



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть это прогрессия a_1, a_2, \dots с разностью d , тогда

$$2(a_5 - a_7) = -4d = a_2 - a_{11}$$

$$2(6x + 18 - (x^2 - 4x)^2) = (x^2 - 4x)^2 + 3x^2$$

$$2(6x + 18) = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2$$

$$2(2x + 6) = (x^2 - 4x)^2 + x^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

по т. Виета:

$$\begin{cases} x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$D/4 = 4 + 3 = 7$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: 2; $2 \pm \sqrt{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

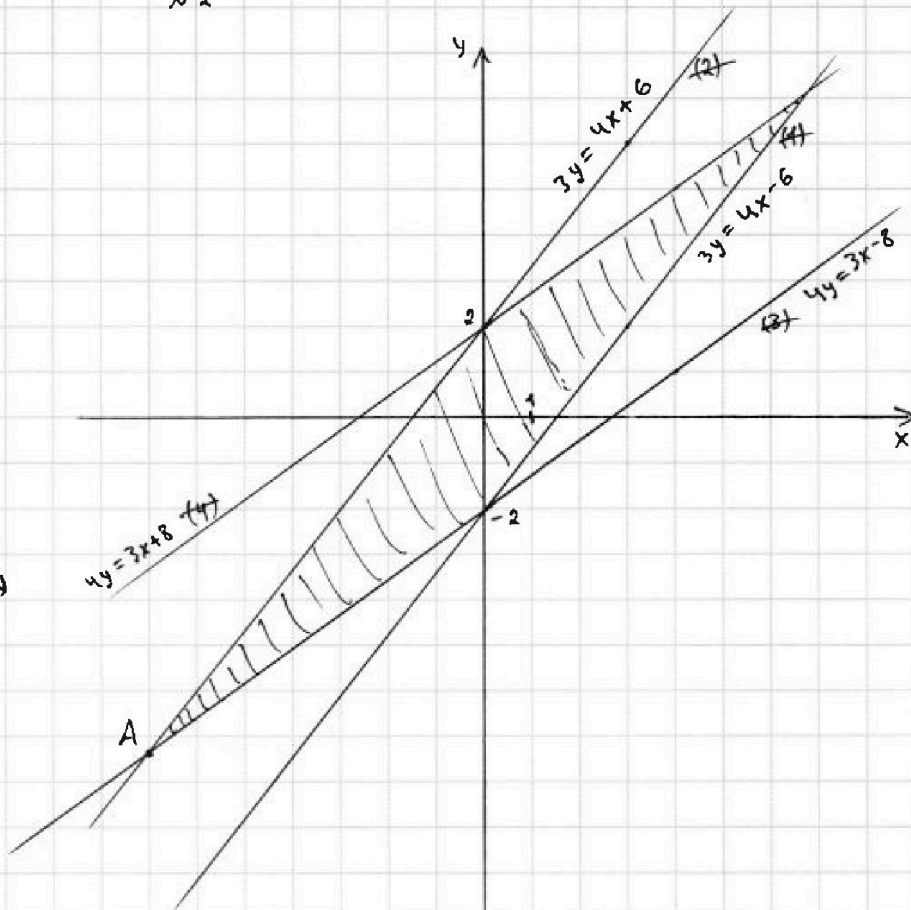
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq 4x - 6 & \text{A} \\ 3y \leq 4x + 6 & \text{B} \\ 4y \geq 3x - 8 & \text{C} \\ 4y \leq 3x + 8 & \text{D} \end{cases}$$



В т. А x и y минимальны, значит, выражение и значение
или выражения $14x + 7y$ минимально. Найдем координаты

$$\text{т. А: } \begin{cases} 3y = 4x + 6 \\ 4y = 3x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x + 24 - 9x + 24 = 0 \\ y = \frac{5}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{48}{7} \\ y = -\frac{50}{7} \end{cases}$$

$$\text{Итого: } 14x + 7y = -\frac{48}{7} \cdot 14 - 7 \cdot \frac{50}{7} = -146$$

