

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



2 3  
9 2  
2 8  
4  
9 3  
11 3

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .

Handwritten calculations for problem 7, including algebraic manipulations and geometric reasoning.

$$2t^2 - 9 + n^2 = 0$$

$$4t - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{4}$$

$$185 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot 6 \cdot 12$$

$$5n(4-13) = 6 \cdot 25$$

$$= 104^2 - 9 \cdot 16^2 = \sqrt{6} - \sqrt{5} + 5 = 2\sqrt{30}$$

$$= 2195^2 - 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Первый член прогрессии -  $a$   
шаг прогрессии -  $b$

Получим:

$$\begin{aligned} a + 4b &= 6x + 18 \\ a + 6b &= (x^2 - 4x)^2 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 \\ a + 10b &= -3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \\ 4b &= -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 \quad | \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 &= -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 \\ 3x^4 + 9x^2 &= 24x^3 + 12x + 36 \\ x^4 + 3x^2 &= 8x^3 + 4x + 12 \\ x^4 - 8x^3 + 16x^2 &= 4x + 12 - x^2 \\ (x^2 - 4x)^2 &= 4x + 12 - x^2 \\ (x^2 - 4x)^2 &= (6-x)(x+2) \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

$$x = 2$$

Ответ:  $x = 2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $14x + 4z = K$ , тогда  $2x + z = \frac{K}{2} = t$

$z = t - 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |7x - 3z| \leq 6 \\ |3x - 4z| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |7x - 3(t - 2x)| \leq 6 \\ |3x - 4(t - 2x)| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |7x - 3t + 6x| \leq 6 \\ |3x - 4t + 8x| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |10x - 3t| \leq 6 \\ |11x - 4t| \leq 8 \end{cases}$$

~~10x - 3t > 0~~  $\Rightarrow$  ①  $10x - 3t \geq 0: \begin{cases} t \leq \frac{10}{3}x \\ 10x - 3t \leq 6 \Rightarrow 10x - 6 \leq 3t \Rightarrow 110x + 6 \leq 3t \Rightarrow t \geq \frac{10}{3}x - 2 \end{cases}$

②  $10x - 3t \leq 0: \begin{cases} t \geq \frac{10}{3}x \\ 3t - 10x \leq 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow t \leq 2 + \frac{10}{3}x \end{cases}$

③  $11x - 4t \geq 0: \begin{cases} t \leq \frac{11}{4}x \\ t \geq \frac{11}{4}x - 2 \end{cases}$

④  $11x - 4t \leq 0: \begin{cases} t \geq \frac{11}{4}x \\ t \leq 2 + \frac{11}{4}x \end{cases}$

