



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
- † 2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

- † 3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
- † 4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

- † 6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть k — разность прогрессии, тогда

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)^2 = 6 - 9x + 2k \\ 9x^2 = 6 - 9x + 6k \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)^2 = 6 + 9x - 2k \\ 3x^2 - 2 + 3x = 2k \end{cases}$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x = 3x^2 - 2 + 3x$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$(x-1)^2 (x-1-\sqrt{5}) (x-1+\sqrt{5}) = 0$$

$x = 1 + \sqrt{5}$ не подходит. $a_4 < a_6 > a_{10}$

$x = 1 - \sqrt{5}$ не подходит

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 1

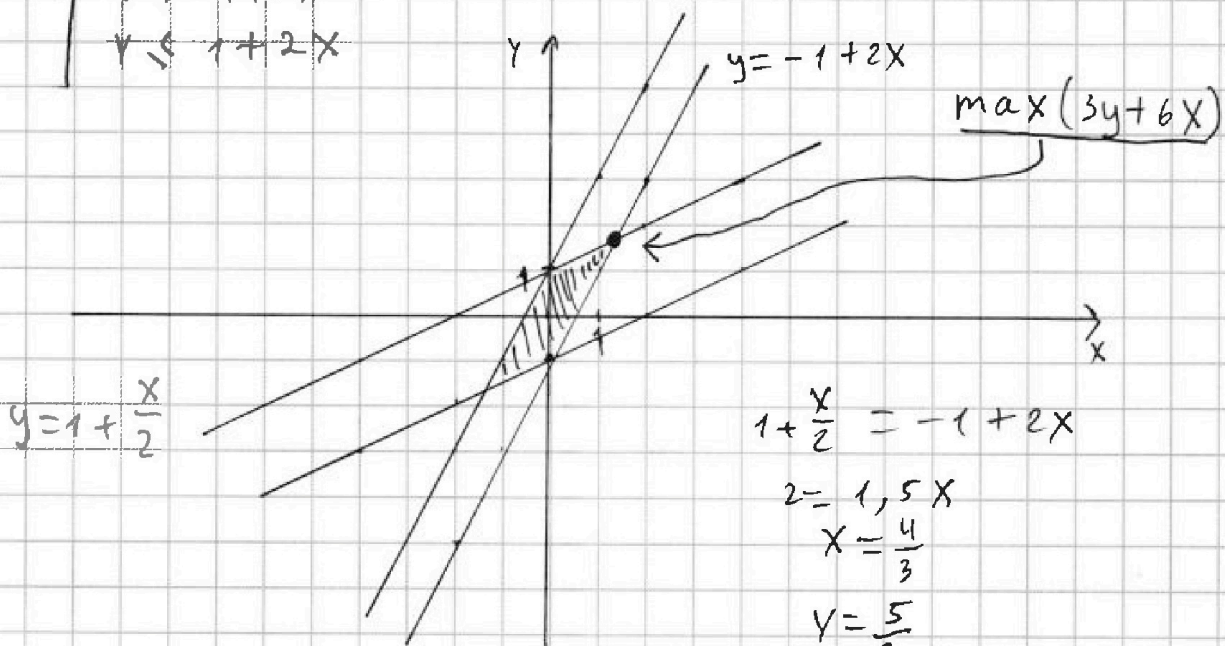
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 \\ x-2y \geq -2 \\ 2x-y \leq 1 \\ 2x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -1 + \frac{x}{2} \\ y \leq 1 + \frac{x}{2} \\ y \geq -1 + 2x \\ y \leq 1 + 2x \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 1 + \frac{x}{2} &= -1 + 2x \\ 2 &= 1,5x \\ x &= \frac{4}{3} \\ y &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$3y + 6x = 5 + 8 = 13$$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 4n = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

p, q - простые.

