



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть q - шаг арифм. прогрессии
Тогда
$$\begin{cases} (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2q \\ 3x^2 = (x^2 + 2x)^2 + 4q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4q = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 \\ 2q = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$3x^2 - (x^4 + 4x^3 + 4x^2) = 2(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - 6x - 6$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

(Подобрали корень $x = -1$)

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3} & x^3 + 3x^2 - 2 \\ & \underline{3x^3 + 3x^2 - 2x - 2} \\ & \underline{3x^3 + 3x^2} & \Rightarrow \\ & \underline{-2x - 2} \\ & \underline{-2x - 2} \\ & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x^3 + 3x^2 - 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) \text{ Тут еще корень } x=-1$$

$$x^3+3x^2-2$$
$$-1+3-2=0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2+2x-2 \\ \hline -2x^2-2 & \\ \hline 2x^2+2x & \\ \hline -2x-2 & \rightarrow \\ \hline -2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = (x+1)^2(x^2+2x-2)$$

$$x^2+2x-2$$

$$D = 4+8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = -1-\sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3}-1$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -1-\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}-1, x_3 = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на равенство

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} +$$

$$\begin{matrix} 6 & 6 \\ 9x + 0y \leq 9 \\ x + y \leq \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$3x - y = a \Rightarrow 3y = 9x - 3a$$

$$x - 3y = -8x - 3a$$

$$\cancel{3x} + x - 3y - (3x - y) =$$

$$= -8x - 4a = -4$$

$$-1 \leq a \leq 1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{12}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$8x + 4y = 2 \cdot \frac{3}{4} + 5 = 11$$

$$y = \frac{5}{4}$$

$$2x - 2y$$

$$+ 18x - 6y = 8x - 4y = 6x - 2y + 2(x - 2y)$$

$$3 \cdot (x - 3y) + 2(3x - y) =$$

$$= 3x - 9y + 6x - 2y = 9x - 11y$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$-1 \leq 3x - y \leq 1$$

$$= x - 3y = a \in (2.5; 3]$$

$$3x = 3a + 3y$$

$$3y + 3a - 1 \leq -8y + (7.5; 9) \leq 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

~~Сложим~~ Сложим выражения из системы (2) и получим \Rightarrow
Очевидно, это мы можем сделать и получить,

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x-3y + 3x-y = 4x-4y \\ -3 \leq x-3y \leq 3 \\ + \quad -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ \hline -4 \leq 4x-4y \leq 4 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \quad (1) \end{array}$$

в сумме очевидно, это сумма < если сумма max

* см 2 стр

$$\begin{array}{r} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ - \quad -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ \hline -3 \leq -2x-2y \leq 3 \\ \Rightarrow x+y \geq -1,5 \quad (3) \end{array}$$

~~6 \cdot (1) + 2 \cdot (2) = 2~~

6 \cdot (3) + 2 \cdot (1)

$$\begin{array}{r} -2 \leq x-2y \leq 2 \\ + \quad -9 \leq 6x+6y \leq 9 \\ \hline -8 \leq 8x+4y \leq 11 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x+4y \leq 11 \end{array}$$

мы и при $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$ это 8 достигают

при этом $|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = \left| \frac{-3}{1} \right| = \frac{3}{1} \leq 3$

$|3x-y| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \leq 1$

все кер-ва $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ все по условию

Ответ: $\max(4y+8x) = 11$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$(x-3y) \leq 3$~~
 ~~$(3x-y) \leq 1$~~
 ~~$3y-x \leq 3$~~
 ~~$y-3x \leq 1$~~
 ~~$y \geq 3x$~~
 ~~$\frac{1}{3}x < y < 3x$~~
 ~~$y \leq \frac{1}{3}x$~~
 ~~$y-x \leq 1$~~

Докажем, что $-3 \leq (x-3y) - (3x-y) \leq 3$

пусть $(x-3y) = a$ $2 \leq a \leq 3$ если $\max(x-3y) < 2$ $\min(3x-y) \leq 1$
 $a < 2$, то мы можем рассмотреть a , при котором $k \rightarrow \max$