Ответ: -146

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

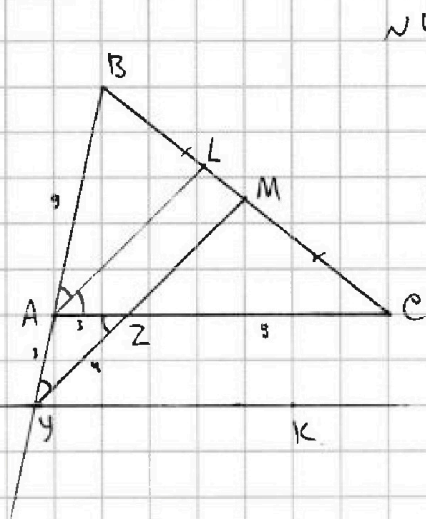


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

Д.п.: $YK \parallel AC$, AL - биссектриса

угла $\angle BAC$

$\angle LAZ = \angle AZY$ как накрест лежащие углы

$\angle BAL = \angle AYZ$ как соответственные углы

Значит, $\angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AYZ$ - равнобедренный по призматке

т.е. $AY = AZ = 3$

По т. Менелая в $\triangle BCA$ и секущей: $M-Z-Y$: $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{BY} = 1$

$$BY = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot 3 = 9$$

По т. косинусов в $\triangle AYZ$: $16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \angle YAZ$

$$\cos \angle YAZ = \frac{2}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9}, \quad \cos \angle BAC = -\cos(180^\circ - \angle BAC) = -\cos \angle YAZ = -\frac{1}{9}$$

По т. косинусов в $\triangle ABC$: $BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}$

$$BC^2 = 225 + 24$$

Ответ: $\sqrt{249}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Решение:

Разобьем квадрат на 4 равных квадрата по 16 клеток, они не пересекаются. В каждом таком квадрате 25 урлов.

Есть 3 варианта расположения белых урлов:

1) они находятся в противоположных кв-х

$$\frac{24 \cdot 24}{2} + 1 = 239 \text{ способов} \quad (*)$$

2) они находятся в одном квадрате: $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ спос.

3) они находятся в соседних квадратах: $25 \cdot 25 = 625$ спос.

* т.к. при повороте только центральный урл перейдет в себя

$$\text{Всего: } 239 + 300 + 625 = 1164 \text{ } 1264$$

Ответ: ~~1164~~ способа 1264



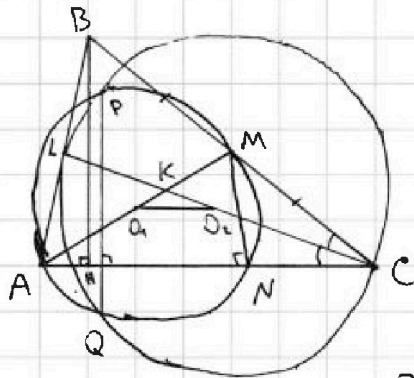
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



Решение:

Д.п.: O_1 - центр Ω , O_2 - центр ω
 $K = AM \cap CL$

$O_1 O_2 \perp PQ$ (т.к. PQ - хорда, соединяющая г. пересечения окр-ей)

Значит, $O_1 O_2 \parallel AC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle KO_1 O_2 = \angle KAC \\ \angle KO_2 O_1 = \angle KCA \\ \text{как смежные углы} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KO_1 O_2 \sim \triangle KAC \text{ по 2-ум углам} \Rightarrow$$

по т. Фалеса: $\frac{KO_1}{AO_1} = \frac{KO_2}{O_2 C}$, т.е. $\frac{KO_1}{\frac{AM}{2} - KO_1} = \frac{KO_2}{\frac{LC}{2} - KO_2} \Rightarrow$

$\angle LKM = \angle O_1 K O_2$
как вертикал.

$\Rightarrow \triangle O_1 K O_2 \sim \triangle M K L$ по 2-ум пропорц. сторонам и углу между ними

Значит, $\angle KO_1 O_2 = \angle KML \Rightarrow LM \parallel O_1 O_2 \parallel AC$, M - сер. $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow ML$ - средняя линия $\triangle ABC$ по признаку $\Rightarrow L$ - сер. AB
 CL - биссектриса угла $\angle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный по признаку ($AC = BC$)

Д.п.: $BM \perp AC$, $H \in AC$, пусть $AH = x$, тогда:

$HN = 20 - x$; $\angle MNA = 90^\circ$, т.к. опущена на диам. AM , значит:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$MN \parallel BH$
 M -сер. BC } $\Rightarrow MN$ - средняя линия $\triangle BCH$ по признаку. \Rightarrow

$$\Rightarrow HN = CN = 20 - x$$

По св-ву ~~к~~ квадратов проекций на гипотенузу: $AB^2 - AM^2 = BC^2 - CM^2$

$$26^2 - x^2 = (40 - x)^2 - (40 - 2x)^2$$

$$676 - x^2 = 1600 - 80x + x^2 - (1600 - 160x + 4x^2)$$

$$676 - x^2 = 1600 - 80x + x^2 - 1600 + 160x - 4x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 80x + 676 = 0$$