I $A = 11p^2; B = 75q^2$
из разложения A

1) $11p^2 - 1 = 7$ (X)

2) $11p - p = 7$ (X)

3) $p^2 - 11 = 7$ (X)

4) $11 - p^2 = 7 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow (m+2n) = 11 \Rightarrow$

1) $m = 1, n = 5$ (X)

2) $m = 3, n = 4$ (X)

3) $m = 5, n = 3$ (✓) (5; 3)

4) $m = 7, n = 2$ (X)

5) $m = 9, n = 1$ (X)

$m \equiv 1 \pmod{2}$

$B = (m+2n+9)$
 $B = 20$
 $B = 2$

$q = 2$

↓
поискосум.

II $A = 75q^2; B = 11p^2$
разложение B

$(m+2n+9) = (\dots)$

1) $mn = p^2 (\dots) = 11 \Rightarrow m+n = 2$ (X)

2) $mn = 11p (\dots) = p$

3) $m = 1, n = p (\dots) = 11p \Rightarrow (1+9+2p) = 11p \Rightarrow p = \frac{10}{9}$ (X)

4) $m = p, n = 1 (\dots) = 11p \Rightarrow (p+2+9) = 11p \Rightarrow p = \frac{11}{10}$ (X)

5) $m = 1, n = 1 (\dots) = 11p^2 \Rightarrow 12 = 11p^2$ (X)

6) $mn = 11p^2 (\dots) = 1$ (X)

7) $mn = 11 (\dots) = p^2$

1) $m = 1, n = 11, p^2 = 32$ (X)

2) $m = 11, n = 1, p^2 = 22$ (X)

Ответ: (5; 3)

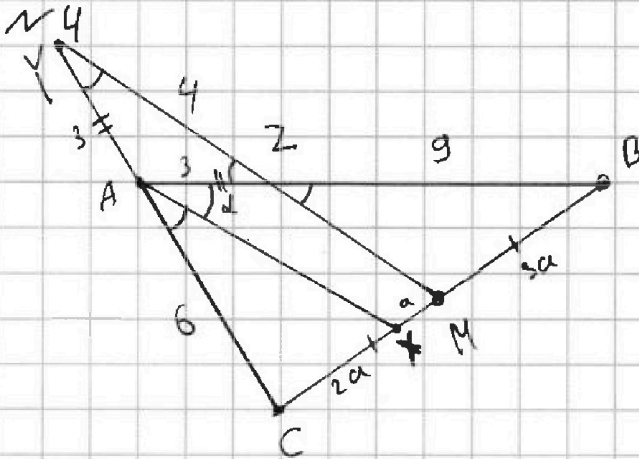


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Издв парр. AM и ZM : $\angle BZM = \alpha = \angle AYZ = \angle YZA$
(секунс. AY и AZ)

2) $AY = 3$ (равн. тр.)

3) Пусть $MX = a$, тогда по теор. Фалеса :

$$\frac{CX}{6} = \frac{MX}{3} \Rightarrow CX = 2a \Rightarrow BC = 6a, MM = 3a$$

$$\frac{BZ}{3a} = \frac{AZ}{a} \Rightarrow BZ = 9$$

4) Из $\triangle YAZ$ по теор. косин.

$$\cos(180 - 2\alpha) = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos(2\alpha) = -\frac{1}{9}$$

из $\triangle ACB$ по теор. кос.

$$BC^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 180 + 16 = 196$$

$$BC = 14$$

Ответ: 14

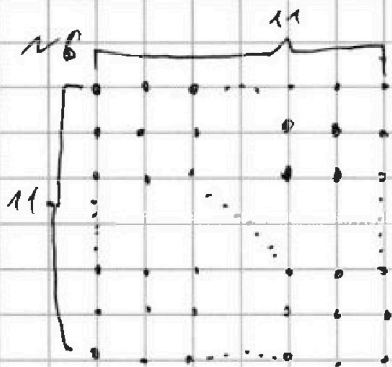


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметил, что для каждой пары, симметричной относительно центра, будет всего 1 дуга.
Для других пар по 3 дуги.