~~$3x = 3y + 3a$~~
 ~~$3x - 3y = 3a$~~
 ~~$3x - 3y \leq 3a \leq 3a + 9$~~

$y - 3x = k = (x-3y) - (3x-y) =$
 $= (x-3y) + (y-3x) =$

$y - 3x = -8a - 9 \leq -8a - 3a \leq -8a - 6$

$-3 \leq x - 3y \leq 3$
 $+ 3a + 9 \leq y - 3x \leq -8a - 6$

$k \leq -8a - 3 \Rightarrow$ мы хотим
 дока-ть, что если $y < -\frac{3}{4}$, то
 $k \leq 3$ все равно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y < -\frac{3}{4}, \text{ то}$$

$$\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x + 3y \leq 3 \end{cases}$$

$$x - 3y \leq 3 - \frac{9}{4}$$

$$x + 3y \leq \frac{3}{4}$$

~~$$\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x + 3y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 - 3y \\ x \leq 3 - 3y \end{cases}$$~~

~~$$x - 3y \leq -k - \frac{3}{4}$$~~

$$\begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ y < -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow 8x + 4y < 6$$

$$-1 \leq 3x - y \leq 1$$

$$\leq 3x - 4y \leq \frac{1}{4}$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$3y - 3 \leq x \leq 3 + 3y$$

$$x < 3 - 3 \cdot \frac{3}{4}$$

$$x < \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 4y \leq 8 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= 6 - 3 \Rightarrow < 3, \text{ а мы пока}$$

зали, когда это = 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n) - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$75q^2 = 3 \cdot (5q)^2$$

Заметим, что $m+n-9 \geq 1 \Rightarrow m+n-3 \geq 7 \Rightarrow m+n \geq 10$

Заметим, что A не может ≥ 8 ,
ну если $\frac{A}{3}$ равняется, значит $A:3$
ну если $\frac{A}{3}$ значит $m(m+n):3$ или

$m+n-9:3$, ну если $(m+n):3$, то и

$m+n-9:3$, т.к. $m+n-9 \equiv m+n \equiv 0$,
аналогично и если $m+n-9 \equiv 0 \Rightarrow 3 \nmid m+n \equiv 0$

ну значит $A:9$, ну значит $q^2=3$, т.к.

$75q^2:3$, а q - простое, единственное простое
которое $:3$ это 3, ну значит какая-
то из скобок $:9$

$m+n-9 \equiv 0$, то и $m+n \equiv 0 \Rightarrow A:3^4 \Rightarrow$
 $m+n \equiv 0 \Rightarrow m+n-9 \equiv m+n \equiv 0 \Rightarrow A:3^4 \Rightarrow$
против.

$$\Rightarrow A = 13p^2, \quad B = \frac{10}{75}q^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что у B 5 простых делителей,
а у A 3 простых делителя,
знаем у B какая-то скобка-простое
число (пу если нет, то у него скобок ≥ 2
пр. делит \Rightarrow всего ≥ 26)
Аналогично для A

$$(m+n-9)(m+n) = 13q^2$$

Случаи:

$$1) \begin{cases} m+n-9 = 13q^2 \\ m+n = 1 \end{cases} \Rightarrow m+n-9 = 1-9 = 8 \Rightarrow \Rightarrow \text{против.}$$

$$2) \begin{cases} m+n-9 = 13q \\ m+n = q \end{cases} \Rightarrow m+n-9 = 13m+13n \\ 12m+12n+9=0, \\ m \text{ и } n > 0 \Rightarrow \text{против.}$$

$$3) \begin{cases} m+n-9 = 13 \\ m+n = q^2 \end{cases} \Rightarrow m+n = 22, \\ \text{но } 22 - \text{не } q^2 \Rightarrow \Rightarrow \text{против}$$

$$4) \begin{cases} m+n-9 = 1 \\ m+n = 13q^2 \end{cases} \Rightarrow m+n = 10 \text{ но } 10 \neq 13q^2 \Rightarrow \Rightarrow \text{против.}$$

$$\begin{cases} m+n-9 = q \\ m+n = 13q \end{cases} \Rightarrow 13m+13n - 117 = m+n \\ 12(m+n) = 117 \Rightarrow$$

