=0, y=-1$.

Если $x=2, y=-1$, то $\sqrt{2-1-2-1} < 0$ — не имеет смысла; если $x=1, y=-1$, то $\sqrt{1-1-2-1} < 0$ — не имеет смысла; если $x=0, y=-1$, то $\sqrt{0-2-1-0} < 0$ также не имеет смысла. ~~Также для $x=y=0$~~

Значит координаты только $x=2, y=1$ (и наоборот), $x=2, y=0$ (и наоборот), $x=1, y=0$ (и наоборот).

Ответ: $(2; 1)$; $(1; 2)$; $(2; 0)$; $(0; 2)$; $(1; 0)$; $(0; 1)$.

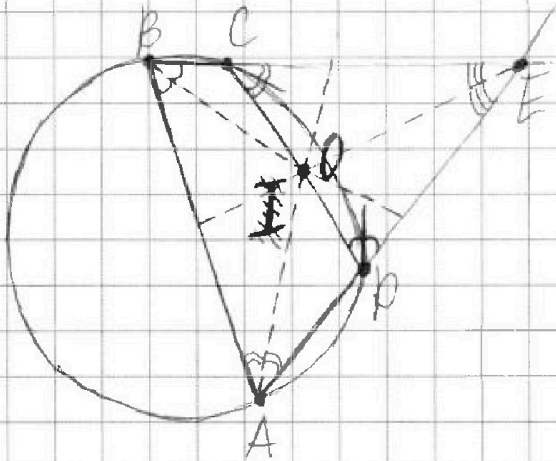


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если $ABCD$ - вписанный, то $\angle BAP = \angle PCE$ и $\angle ABC = \angle CPE \Rightarrow$

$\triangle BEA \sim \triangle PEC \Rightarrow$

$$\frac{ED}{EB} = \frac{EC}{AE} = \frac{CD}{AB} = \frac{ED}{10}$$

П.к. EO - диаметр $\angle BEA$, то $\frac{ED}{EB} = \frac{EC}{AE} =$
 $= \frac{ED \cdot AE}{10} \cdot \frac{1}{OC} = \frac{ED \cdot AE}{10 \cdot OC}$

$DO = \frac{10 \cdot OC}{AE}$. Заметим, что ~~та же~~ ~~равно~~

AE также $ED = \frac{10 \cdot EC}{AE}$. Тогда же

сумма равно $\frac{10 \cdot (EC + OC)}{AE}$, также

~~из~~ ~~отсюда~~ ~~точка~~ ~~E~~ $EC \cdot EB$ ~~где~~ $EC + OC \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = 10 \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

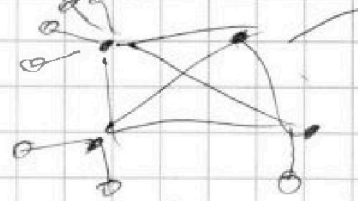
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$3+4+5+7 - 2k$ с високими,

k дорог между соседними четверками деревьев.

$3+4+5+7 = 19$ — нечет.

4 висок



~~4~~ висок ~~3~~ висок ~~7~~ $9, 11, 13$

Но в то же время $3, 4, 5, 7$ имеют две связи \Rightarrow мин. 3 ребра (отметки) — ост. 13, макс. 6 ребер (17 отметки) — ост. 4.
~~3, 4, 5, 7, 11, 13, 15, 17~~ деревьев может быть.

$\sqrt{1}$ $\sqrt{4}$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

Если $x+y \geq 2$, то

$3 \Rightarrow x+y \geq 1$
 $|x+y-2| \leq 1$

$$\sqrt{-(x^2-2x+1)} + \sqrt{-(y^2+2y+1)} + 1 + \sqrt{1}$$

$0, 1, 4, 0$ $(x+y) = 1, 2$ или 3 .

Если x хотя бы 3 или -3 , то $\sqrt{1} < 0$

$\sqrt{1}$ — не сумма, $\Rightarrow x$ или y ($-\infty < x$) ≤ 2 по модулю

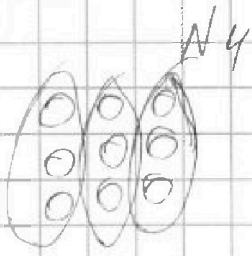


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

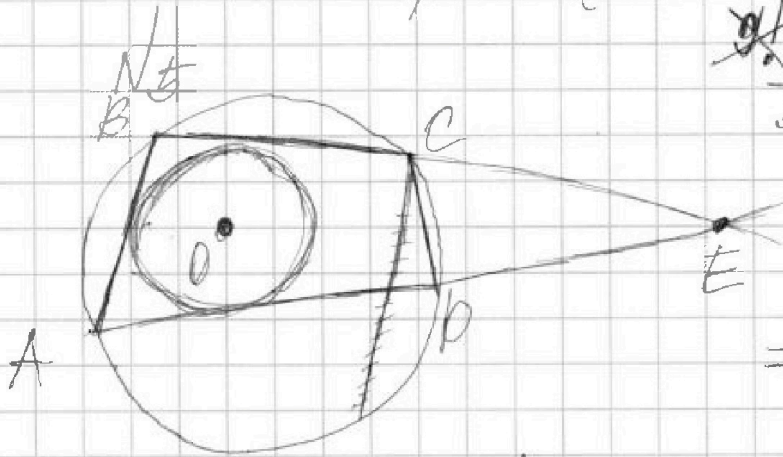
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



