

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



2 3
9 2
2 8
4
9 3
11 3

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q - простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

Handwritten calculations for problem 7, including algebraic manipulations and geometric reasoning.

$$2t^2 - 9 + n^2 = 0$$

$$4t - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{4}$$

$$185 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot 6 \cdot 12$$

$$5n(4-13) = 6 \cdot 25$$

$$= 104^2 - 9 \cdot 16^2 = \sqrt{104^2 - 144} = \sqrt{10816} = 104$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Первый член прогрессии - a
шаг прогрессии - b

Получи:

$$a + 4b = 6x + 18$$

$$a + 6b = (x^2 - 4x)^2 = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$a + 10b = -3x^2$$

$$2b = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$4b = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$3x^4 + 9x^2 = 24x^3 + 12x + 36$$

$$x^4 + 16x^2 = 8x^3 + 4x + 12$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 4x + 12 - x^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 = 4x + 12 - x^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 = (6-x)(x+2) \quad x \neq 0$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $14x + 4z = K$, тогда $2x + z = \frac{K}{2} = t$

$z = t - 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |7x - 3z| \leq 6 \\ |3x - 4z| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |7x - 3(t - 2x)| \leq 6 \\ |3x - 4(t - 2x)| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |7x - 3t + 6x| \leq 6 \\ |3x - 4t + 8x| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |10x - 3t| \leq 6 \\ |11x - 4t| \leq 8 \end{cases}$$

~~10x - 3t > 0~~ \Rightarrow ① $10x - 3t \geq 0: \begin{cases} t \leq \frac{10}{3}x \\ 10x - 3t \leq 6 \Rightarrow 10x - 6 \leq 3t \Rightarrow 110x + 6 \leq 3t \Rightarrow t \geq \frac{10}{3}x - 2 \end{cases}$

② $10x - 3t \leq 0: \begin{cases} t \geq \frac{10}{3}x \\ 3t - 10x \leq 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow t \leq 2 + \frac{10}{3}x \end{cases}$

③ $11x - 4t \geq 0: \begin{cases} t \leq \frac{11}{4}x \\ t \geq \frac{11}{4}x - 2 \end{cases}$

④ $11x - 4t \leq 0: \begin{cases} t \geq \frac{11}{4}x \\ t \leq 2 + \frac{11}{4}x \end{cases}$