\Rightarrow таких пар нету:

Ответ: таких пар нету



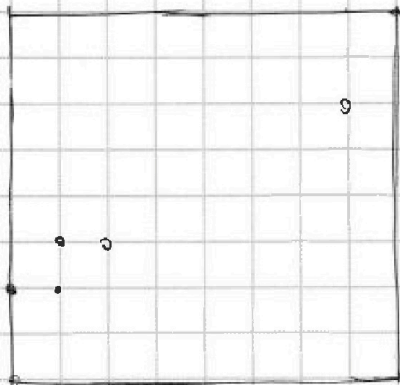
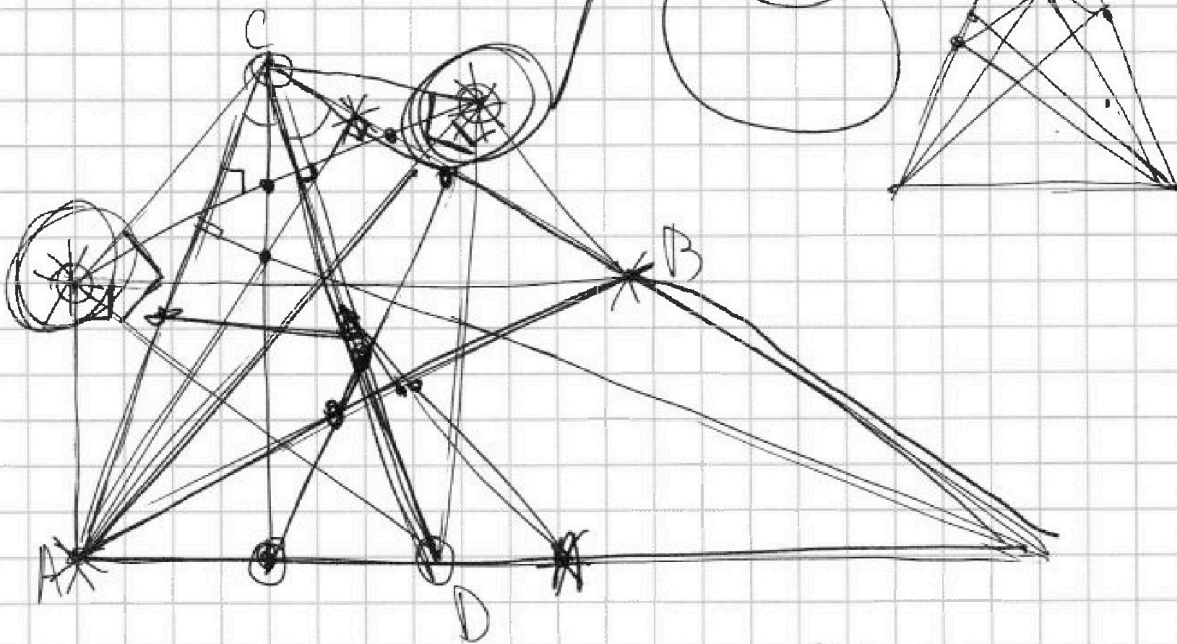
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

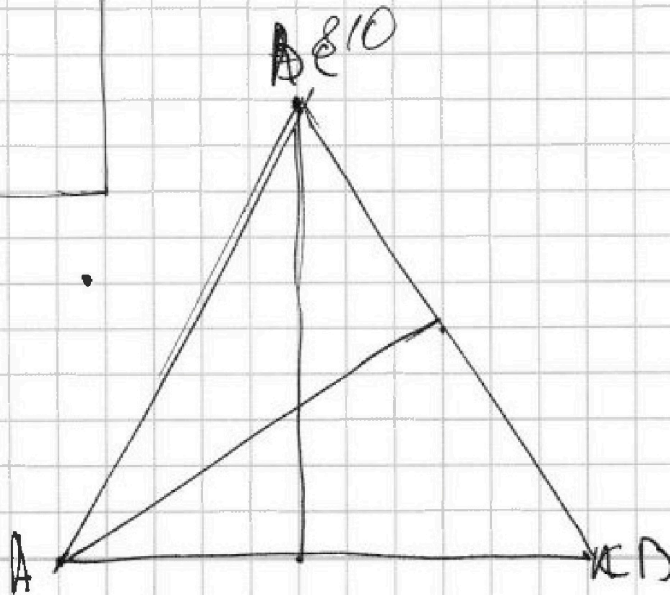
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чертежи



$$\begin{array}{r} 81 \text{ узел} \\ 81 \cdot 80 \\ \hline 2 \end{array} = \frac{81 \cdot 40}{4} =$$