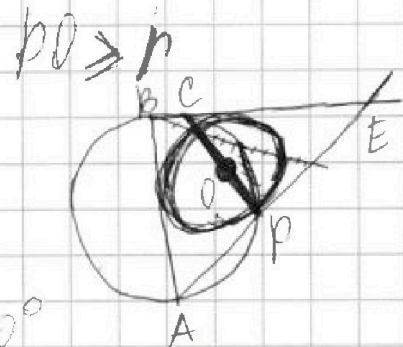
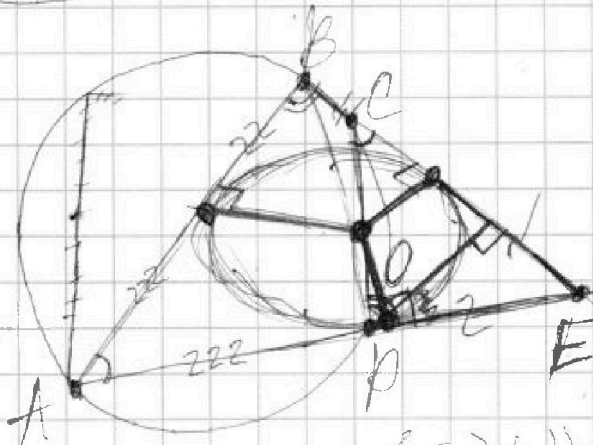
1 2 3 4 5 6 7 8
8 — не может сидеть в первом ряду, иначе 2 места свободно и всего 7 занято.
1 — не сидит в последнем ряду.



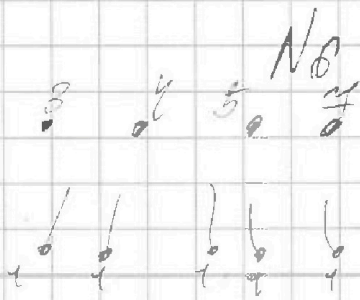
$$\frac{\cancel{3 \cdot 8!} \cdot 6 \cdot 8!}{3! \cdot 3!} + \frac{6 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$= \frac{8!}{12} + \frac{8!}{12} = \frac{8!}{6}$$

$$EC \cdot CB = ED \cdot DA$$



$$\frac{2}{3} = \dots - 90^\circ$$



В центре есть циклоид!
он — дерево \Rightarrow
рёбер = вершинах - 1.
рёбер = $(3+4+5+7-2k) + k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \cdot (k+15) = 17 \cdot 32.$$

$$k_1 = 17$$

$$k_2 = -32$$

~~#~~
~~#~~

$$k^2 + 15k - 17 \cdot 32 = 0.$$

$$D = 225 + 8 \cdot 17 \cdot 128 = 2401 = 49^2.$$

$$k_1 = \frac{-15 + 49}{2} = 17.$$

$$k_2 = \frac{-15 - 49}{2} = -32.$$

$$1) \begin{cases} a - b = 17 \\ a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{23}{2} \text{ — не натур.}$$

$$2) \begin{cases} a - b = -32 \\ a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{42}{2} = 30, a = 4$$

$\cos = -\frac{1}{4}$
 $\sin = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Если $AC = x$, то
 $AB = 2x$
 $BC^2 = 144 = 5x^2 + x^2 = 6x^2$
 $x = 2\sqrt{6}, \boxed{AB = 4\sqrt{6}}$

$\frac{1}{2} \cdot \sin(\angle CAN) = \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{N}{8}$
 $= (\sin \angle CAN) \cdot (\cos \angle CAN)$

$\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN} \Rightarrow AN = BN$

$\angle CAN = \angle BAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN \Rightarrow \cos \angle BAC = -\frac{1}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 9 = 0.$$

$$D = 12t^2 - 16t^2 + 36 = 4(1-t^2) = 4(1-t)(1+t)$$

от -1 до 1
 не выхоч. все осережне.
 $t \in (-1; 1)$

$$x_1 = (-\sqrt{3}t + \sqrt{(1-t)(1+t)})$$

$$x_2 = (-\sqrt{3}t - \sqrt{(1-t)(1+t)})$$

$$3t^2 - \sqrt{3(1-t)(1+t)} \cdot t + \sqrt{3(1-t)(1+t)} \cdot t -$$

$$-(1-t)(1+t) = 3t^2 + t^2 - 1 = 4t^2 - 1$$

$> 0, t^2 > 0,25$

$t > 0,5$ или $t < -0,5$

$t \in (-1; -0,5) \cup (0,5; 1)$

N2
 $a + b = 40$; a и b — натуральные.

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5, p \text{ — простое.}$$

$a = b$ не пойдёт. ($a - b \leq 38$).

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5 \leq 38 \cdot 53 = 2014.$$

p^5 — сумма дв $2^5 = 32$; далее

$3^5 = 243, 5^5 = 3125 \Rightarrow$ подходит только $2^5 = 32$. Тогда пусть $a - b = k$: