



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Последнее уравнение  $xc^2 + 2\sqrt{3}t \cdot x + (4t^2 - 4) = 0$  имеем  $D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) =$   
 $= 12t^2 - 16t^2 + 16 = 4(4 - t^2) = 4(2-t)(t+2).$

П.к.  $D$  по условию  $> 0$  (следует из наличия двух различных корней  $x$  уравнения), то  $(2-t)(t+2) > 0$ ,  $t \in (-2; 2).$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t + \sqrt{(2-t)(t+2)}.$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t - \sqrt{(2-t)(t+2)}.$$

Погда произведение  $x_1 \cdot x_2 = 3t^2 - \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t + \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t -$

$$= 3t^2 - \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t + \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t - (2-t)(t+2) = 3t^2 + t^2 - 4 = 4(t-1)(t+1) > 0.$$

$$(t-1)(t+1) > 0 \Rightarrow \text{---} \leftarrow \leftarrow \leftarrow t < -1 \text{ или } t > 1. \text{ Погда } t \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Ответ:  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия  $a + b = 40$ ,  $a$  и  $b$  — натуральные.

$$(a - b)^2 + 15(a - b) = 14p^5, \text{ где } p - \text{простое.}$$

Заметим, что разность  $a - b \leq 38$ ,  
(т.к. иначе  $b \leq 0$  из  $a + b = 40$ )

т.к.  $a \leq 39$ ,  $a - b \geq 1$ . Тогда

$$(a - b)^2 + 15(a - b) = (a - b + 15)(a - b) \leq \\ \leq 38 \cdot (38 + 15) = 2014. \text{ Тогда если } p \text{ хотя бы } 3, \text{ то } 14 \cdot 3^5 = 14 \cdot 243 > 3400 > 2014,$$

то есть равенство точно не будет соблюдаться. Если  $p = 2$ , то  $14 \cdot 2^5 = 14 \cdot 32 = 448$ .

Тогда если  $a - b = k$ , то уравнение имеет вид  $k(k + 15) = 14 \cdot (14 + 15)$ .

Значит  $k_1 = 14$ ,  $k_2 = -32$ . В первом случае  $a = b + 14$ ,  $a = 40 - b \Rightarrow b = \frac{23}{2}$  — не натуральное число. А во втором случае  $a = b - 32$ ,  $a = -b + 40 \Rightarrow b = \frac{72}{2} = 36$  — подходит. Если  $b = 36$ , то  $a = 40 - 36 = 4$ .

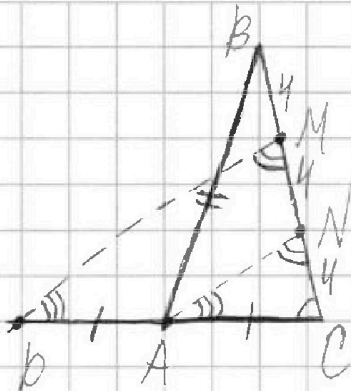
Ответ:  $a = 4$ ;  $b = 36$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если  $BM = MN = NC = \frac{BC}{3} =$   
 $= \frac{12}{3} = 4$  и  $AN \parallel MP$ , то  
 $\triangle NCA \sim \triangle MCK$  (все со-  
 ответствующие стороны  
 параллельны и соответ-  
 ственно <sup>углы</sup> углы равны).

с пропорциями вытекает  $\frac{NC}{MC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow$   
 $CP = 2CA = AB$ ,  $AC = \frac{1}{2} AB$ .

Тогда далее заметим, что в  
 $\triangle ABC$   $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{CN} \Rightarrow AN$  — биссектриса  
 $\angle BAC \Rightarrow \angle BAN = \angle CAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$

Тогда по условию  $\cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$ .

Тогда по теореме косинусов  
 $BC^2 = 444 = AC^2 + \overset{AB^2}{(2AC)^2} - 2\cos(\angle BAC) \times$   
 $\times AC \cdot 2AC = 8AC^2$ ,  $AC^2 = 24$ ,  $AC = 2\sqrt{6}$ ,  
 $AB = 2AC = 4\sqrt{6}$ .

Ответ:  $4\sqrt{6}$ .







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если из любой вершины графа можно добраться в любую другую, то граф связный, а если единственным способом — то без циклов. Значит ориентированная сеть на скрепе является деревом (в последующем формате — рёбра, деревья — вершины).

Значит в дереве есть вершины степеней 3, 4, 5, 7 и висячие (степени 1). Чтобы граф сохранил связность, нужно, чтобы вершины степеней 3, 4, 5, 7 были связными (иначе оторвутся <sup>или</sup> ~~компоненты~~ <sup>или ещё одна</sup> ~~компоненты~~ вида  или ). Тогда заметим, что всего рёбер в графе  $k$  (между вершинами степеней 3, 4, 5, 7)  $+ (3+4+5+7) - 2k$  (т.к. каждое ребро считается по 2 раза)  $= 3+4+5+7 - k = 19 - k$  рёбер.