$$x^2 - 40x + 338 = 0$$

$$D/4 = 400 - 338 = 62$$

$$x = 20 \pm \sqrt{62}$$

$$AC = BC = 40 - x = 40 - 20 \pm \sqrt{62} = 20 \pm \sqrt{62}$$

Ответ: $20 \pm \sqrt{62}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть первый член арифм. прогрессии равен a_1 , тогда разность d

$$\begin{cases} 6x + 18 = a_1 + 4d \\ (x^2 - 4x)^2 = a_1 + 6d \\ -3x^2 = a_1 + 10d \end{cases} \quad d < 0$$

~~Взаимно $x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 = 2d$~~

$$\begin{cases} 6x + 18 = a_1 + 4d \\ x^4 - 8x^3 + 16x^2 = a_1 + 6d \\ -3x^2 = a_1 + 10d \end{cases}$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 6x + 18 + 3x^2 = a_1$$

~~$9x = 4; 42 = 0 = -48$~~

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 48 \\ + 86 \\ \hline 576 \end{array} \quad 238 + 1$$

$$2(6x + 18 - (x^2 - 4x)^2) = (x^2 - 4x)^2 + 3x^2$$

$$2(6x + 18) = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2$$

$$2(2x + 6) = (x^2 - 4x)^2 + x^2$$

$$4(x + 3) = x^4 - 8x^3 + 17x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = -4; 3$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: $2 \pm \sqrt{7}$

$x = \frac{1}{2}$ $4x = (\frac{1}{2} - 2)^2$

$x = -2$

$2 \cdot 2 = 4$

$30 - 16 = 14$

$$x \geq -3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \hline 25 \\ \times 24 \\ \hline 100 \\ + 50 \\ \hline 600 \end{array}$$

$$8/4 = 4 + 3 = 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

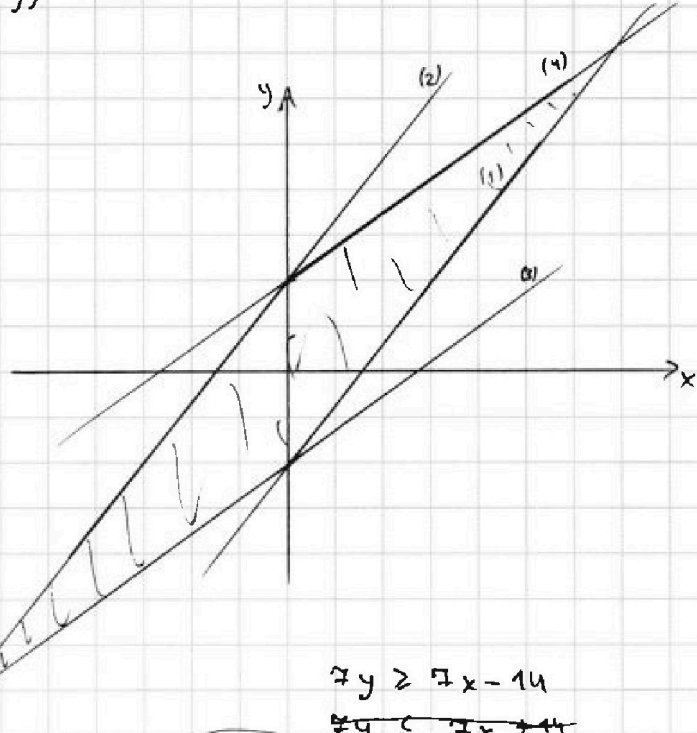
$$14x + 7y \rightarrow \min$$

$$7(2x + y) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq 4x - 6 \\ 3y \leq 4x + 6 \\ 4y \geq 3x - 8 \\ 4y \leq 3x + 8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3y = 4x + 6 & | \cdot 4 \\ 4y = 3x - 8 & | \cdot (-3) \end{cases}$$

$$16x + 24 - 9x + 24 = 0 \quad 7x - 7y = -42$$

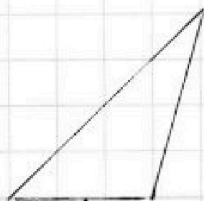
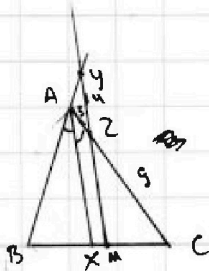
$$7x = -48 \quad x - y = -6$$

$$\begin{cases} 7x = -48 \\ y = \frac{14}{7}x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{48}{7} \\ y = -\frac{6 \cdot 4}{7} + 2 = -\frac{50}{7} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7y &\geq 7x - 14 \\ 7y &\leq 7x + 14 \\ 3y &\geq 4x - 6 \\ 14x + 28 &\geq 14y \\ 7y + 14x &\geq 7x + 14y - 42 \end{aligned}$$

$$14x + 7y = -\frac{48}{7} \cdot 14 - 7 \cdot \frac{50}{7} = -96 - 50 = -146$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разобьем квадрат на 4 равных квадрата по 25 узлов или 16кв.