покажем эти ф-лы

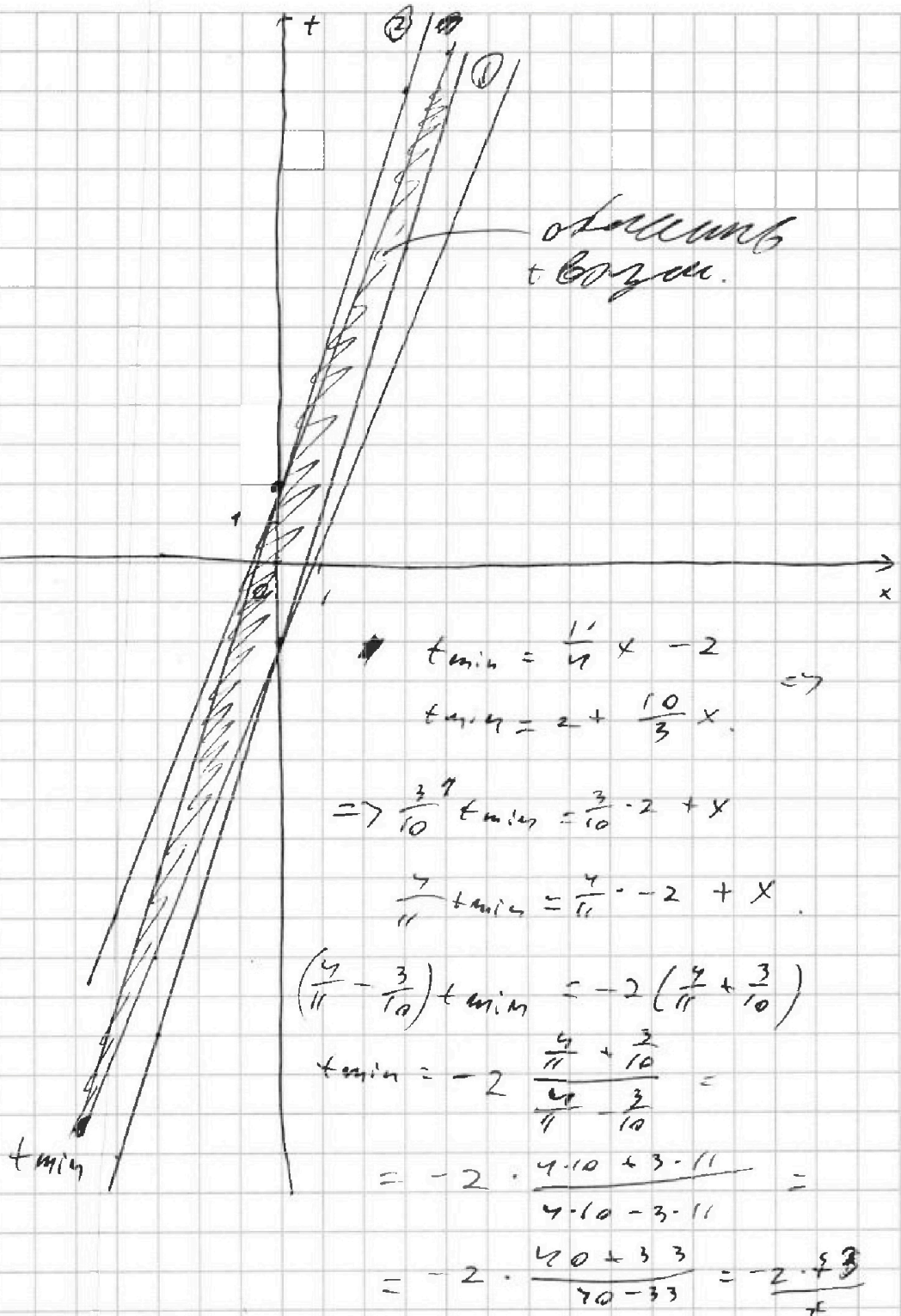


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$14x + 88 = 9t_{\min} = -146$$

ответ: -146.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 2m - 2n = (m-n)^2 + 2(m-n) = (m-n)(m-n+2)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

A-четн

$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{2}{2}$  A-четн  $\begin{cases} m-n \\ m-n \end{cases} \rightarrow \text{нечетн} \Rightarrow m-n+2 = \text{четн} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=2 \end{cases}$

$A: 7$   
 $m-n: 4$

②  $\begin{cases} m-\text{четн} \\ m-\text{четн} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=2 \end{cases}$

②  $\begin{cases} m-\text{нечетн} \\ n-\text{нечетн} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=2 \end{cases}$

①  $\begin{cases} m-\text{нечетн} \\ n-\text{нечетн} \end{cases} \Rightarrow \beta = \text{нечетн} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=2 \end{cases}$

②  $\begin{cases} m-\text{нечетн} \\ n-\text{четн} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \equiv -1 \pmod 4 \\ n \equiv -1 \pmod 4 \\ m \equiv 1 \pmod 4 \\ n \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \beta = 2 \text{ четн} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=2 \end{cases}$

①  $\Rightarrow \beta \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3 \cdot 4^2 \\ A = 13 \cdot 4^2 = 13 \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow (m-n)(m-n+2) = 13 \cdot 4$   
н.к.  $m-n: 4 \Rightarrow$

$\begin{cases} m-n = 4 \\ m-n+2 = 13 \end{cases} \Rightarrow m = n+4 \Rightarrow$