Если между вершинами 3, 4, 5, 7 хотя бы 3 рёбра (и при этом не более 6 (6 в полном графе на четырёх вершинах)), то  $19 - 2k$  (число рёбер  $k$  висячих вершин равно их количеству)  $\geq 19 - 2 \cdot 6$  и  $\leq 19 - 2 \cdot 3 \Rightarrow$  количество висячих вершин 7, 9, 11 или 13 (т.к.  $2k$  всегда чётно, то  $19 - 2k$  всегда нечётно), а значит всего вершин (дерево) 11, 13, 15 или 17.  
Ответ: 11, 13, 15, 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В выражении  $\sqrt{2x - x^2 + 2y - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1$   $|x + y - 2| \leq 1$ , иначе оно не имеет смысла.

т.к.  $x$  и  $y$  — целые, то  $|x + y - 2|$  может быть  $\Rightarrow x + y - 2 = \pm 1$ , или  $x + y - 2 = 0$ , или  $x + y - 2 = -1$ ,  $x + y = 3$  или  $x + y = 2$ , или  $x + y = 1$ . Знаком  $\leq$  (можно без ограничения области действительности (так как выражение  $\sqrt{2x - x^2 + 2y - y^2}$ ))  $x \geq y$   $x = 2, y = 1$ , или  $x = 3, y = 0$ , или  $x = 2, y = 0$ , или  $x = 1, y = 1$  или  $x = 1, y = 0$ , или  $y < 0$ , или  $x < 0$  (первое слагаемое не имеет смысла), или  $x \geq 0$ .

Заметим, что все варианты, где  $x < 2$  или  $y < 2$  (но  $x \geq y$ ) не подойдут, т.к.  $\sqrt{x(2-x) + y(2-y)}$  имеет смысл и  $x(2-x) + y(2-y) \geq 0$

Для  $x = 2, y = 1$   $\sqrt{4 - 4 + 2 - 1} + \sqrt{1 - |1|} = 1$  выполняется, для  $x = 3, y = 0$   $\sqrt{6 - 9 + 0 - 0} + \sqrt{1 - |1|} = 1$  имеет смысл, для  $x = 2, y = 0$   $\sqrt{4 + 0 - 4 - 0} + \sqrt{1 - |0|} = 1$  выполняется, для  $x = 1, y = 1$   $\sqrt{2 - 1 + 2 - 1} + \sqrt{1 - |0|} = 1 + \sqrt{2} \neq 1$ , для  $x = 1, y = 0$   $\sqrt{2 - 1 + 0 - 0} + \sqrt{1 - |-1|} = 1$  выполняется.

Если же  $x > 0, y < 0$ , и  $|y|$  меньше чем  $|x|$  но  $\neq 1, 2$  или  $3$ , то слагаемое  $\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} = \sqrt{x(2-x) + 2y - y^2}$ , которое имеет смысл только при  $x \leq 2$  и  $|y| \leq 2 - x = 1$ . Значит опять получаем варианты  $x = 2, y = \pm 1$ ;  $x = 1, y = 0$  или  $-1$ ;  $x = 0, y = -1$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но из этих случаев не были ещё рассмотрены только  $x=2, y=-1$ ;  $x=1, y=-1$  и  $x=0, y=-1$ .

Если  $x=2, y=-1$ , то  $\sqrt{2-1-2-1} < 0$  — не имеет смысла; если  $x=1, y=-1$ , то  $\sqrt{1-1-1-1} < 0$  — не имеет смысла; если  $x=0, y=-1$ , то  $\sqrt{0-1-1-0} < 0$  также не имеет смысла. ~~Также для  $x=y=0$~~

Значит координаты только  $x=2, y=1$  (и наоборот),  $x=2, y=0$  (и наоборот),  $x=1, y=0$  (и наоборот).

Ответ:  $(2; 1)$ ;  $(1; 2)$ ;  $(2; 0)$ ;  $(0; 2)$ ;  $(1; 0)$ ;  $(0; 1)$ .