Есть 3 варианта расп. белых кв:

в 1 кв., в соседних и в угл.

$$1) : \cancel{25 \cdot 25} = 625 \quad \frac{24 \cdot 24}{2} + 1 =$$

$$= 239$$

$$3) 25 \cdot 24 = 600$$

$$2) 25 \cdot 25 = 625$$

$$\begin{array}{r} 1225 \\ + 239 \\ \hline 1464 \end{array}$$

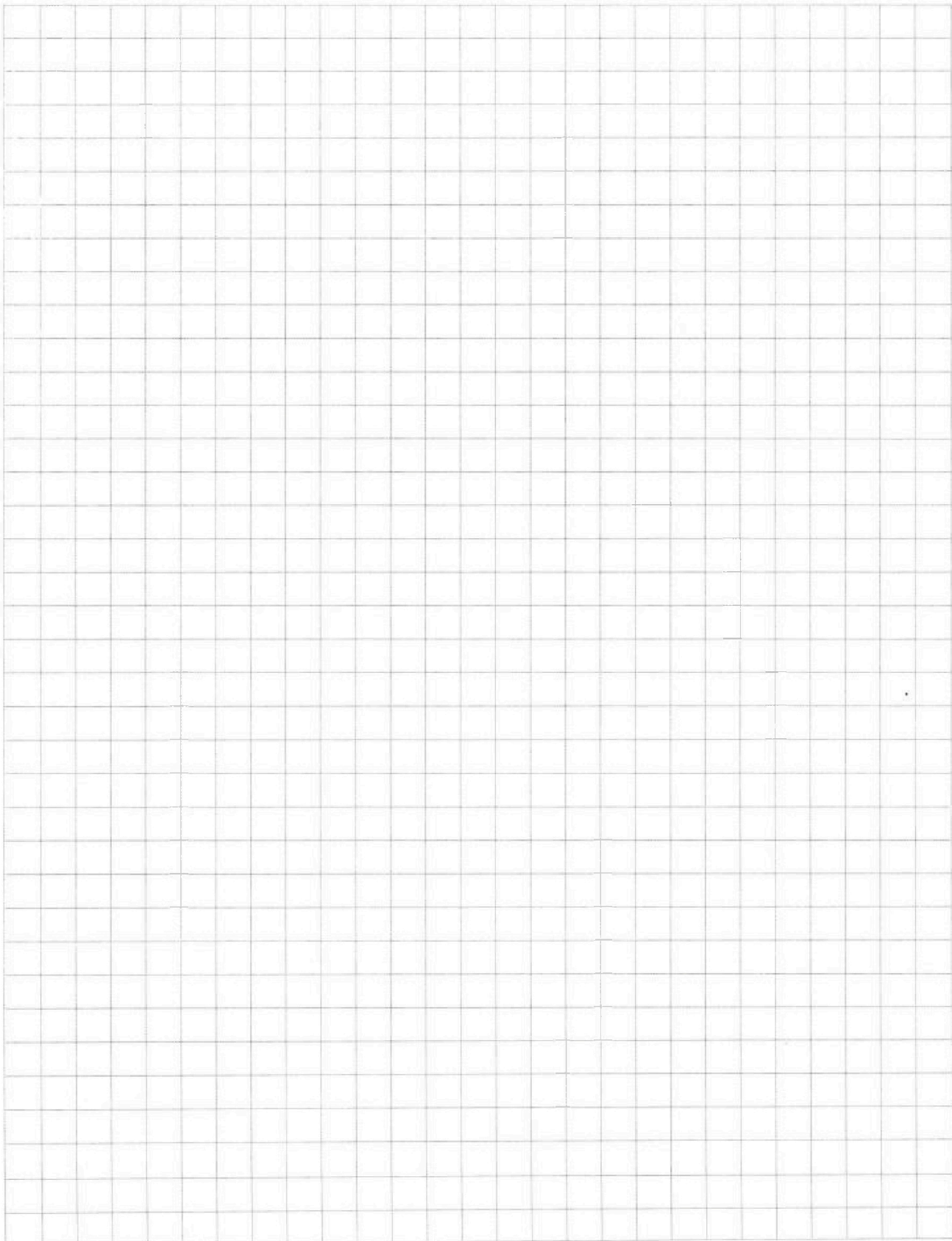


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



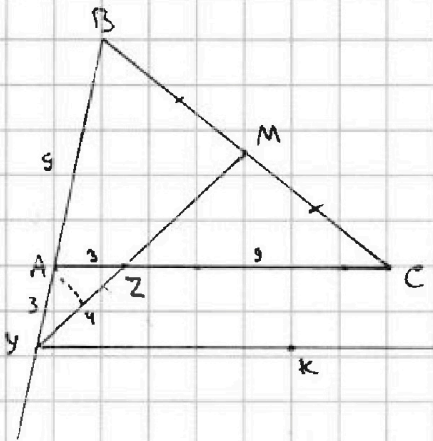
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Решение:



Д.п.: $l \parallel AC$, l - биссектриса угла A

$YM \parallel l$, тогда $\angle(AB; l) = \angle AMY$,

$\angle(l; AC) = \angle AZY$ как н.п. уг.

$\triangle AYZ$ - \triangle по углу. $\Rightarrow AY = AZ = 3$

по т. Менелая для $\triangle ABC$ и сек: $M-Z-Y$:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{ZY}{BY} = 1$$

$$BY = \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{3} \cdot 3 = 9$$

по т. кос-ов в $\triangle AYZ$: $16 = 18 - 2 \cdot 9 \cdot \cos \angle YAZ$

$$\cos \angle YAZ = \frac{2}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9}$$

по т. кос-ов в $\triangle ABC$: $BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}$

$$BC^2 = 225 + 24 = 249 = 3 \cdot 83$$

Ответ: $\sqrt{249}$

№ 3