$\begin{cases} m-n = -4 \cdot 13 \\ m-n+2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$

②  $(m-n)(m-n+2) = (m-n)^2 + 2(m-n) = 13 \cdot 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow m-n = \frac{-2 \pm \sqrt{8 + 4 \cdot 13 \cdot 4}}{2}$

$x_1 = 4$   
 $x_2 = -13 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 3 \cdot 4^2 = 4 \cdot (4+4) \cdot 4 = 3 \cdot 4$

$\Rightarrow 10m^2 - 150n - 10n^2 = 4 \cdot 4$

$10m^2 - 150n + 12 = 0$

или  $5m^2 - 65n + 4 = 0$

не имеют решений по mod 5.

$(m-n)(m-n+2) = 3 \cdot 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow m-n = \frac{-2 \pm \sqrt{8 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2}$

не имеют целочисл. реш.

$\Rightarrow$  Ответ:  $n = 3$   
 $m = 7$

$\beta = 3 \cdot 4^2 = n(n+2) \cdot 4 \Rightarrow$   
 $\begin{cases} n=3 \\ n+2=3 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} n=3 \\ n+2=7 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\begin{cases} n=1 \\ n+2=3 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\begin{cases} n=1 \\ n+2=7 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\begin{cases} n=-3 \\ n+2=3 \end{cases} \Rightarrow$

$\beta = 3 \cdot 4^2$



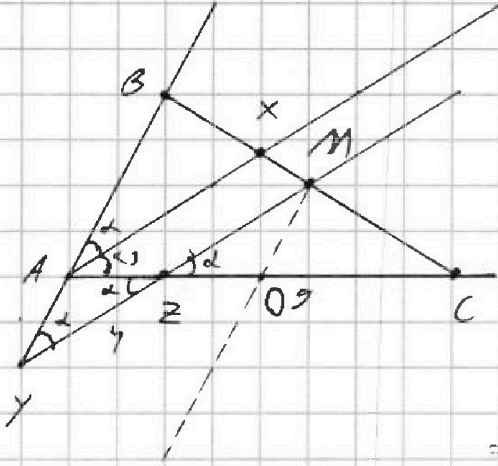
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
( из 1 )

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4.



$$AC = 12 \Rightarrow BC = AC - AB = 9$$

Ах-длина  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BX}{XM+ML} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{12} = \frac{ML-XM}{ML+XM}$$

и.к. М-средина BC

т.к. параллели AX // YM:

$$\angle XMC: \frac{AY}{AB} = \frac{XM}{XB}$$

$$\angle ACX: \frac{CZ}{AZ} = \frac{ML}{XM} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 6.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{XZ}{2AY} = \frac{2}{3} \Rightarrow AY = 3 \Rightarrow \text{т.к. } \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \triangle AYZ - \text{равноб.}$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } \cos \angle BAC: BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha = \\ &= 36 + 144 - 144(2 \cos^2 \alpha - 1) = 36 + 144 - 144 \cdot (2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1) = \\ &= 36 + 144(1 - (2 \cdot \frac{4}{9} - 1)) = 36 + 144 \cdot 2 \cdot \frac{5}{9} = 144 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 12$$

Ответ: BC = 12





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N5 \quad \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} \\ 4x^7 + x - 5\sqrt[4]{x} = 4x^4 - 5\sqrt[4]{x} + 2 \Rightarrow x \geq 0, 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x^7 - 4x^4 + x - 2 + 5\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[4]{x} &= 0 \\ 4(x^2+x^2)(x^2-x^2) + x - 2 + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \\ 7(x^2+x^2)(x+2)(x-2) + (x-2) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \\ 7(x^2+x^2)(x+2)(\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + (\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \\ 7(x^2+x^2)(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) - 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Пусть  $\sqrt{x} - \sqrt{x} \neq 0$   
 Тогда  $4(x^2+x^2)(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) - 5(\sqrt{x}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}) + 5 = 0$   
 $\Rightarrow 20x \cdot x \cdot x \geq 0 \quad x \geq 0 \quad x \geq 2$