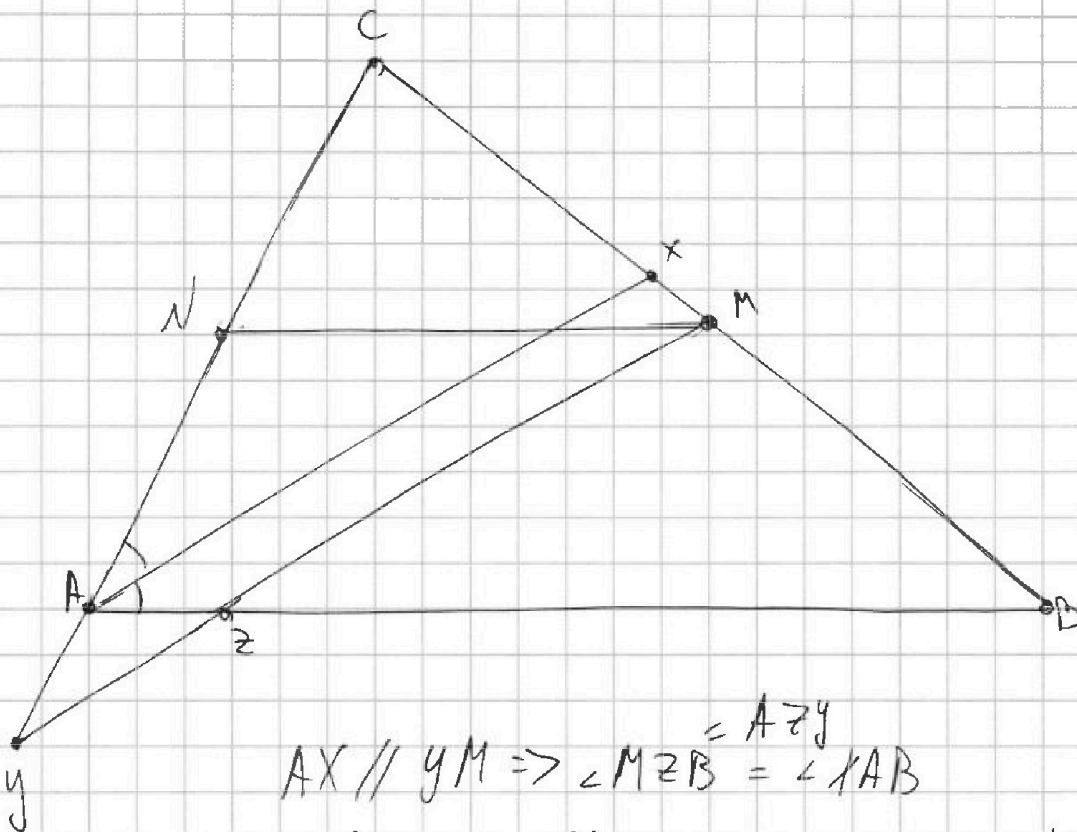


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 AX \parallel YM &\Rightarrow \angle MZB = \angle AYB \\
 \angle CYM &= \angle CAX \Rightarrow \angle AYB = \angle AYZ = \\
 &= \frac{\angle CAB}{2} \Rightarrow AYB = 15^\circ
 \end{aligned}$$