покажем эти ф-лы

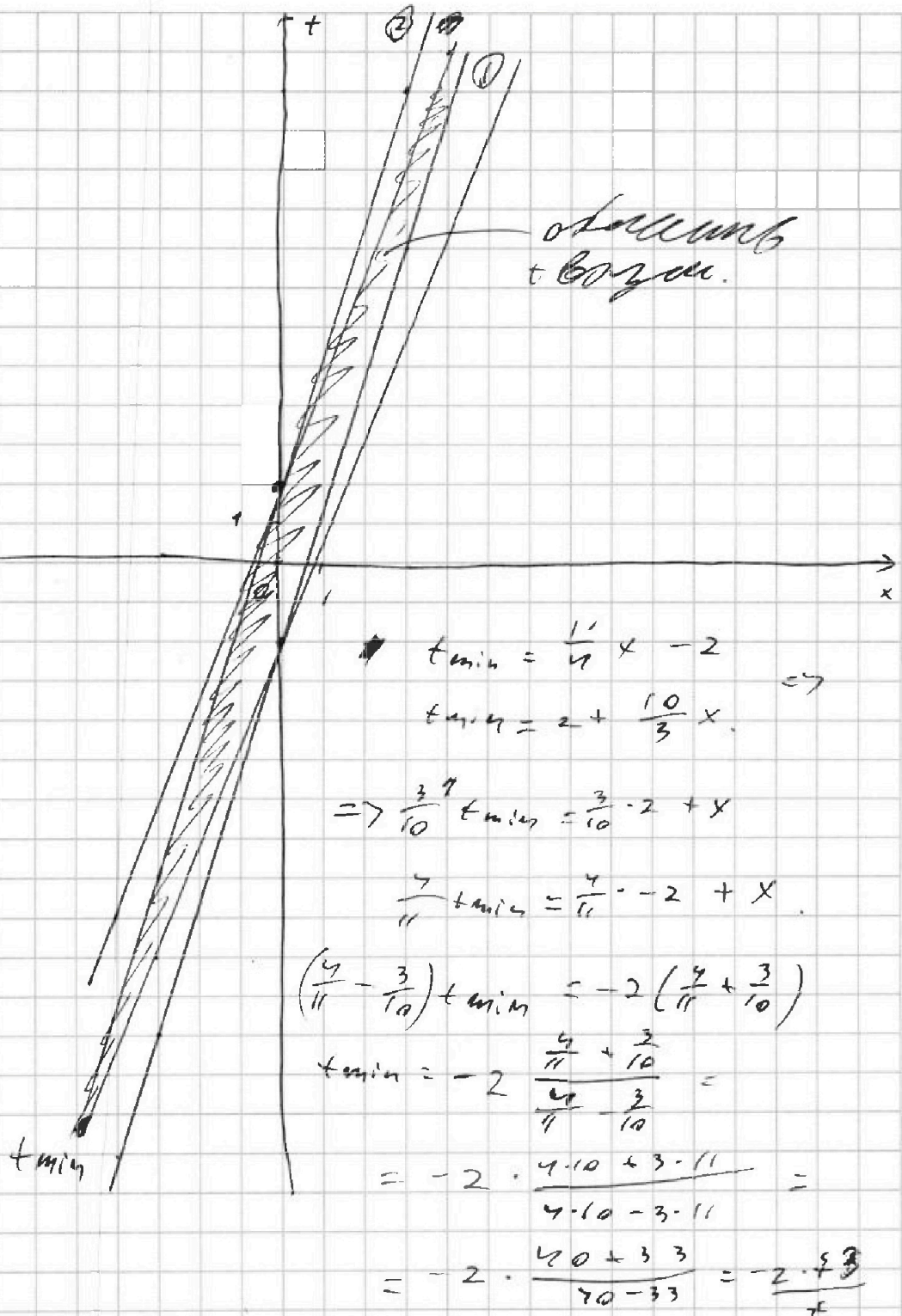


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$14x + 88 = 9t_{min} = -146$$

ответ: -146.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

A-четн

$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{2}{2}$ A-нечн $\left\{ \begin{array}{l} m-n \text{ четн} \\ m-n \text{ нечетн} \end{array} \right. \Rightarrow m-n \text{ четн} \Rightarrow \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{2}{2}$

A: 7
m-n: 4

② $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ четн} \\ m \text{ нечетн} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p=2 \\ q=2 \end{array} \right.$

② $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ четн} \\ m \text{ нечетн} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p=2 \\ q=2 \end{array} \right.$

① $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ нечетн} \\ m \text{ четн} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ нечетн} \\ \beta \text{ четн} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \equiv -1 \pmod{4} \\ n \equiv -1 \pmod{4} \\ m \equiv 1 \pmod{4} \\ n \equiv 1 \pmod{4} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \beta \text{ четн} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p=2 \\ q=2 \end{array} \right.$

① $\Rightarrow \beta \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 3q^2 \\ A = 13 \cdot 4^2 = 13 \cdot 4 \end{array} \right. \Rightarrow (m-n)(m-n+9) = 13 \cdot 4$
н.к. $m-n: 4 \Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} m-n = 4 \\ m-n+9 = 13 \end{array} \right. \Rightarrow m = n+4$

$\left\{ \begin{array}{l} m-n = -4 \cdot 13 \\ m-n+9 = -4 \end{array} \right. \Rightarrow \emptyset$

② $(m-n)(m-n+9) = (m-n)^2 + 9(m-n) = 13 \cdot 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m-n = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 13 \cdot 4}}{2}$

$x_1 = 4$
 $x_2 = -13$

$\Rightarrow \beta = 3q^2 = 4 \cdot (4+9) \cdot 4 = 3 \cdot 4$

$\Rightarrow 10m^2 - 150m + 10n^2 = 3 \cdot 4$

$10m^2 - 150m + 12 = 0$

или $5m^2 - 65m + 4 = 0$

не имеют решений по mod 5.