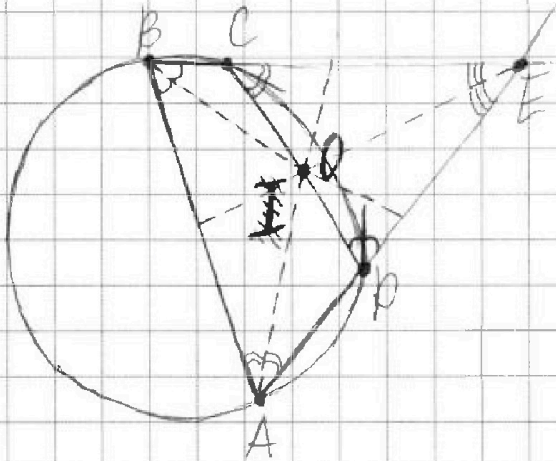


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если  $ABCD$  - вписанный, то  $\angle BAP = \angle PCE$  и  $\angle ABC = \angle CDE \Rightarrow$   
 $\triangle BEA \sim \triangle PEC \Rightarrow$

$$\frac{ED}{EB} = \frac{EC}{AE} = \frac{CD}{AB} = \frac{ED}{10}$$

П.к.  $EO$  - диаметр  $\angle BEA$ , то  $\frac{EO}{EB} = \frac{EC}{EA} =$   
 $= \frac{ED \cdot AE}{10} \cdot \frac{1}{OC} = \frac{ED \cdot AE}{10 \cdot OC}$ ,

$EO = \frac{10 \cdot OC}{AE}$ . Заметим, что ~~та же~~ ~~равно~~

$AE$  также  $ED = \frac{10 \cdot EC}{AE}$ . Тогда же

сумма равно  $\frac{10 \cdot (EC + OC)}{AE}$ , также

~~из~~ ~~отсюда~~ ~~точка~~ ~~E~~  $EC \cdot EB$  ~~где~~  $EC + OC \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = 10 \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

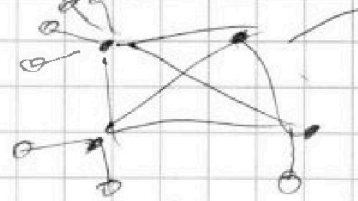
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$3+4+5+7 - 2k$  с високими,

$k$  дорог между оставшимися четырьмя деревцами.

$3+4+5+7 = 19$  — нечет.

4 висок.



~~4~~ високая ~~3~~ висок. ~~4~~, ~~7~~, ... 9, 11, 13.

Но в то же время 3, 4, 5, 7 — это две связи  $\Rightarrow$  мин. 3 ребра (отрезки) — ост. 13, макс. 6 ребер (17 отрезков) — ост. 4.  
~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, 11, 13, 15, 17 деревцо может быть.

$\sqrt{10}$        $\sqrt{4}$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1.$$

Если  $x+y \geq 2$ , то

$3 \Rightarrow x+y \geq 1$   
 $|x+y-2| \leq 1$

$$\sqrt{-(x^2-2x+1)} + \sqrt{-(y^2+2y+1)} + 1 + \sqrt{1}$$

$0, 1, 4, 0$        $(x+y) = 1, 2$  или  $3$ .

Если  $x$  хотя бы 3 или -3, то  $\sqrt{10} < 0$ ,

$\sqrt{10}$  — не сумма,  $\Rightarrow x$  или  $y$  ( $-\infty < x$ )  $\leq 2$  по модулю

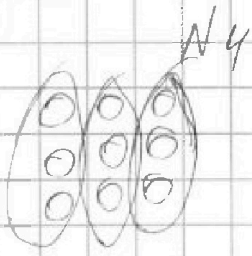


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

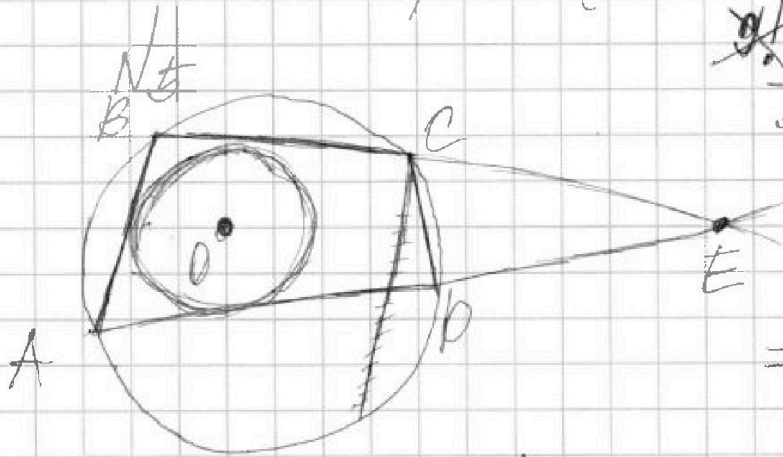
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