проведем $NM \parallel AB$, NM - ср. лин $\Rightarrow NM = \frac{1}{2} AB$

$$AZ = AY = 6 \quad AN = \frac{1}{2} AC = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow YN = AY + AN = 9 + 6 = 15$$

$$\triangle YAZ \sim \triangle YNM \Rightarrow \frac{NY}{AY} = \frac{NM}{AZ}$$

$$NM = \frac{NY}{AY} \cdot AZ = \frac{15}{6} \cdot 6 = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 30 \quad (\angle CAB = 2\alpha)$$

$$\cos \angle AYZ = \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} YZ}{AY} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



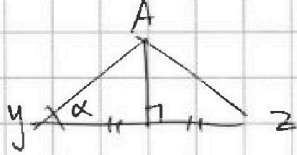
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. $\triangle AYZ - \rho/5 \Rightarrow \text{мед } y \Rightarrow \text{воск, } \rho$



$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

Тн \cos для ABC , $AC=18$, $AB=30$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot -\frac{1}{9} = 18^2 + 30^2 + 4 \cdot 30 =$$

$$= 4(9^2 + 15^2 + 30) = 4(81 + 225 + 30) =$$

$$= 4(336) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 21 = 8^2 \cdot 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $BC = 8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad x_3 = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \quad 0 \leq x \leq 6$$

$\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ $\sqrt{13} < 5$, $\sqrt{13} < \sqrt{25} \Rightarrow > 0$
докажем, что $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6$, тогда и $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} < 6$,
т.к. второй $<$ первого

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \vee 6 \quad \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 5 + \sqrt{13} \vee 12 \\ \sqrt{13} \vee 7 \\ 13 \vee 49 \end{array} \Rightarrow \Rightarrow x_1 \text{ и } x_2 \text{ подходят} \\ \text{по } 0 \leq x < 6 \\ (\text{и } x_1 \text{ и } x_2 > 0 \text{ это очевидно})$$

x_3 и x_4 :

$$5 - 2\sqrt{10} \vee 0$$

$$5 \vee 2\sqrt{10}$$

$$25 \vee 4 \cdot 10 \quad | \quad 2\sqrt{10} > 5 \Rightarrow x_3 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 \text{ не годит}$$

$x_4 > 0$ очевидно

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \vee 6$$

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < 6 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{10} \vee 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4 \text{ годит}$$

$$40 \vee 49$$

Ответ: пары $(x; y)$: $\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}; \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на это равенство:

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Заметим, что тут $x > 0$ и $y > 0$,

и в это все коэффициенты > 0 ,

пу тогда $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$ — монотонно

возрастающая функция ($x \in (0; +\infty)$)

пу это очевидно, ну докажем

$$f(x_1) = x_1^4 + 5x_1^2 + \sqrt{x_1} \quad f(x_2) = x_2^4 + 5x_2^2 + \sqrt{x_2}$$

пусть $x_1 > x_2$, хотим доказать, что $f(x_1) > f(x_2)$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1^4 + 5x_1^2 + \sqrt{x_1} > x_2^4 + 5x_2^2 + \sqrt{x_2}$$

$$x_1^4 > x_2^4$$

$$5x_1^2 > 5x_2^2$$

$$\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

пу и при $x > 0$ $f(x) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} \quad f(y) = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$f(x)$ —
такой — то гра-
фик \Rightarrow решение этого
равенства, только, когда $y = x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

~~не подходит, не подходит~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 6-x + 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3$$

$$-x^2 + 5x + 6 = 9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

~~не подходит, не подходит, не подходит, не подходит, не подходит, не подходит~~

$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$(x+1)(6-x) = \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + 5x + \frac{15}{4} = 0$$

$$x^2 - 5x - \frac{15}{4} = 0$$

$$D = 25 + 15 = 40 = (2\sqrt{10})^2$$

$$x_1 = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \quad x_2 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}$$

Теперь проверим 4 корня на ОДЗ:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь рассмотрим первое равенство,
и подставим туда уже $y = x$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$-(x^2 - 5x - 6)$, его корни по Те Виета

$$6 \text{ и } -1 \Rightarrow -(x^2 - 5x - 6) = -(x-6)(x+1) = (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