$\beta = 3q^2 = 4(n+4) \cdot 4 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$
 $\left\{ \begin{array}{l} m = -4 \\ m = 3 \\ m = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \emptyset$

$\beta = 3q^2 = n(n+9) \cdot 4 \Rightarrow$
 $\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \\ n+9 = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 3 \\ m = 7 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} n = -1 \\ n+9 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \emptyset$

$\left\{ \begin{array}{l} n = -3 \\ n+9 = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \emptyset$

$(m-n)(m-n+9) = 3 \cdot 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m-n = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2}$

не имеют целочисл. реш.

\Rightarrow Ответ: $n = 3$
 $m = 7$



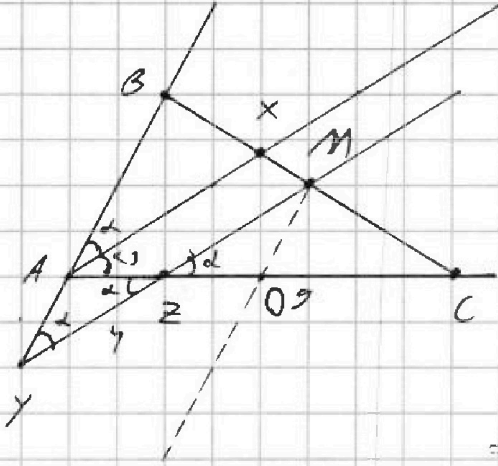
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
(из 1)

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.



$$AC = 12 \Rightarrow BC = AC - AZ = 9$$

Ах-длина \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{BX}{XM+ML} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{12} = \frac{ML-XM}{ML+XM}$$

и.к. М-средина BC

т.к. параллели AX || YM:

$$\angle XMC: \frac{AY}{AB} = \frac{XM}{XB}$$

$$\angle ACX: \frac{CZ}{AZ} = \frac{ML}{XM} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AZ}{12} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow AZ = 6.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{YZ}{2AY} = \frac{2}{3} \Rightarrow AY = 3 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \triangle AYZ - \text{равност.}$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } \cos \angle BAC: BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 2\alpha = \\ &= 36 + 144 - 144(2 \cos^2 \alpha - 1) = 36 + 144 - 144 \cdot (2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1) = \\ &= 36 + 144(1 - (2 \cdot \frac{4}{9} - 1)) = 36 + 144 \cdot 2 \cdot \frac{5}{9} = 144 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 12$$

Ответ: $BC = 12$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N5 \quad \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} \\ 4x^7 + x - 5\sqrt[4]{x} = 4x^4 - 5\sqrt[4]{x} + 2 \Rightarrow x \geq 0, 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x^7 - 4x^4 + x - 2 + 5\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[4]{x} &= 0 \\ 4(x^2+x^2)(x^2-x^2) + x - 2 + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \\ 7(x^2+x^2)(x+2)(x-2) + (x-2) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \\ 7(x^2+x^2)(x+2)(\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + (\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \\ 7(x^2+x^2)(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) - 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Пусть $\sqrt{x} - \sqrt{x} \neq 0$
 Тогда $4(x^2+x^2)(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) - 5(\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + 5 = 0$
 $\Rightarrow 20x \cdot x \geq 0 \vee 2 \geq 0$