$$\frac{11^2 - 1}{2} = 60 \text{ - пар, симм.}$$

$$\frac{121 - 120}{2} = 121 - 60 \text{ - всего пар.}$$

$$121 - 60 - 60 = 60^2 - 2 \text{ - пар не симм.}$$

Тогда без учета дуг, разн. пар будет

$$\frac{60}{2} + \frac{60^2 - 2}{4} = 30 + 30^2 - 2 = 1830$$

Ответ: 1830

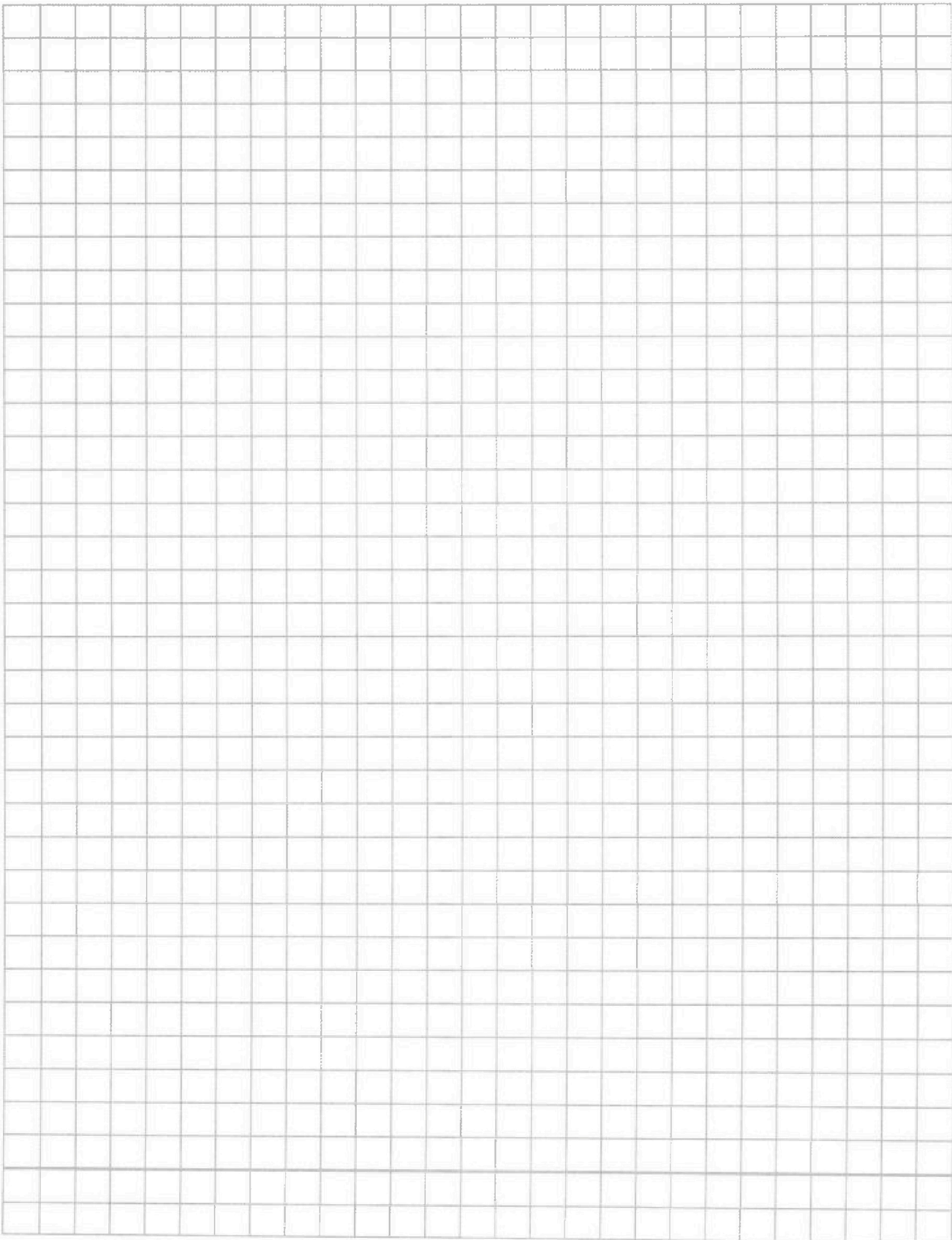


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{ccc} 4 & & 10 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 6-9x & (2x^2-2x)^2 & 9x^2 \\ & \text{Ф} & \\ & 6 & \end{array}$$