Обз: $-1 \leq x \leq 6$, но $x \geq 0 \Rightarrow$ $0 \leq x \leq 6$ корр. рав.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 - 2\sqrt{(6-x)(x+1)} = 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + (x+1) - 2\sqrt{(6-x)(x+1)} + (6-x) = 2$$

$$((x+1) + (6-x) = 7)$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}) + (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = 2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$$

$$t(t+1) = 2 \quad t^2 + t - 2 = 0$$

по Те Виета $t_1 = -2$
 $t_2 = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~в квадрате ABCD 25 узлов,~~
~~в квадрате DCBF без DC 20 узлов~~
~~в квадрате AKFD без ^{DB} BD и FD - 16 узлов~~

1 случай $C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{2}$
2 случай $25 \cdot 20$

в ABCD без AD = в DCEAB без DC, =
в KFDВ без DB = 20 узлов

1 случай = $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2}$

2 случай = $20 \cdot 20$

3 случай = $20 \cdot 20$

$\Sigma = 400 + 400 + 190 = 990$ вариантов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

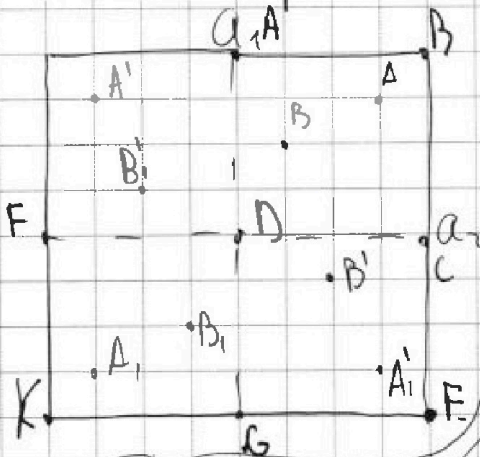


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на эту доску



Всего узлов $9 \cdot 9 = 81$ узел

Посчитаем сначала сколько из них можно выбрать просто

замечим, что если ~~в~~ покрасить верхнюю, а ~~затем~~ затем покрасить отрезочек ~~ей~~ (сначала отразим от a_1 , потом от a_2),

то при повороте на 180° мы попадем в тот-же случай (я хочу

посчитать сначала все раскраски, а потом поделить на 2, но такие случаи, где d отрезочек точки покрашены надо делить на 2, т.к. тот-же случай мы уже учитывали когда все покрашено (для B и A, эти отрезочки существуют)