$m, n \in \mathbb{N}$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9); \quad B = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = 24 \neq p^2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} m-n+9 = 13 \\ m-n = 4 \\ m-n+3 = 7 \end{cases} \quad \checkmark$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

всего 100 узлов

C_{100}^2 - кол-во вариантов раскраски, не учитывая наворота

$$\frac{C_{100}^2}{4} = \frac{100!}{2 \cdot 98! \cdot 4} = \dots \quad 4: 2 \text{ раза}$$

Реш для 2-ух узлов вместе не менее. най м. грани:

$$100 \cdot \frac{100 - (10+9)}{2} = \frac{100 \cdot 81}{2} = 50 \cdot 81 = 4050$$

$$100 \cdot (99 - (10+9))$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$x, y \geq 0$$

$$2x^2 - x^2 - 40x + 338 = 0$$

$$26 \cdot 26 = x + y + 1$$

$$\sim 7 = 13 \cdot 2 \cdot 13$$

$$2\sqrt{30} \sqrt{11} \quad 120 < 121$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{5} + 5 \sqrt{2\sqrt{30}}$$

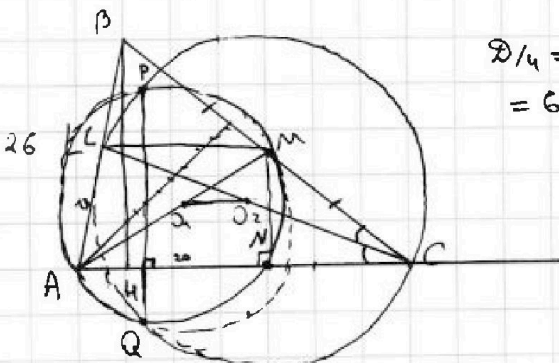
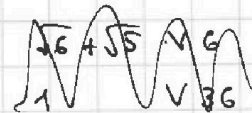
$$25 + 6 + 5 + \sqrt{120}$$

$$+ 2\sqrt{30} + 10\sqrt{5} + 10\sqrt{6}$$

$$\frac{26}{4} = 400 - 338 = 62$$

$$MN \perp AC$$

$$PQ \perp AC$$



$$AH = x \quad HN = 20 - x$$

$PQ \perp AC \Rightarrow O_1 O_2 \parallel AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow LM \parallel AC \Rightarrow L$ -центр $AB \Rightarrow LM$ -середина \Rightarrow
 $\Rightarrow BC = AC$

$$AC = 40 - x$$

$$BH = \sqrt{26^2 - x^2}$$

$$26^2 - x^2 = (40 - x)^2 = (40 - 2x)^2$$