и одновременно
 $\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x} \Rightarrow x = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} \\ x = 2 \\ x \geq 0, x \in [-6; 5] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \\ x = 2 \\ \Delta \neq 0; \sqrt{x+6} \neq \sqrt{5-x}, x \in [0; 5] \\ \sqrt{x+6} = \sqrt{5-x} \Rightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} \\ = \sqrt{5-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-6+5 = 2 \cdot 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta(1-26) = 6-5 \Rightarrow \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \frac{6-5}{1-26} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (x+6) \cdot 5 - x - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} &= 4(x+6)(5-x) + 25 - 2 \cdot 20\sqrt{(x+6)(5-x)} \\ \Rightarrow 2(x+6)(5-x) - 9\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25 &= 0 \Rightarrow \sqrt{(x+6)(5-x)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 25}}{2} \\ &= \frac{9+5}{2} \\ \text{ННХ} \\ x &= 2 \\ \text{ННН} \quad x &\in [0; 5] \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} x = g \\ \text{или } x \in [0; 5] \\ 30 - x - x^2 = 49 \\ 30 - x - x^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = g \\ \text{или } x \in [0; 5] \\ x^2 + x + 19 = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 19}}{2} \Rightarrow x < 0 \\ x_1 = \frac{-1 - \sqrt{75}}{2} < 0 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{75}}{2} < 5 \\ x^2 + x - 28 = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 28}}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

Answer: ~~$f = g = \frac{\sqrt{25} + 1}{2}$~~ $x = g = \frac{\sqrt{105} - 1}{2}$

~~$f = g = \frac{\sqrt{11.3} + 1}{2}$~~



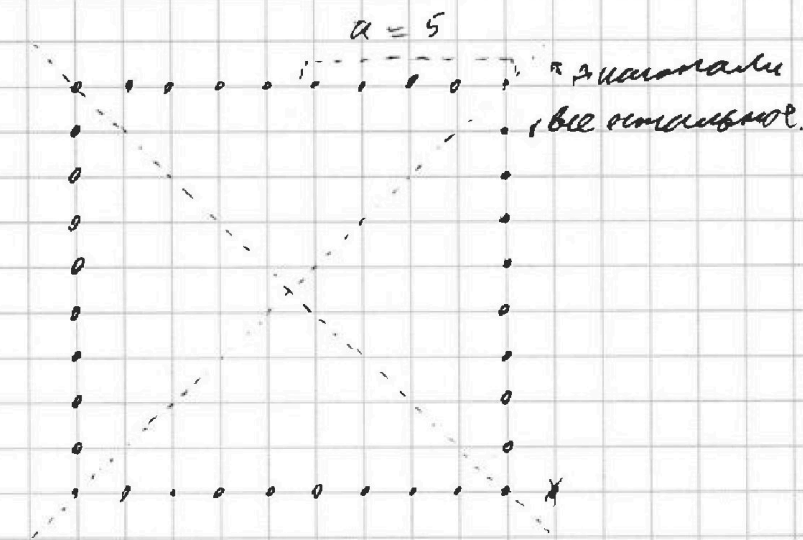
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА () ИЗ ()

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



- Всего шаронала:
- 1) 1-е шаронала - шаронала
 - 2-е шаронала
 - 2) 1-е шаронала
 - 2-е шаронала
 - 3) 1-е шаронала
 - 2-е шаронала

1) где на шаронала шаронала от шаронала \Rightarrow
 \Rightarrow 2a шаронала
 шаронала шаронала $\Rightarrow \frac{4a \cdot (4a - 4)}{8} \Rightarrow$
 \Rightarrow 2a(а-1) шаронала. \Rightarrow всего $\frac{2a^2}{2}$

2) шаронала: 1-е шаронала - $4a^2 - 4a$
 2-е шаронала - $4a$
 \Rightarrow всего $\frac{1}{2} 4a(a-1) + 4a(a-1) \frac{1}{2} a = \frac{4a^2(a-1)}{2}$

3) шаронала: 1-е шаронала - $4a^2 - 4a$
 1-е шаронала - $4a^2 - 4a - 1$
 \Rightarrow всего $\frac{1}{8} 4a(a-1)(4a^2 - 4a - 1) = \frac{a(a-1)(4a^2 - 4a - 1)}{2}$

\Rightarrow всего шаронала $2a^2 + 4a^2(a-1) + \frac{a(a-1)(4a^2 - 4a - 1)}{2} =$
 $= 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^2 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{4^2}{2} \cdot (4 \cdot 5 \cdot 4 - 1) =$
 $= 5(10 + 4 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 79) = 1240$