У нас есть вариант выбрать 1 фишку в квадрате ABCD без AD

там-же, 1 фишку в квадрате ABCD

и еще 1 фишку в DC EG, и еще 1 фишку в ABCD, и еще 1 фишку в KFDG без DG, и еще

получим все случаи с возможностью до поворота, ну посчитаем эти случаи

и еще

эти случаи

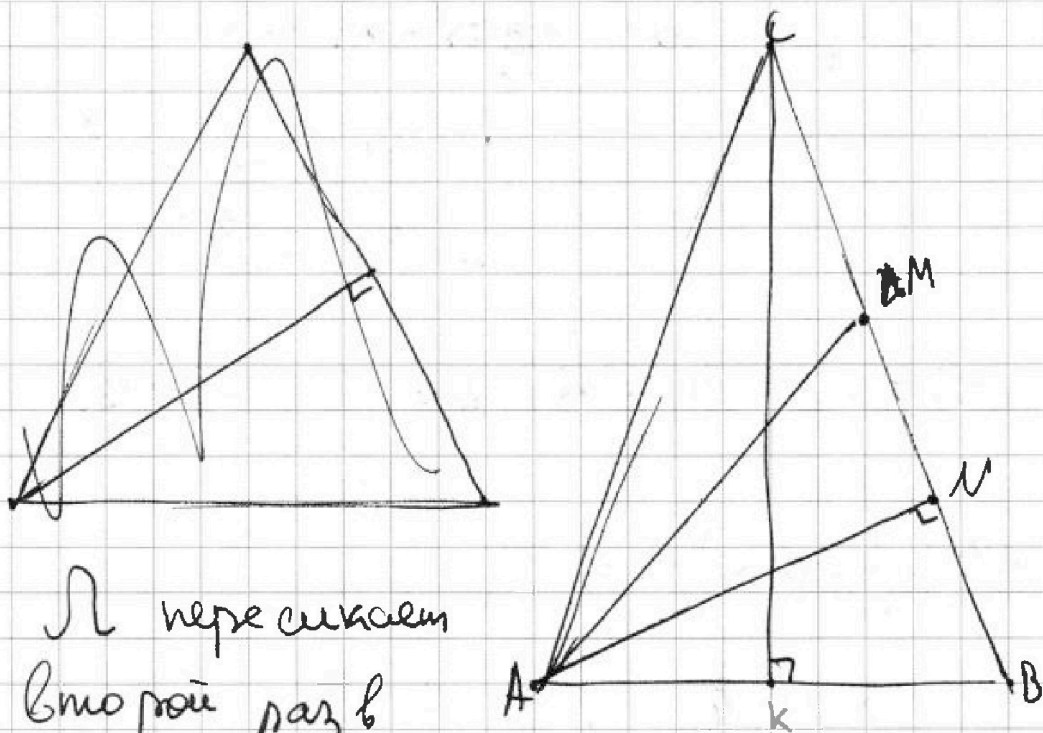


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Окр-ть Ω пересекает
BC второй раз в

N , $\angle ANM = 90^\circ$, т.к. AM - медиана \Rightarrow
 $\Rightarrow AN$ - высота

$$\angle ABC = \alpha \quad \cos \alpha = \frac{AB}{NB} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5},$$

~~определяет~~ сер пер к AB - точка K

$$\sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} =$$

$$= \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{KB}{BC} = \frac{AB}{2BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{2 \cos \alpha} =$$

$$= \frac{10}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{25}{3}, \quad BC = AC$$

$$\text{Ответ: } BC = AC = \frac{25}{3}$$

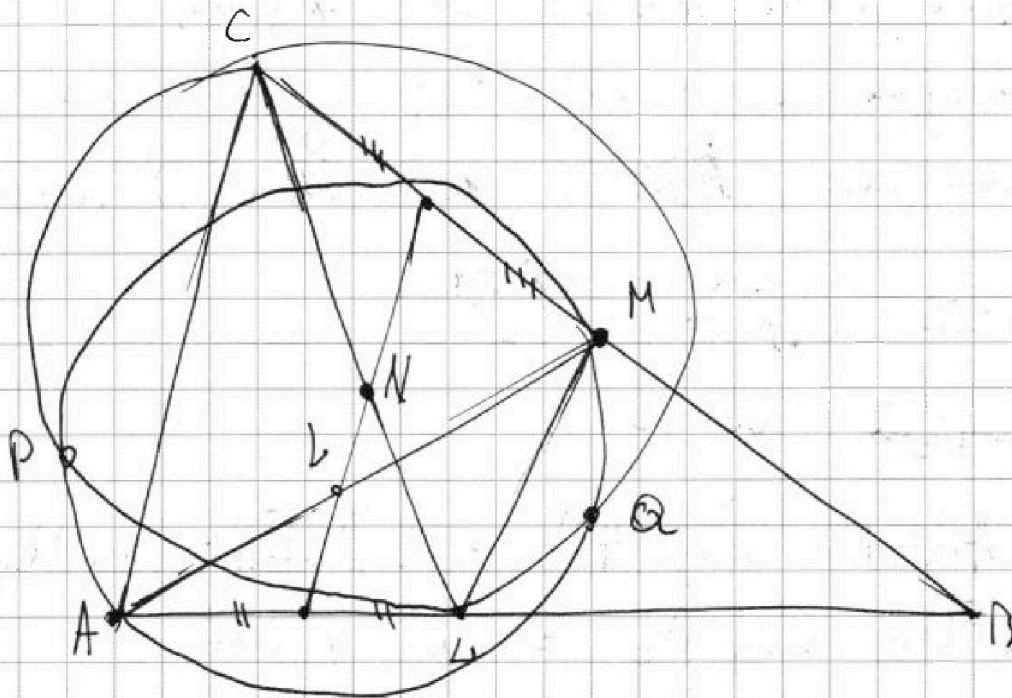
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