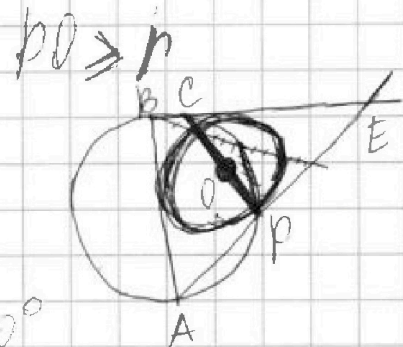
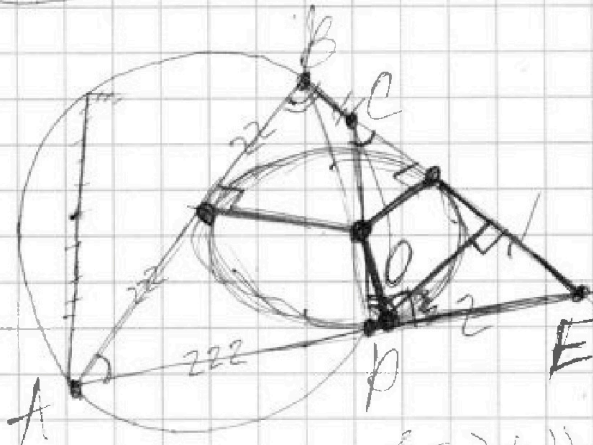
1 2 3 4 5 6 7 8  
8 — не может сидеть в первом ряду, иначе 2 места свободно и всего 7 занято.  
1 — не сидит в последнем ряду.



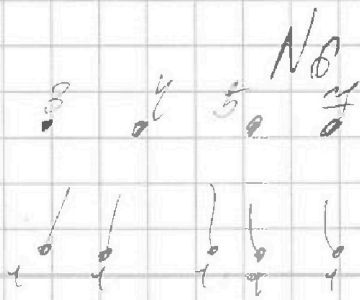
$$\frac{\cancel{3} \cdot 8!}{3! \cdot 3!} + \frac{6 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$= \frac{8!}{12} + \frac{8!}{12} = \frac{8!}{6}$$

$$EC \cdot CB = EB \cdot DA$$



$$\frac{2}{3} = \dots - 90^\circ$$



В центре есть узлы!  
он — дерево  $\Rightarrow$   
рёбер = вершина - 1.  
рёбер =  $(3+4+5+7-2k) + k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \cdot (k+15) = 17 \cdot 32.$$

$$k_1 = 17$$

$$k_2 = -32$$

~~#~~  
~~#~~

$$k^2 + 15k - 17 \cdot 32 = 0.$$

$$D = 225 + 8 \cdot 17 \cdot 128 = 2401 = 49^2.$$

$$k_1 = \frac{-15 + 49}{2} = 17.$$

$$k_2 = \frac{-15 - 49}{2} = -32.$$

$$1) \begin{cases} a - b = 17 \\ a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{23}{2} \text{ — не натур.}$$

$$2) \begin{cases} a - b = -32 \\ a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{42}{2} = 30, a = 4$$

$\cos = -\frac{1}{4}$   
 $\sin = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Если  $AC = x$ , то  
 $AB = 2x$   
 $BC^2 = 144 = 5x^2 + x^2 = 6x^2$   
 $x = 2\sqrt{6}$ ,  $AB = 4\sqrt{6}$

$\frac{1}{2} \cdot \sin(\angle CAN) = \frac{\sqrt{15}}{8} = \sin(\angle BAN)$   
 $= (\sin \angle CAN) \cdot (\cos \angle CAN)$   
 $\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN} \Rightarrow AN = \dots$

$\angle CAN = \angle BAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN \Rightarrow \cos \angle BAC = -\frac{1}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1  

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 9 = 0.$$

$$D = 12t^2 - 16t^2 + 36 = 4(1-t^2) = 4(1-t)(1+t)$$

от -1 до 1  
 не выхоит. все осережи.  
 $t \in (-1; 1)$

$$x_1 = (-\sqrt{3}t + \sqrt{(1-t)(1+t)})$$

$$x_2 = (-\sqrt{3}t - \sqrt{(1-t)(1+t)})$$

$$3t^2 - \sqrt{3(1-t)(1+t)} \cdot t + \sqrt{3(1-t)(1+t)} \cdot t -$$

$$-(1-t)(1+t) = 3t^2 + t^2 - 1 = 4t^2 - 1$$

$> 0, t^2 > 0,25$

$t > 0,5$  или  $t < -0,5$ .

$t \in (-1; -0,5) \cup (0,5; 1)$ .

N2  
 $a + b = 40$ ;  $a$  и  $b$  — натуральные.

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5, p - \text{простое.}$$

$a = b$  не пойдёт. ( $a - b \leq 38$ ).

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5, \leq 38 \cdot 53 = 2014.$$

$p^5$  — сумма дв  $2^5 = 32$ ; далее

$3^5 = 243, 5^5 = 3125 \Rightarrow$  подходит только  $2^5 = 32$ . Тогда пусть  $a - b = k$ :