Ответ: 1240

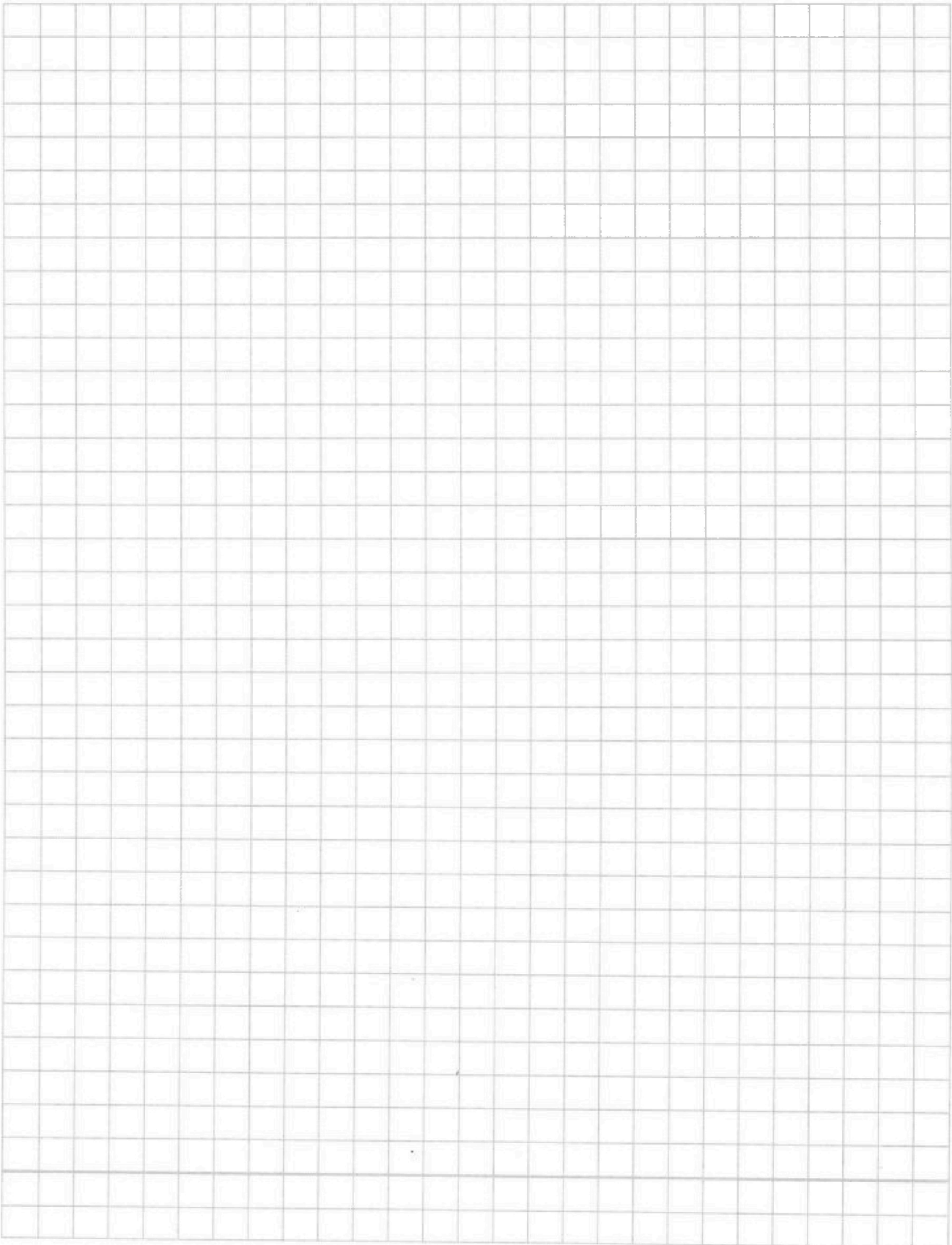


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