замечем, что окр-ти пересекаются в точках P и Q, PQ - их радиусы, $PQ \perp CA$, т.к. $PQ \parallel$ высоте из B, а также радиус \perp линии центров $\Rightarrow CA \parallel$ линии центров,
 N - середина CL проведем $l \parallel CA$ через L, l пройдет через сер AB, т.к. это ср лин, исе и через L - сер AM (L и N - центры окр-тей, $l \parallel LM$, т.к. это ср лин в $AMB \Rightarrow ML \parallel AC \Rightarrow ML$ - ср лин в $ABCO \Rightarrow L$ - сер AB $\rightarrow \Rightarrow \triangle ABC$ - р/б, т.к. биссектриса это медиана, ABC - р/б с основанием AB



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

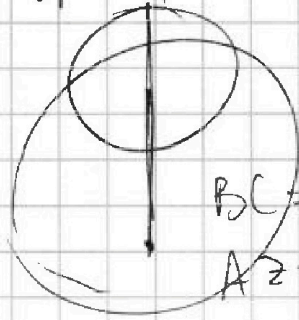
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{9}{4} - y = -1 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}$ **Перпендикуляр**

$-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} = 3$

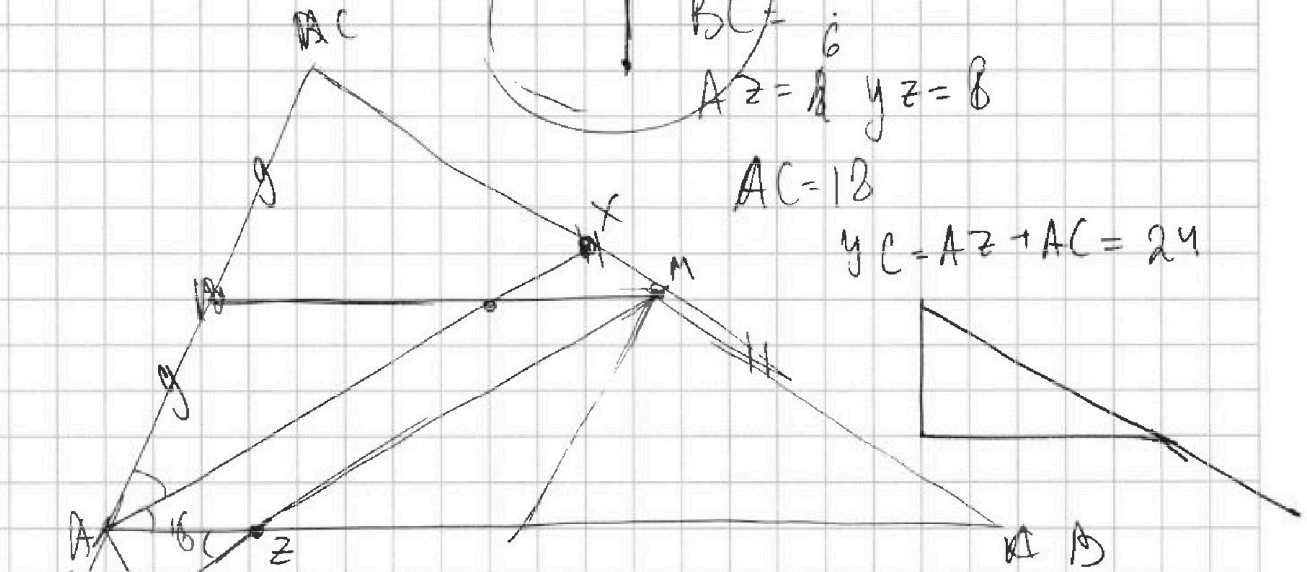


$\frac{216}{108}$

$BC = 7$
 $AZ = 8$ $YZ = 8$

$AC = 18$

$YC = AZ + AC = 24$



$\cos \alpha = \frac{2}{3}$

$\frac{YZ + ZM}{AX} = \frac{24}{18}$

$\frac{6}{15} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 15$

$\frac{336}{4} = 75 + 9 = \frac{84}{1} = 21$