$$\frac{2}{3}(6-9x) + \frac{1}{3}(9x^2) = (x^2-2x)^2$$

$$4 - 6x + 3x^2 = (x^2-2x)^2$$

$$3x^2 - 6x + 4 = x^2(x-2)^2$$

$$3x^2 - 6x + 4 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 4 & x^2 - 2x + 1 \\ -x^4 - 2x^2 + x^2 & x^2 - 2x - 4 \\ \hline -2x^3 + 0 + 6x & \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x & \\ \hline -4x^2 + 8x + 4 & \end{array}$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = 1 + \sqrt{5}$$

$$x^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$9x^2 = 54 + 18\sqrt{5}$$

$$x^4 + 2x = 8 + 4\sqrt{5}$$

x

$$(\quad)^2 = 144 + 64\sqrt{5}$$

$$x = 1 - \sqrt{5}$$

$$x^2 = 6 - 2\sqrt{5}$$

$$9x^2 = 54 - 18\sqrt{5}$$

$$x^4 + 2x = 8 - 4\sqrt{5}$$

$$(\quad)^2 = 64 + 36 - 64\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m + 2n - 7)(m + 2n)$$

$$B = mn(m + 2n + 9)$$

$$A = 11p^2 \quad B = 75q^2$$

$$1 \quad 11p^2 \quad \times$$

$$p \quad 11p \quad \times$$

$$p^2 \quad 11 \rightarrow p=2 \quad (m+2n)=11 \rightarrow p:2 \quad \times$$

$$A = 75p^2$$

$$B = 11p^2$$

$$1) \quad mn = p^2 \quad (\dots) = 11 \quad \times$$

$$2) \quad mn = 11p \quad (\dots) = p$$

$$m = p \quad \times$$

$$n = 1$$

$$mn = p \quad (\dots) = 11p$$

$$\begin{cases} m=1 \\ n=p \end{cases} \quad 11p = 10 + 2p$$

$$p = \frac{10}{9} \quad \times$$

$$\begin{cases} m=p \\ n=1 \end{cases} \quad 11p = p + 11$$

$$p = \frac{11}{10} \quad \times$$

$$m=1 \\ n=1$$

$$(\dots) = 11p^2$$

$$11 = 11p^2 \quad \times$$

$$A = 11 \cdot 4 \quad p=2$$

$$B = 15 \cdot 20 = 300 \quad q=2$$

$$3. \quad 6 \cdot 5 = 18$$

$$\begin{array}{r} +3 \\ +3 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +6 \end{array} \quad 15$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

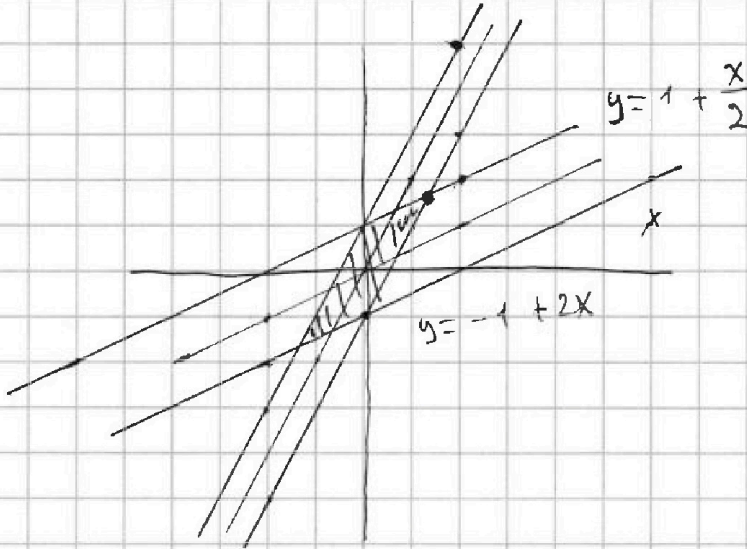
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21

$$9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 4k$$

$$(x^2 + x)(5x - x^2) = 4k$$

22



$$1 + \frac{x}{2} = -1 + 2x$$

$$2 = 1,5x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{5 + 8 = 13}$$

23

$$A = (m + 2n)^2 - 7(m + 2n) \quad B = mn(m + 2n + 9)$$

24

$$(x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x) = 3x^2 - (2 - 3x)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x = 3x^2 - 2 + 3x$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x-1)^2((x+1)^2 - 5) = 0$$

$x=1$
 $x \leq 7$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

$$x=y$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(2+y)}$$

$x=y$
 $z = 2,21$

$$2ab - a + b - 7 = 0$$

$$a - \sqrt{9-a} + 7 = 2\sqrt{7-a}$$

$$7: 3 \cdot 0 + 7 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x-1 \\ \underline{x^4 - x^3} \\ -3x^3 + x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ -2x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ -4x - 4 \\ \underline{-4x - 4} \\ 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

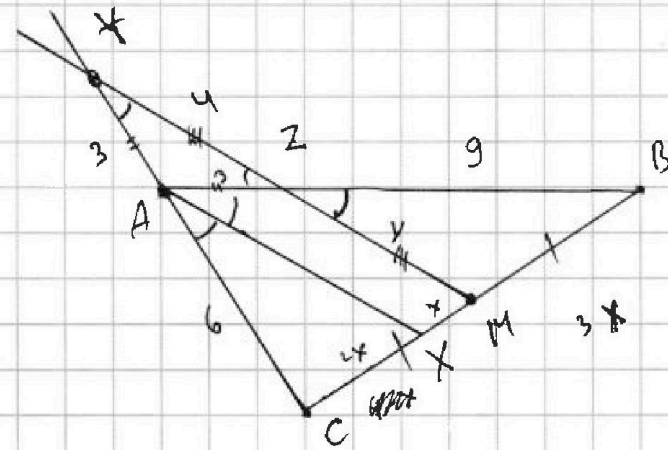
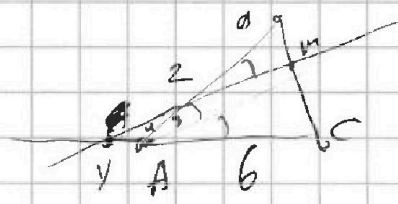
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11

$$\left[\frac{121}{2} \right] = 60 \text{ кер} - \text{разм. без ун. кер.}$$

$$\frac{121 - 120}{2} - 60 = 60 \cdot (121) - 60 = 60^2 - 2$$

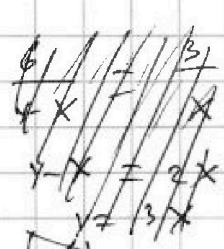
$$30 + \frac{60^2 - 2}{4} = 30 + 30^2 - 2 = 1830$$



$$\frac{9}{3} = \frac{3}{9} = \frac{3x}{7x} = 1$$

$$\frac{4}{y} = \frac{3x}{6x} = \frac{6}{3} = 1$$

$y = 4$



$$4^2 = 16 = 9 - 2 \cdot 9 \cos(180 - 2\alpha)$$

$$16 = 18(1 - \cos(180 - 2\alpha))$$

$$\frac{16}{18} = 1 - \cos$$

$$\cos = 1 - \frac{16}{18}$$

$$\cos = \frac{1}{9}$$

$$\cos(2\alpha) = -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 36 + 44 - 2 \cdot 36 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 112 = 292$$

$$BC = 2\sqrt{73}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 8 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 292 \\ - 28 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 14 \\ \hline 56 \\ \hline 14 \\ \hline 196 \end{array}$$