и одновременно  
 $\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x} \Rightarrow x = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} \\ x = 2 \\ x \geq 0, x \in [-6; 5] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \\ x = 2 \\ \Delta \neq 0; \sqrt{x+6} \neq \sqrt{5-x}, x \in [0; 5] \\ \sqrt{x+6} = \sqrt{5-x} \Rightarrow \sqrt{5-x} = 6 \\ = \sqrt{5-x} \Rightarrow \sqrt{5-x} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-6+5 = 2 \cdot 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta(1-26) = 6-5 \Rightarrow \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \frac{6-5}{1-26} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (x+6) \cdot 5 - x - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} &= 4(x+6)(5-x) + 25 - 2 \cdot 18 \sqrt{(x+6)(5-x)} \\ \Rightarrow 2(x+6)(5-x) - 9\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25 &= 0 \Rightarrow \sqrt{(x+6)(5-x)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 25}}{2} \\ &= \frac{9+5}{2} \\ \text{ННХ} \\ x &= 2 \\ \text{ННН} \quad x &\in [0; 5] \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} x = g \\ \text{или } x \in [0; 5] \\ 30 - x - x^2 = 49 \\ 30 - x - x^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = g \\ \text{или } x \in [0; 5] \\ x^2 + x + 19 = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 19}}{2} \Rightarrow x \in \emptyset \\ x_1 = \frac{-1 - \sqrt{75}}{2} < 0 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{75}}{2} < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 28 = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 28}}{2} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - \sqrt{105}}{2} < 0 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{105}}{2} \approx 5 \end{cases}$$

Answer:  ~~$f = g = \frac{\sqrt{25} + 1}{2}$~~   $x = g = \frac{\sqrt{105} - 1}{2}$

~~$f = g = \frac{\sqrt{11.3} + 1}{2}$~~





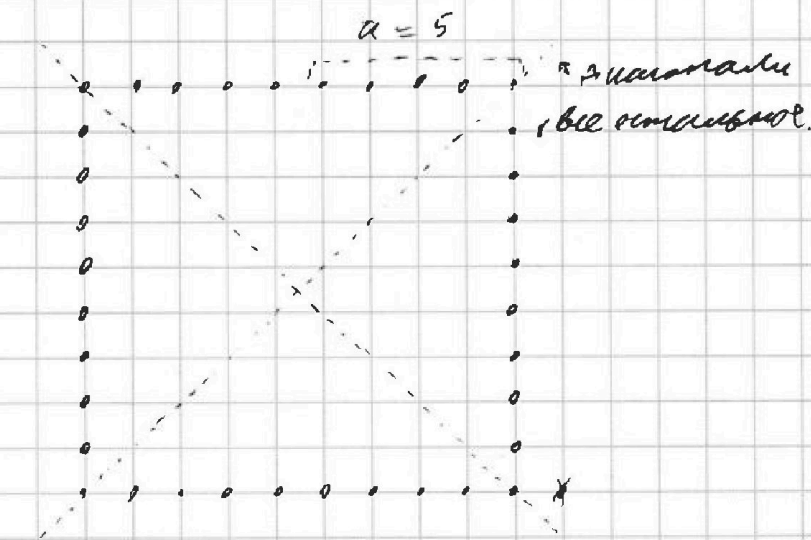
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
( ИЗ (

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



- Всего шариков:
- 1) 1-е шаронала - шариков
  - 2-е шаронала
  - 2) 1-е шаронала
  - 2-е шаронала
  - 3) 1-е шаронала
  - 2-е шаронала

1) где на шариковом шаронала от угла  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2a$  шариков  
 шариков шаронала  $\Rightarrow \frac{4a \cdot (4a - 4)}{8} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2 \cdot 4(a-1)$  шариков.  $\Rightarrow$  всего  $2a^2$

2) шариков: 1-е шаронала -  $4a^2 - 4a$   
 2-е шаронала -  $4a$   
 $\Rightarrow$  всего  $\frac{1}{8} 4a(a-1) + 4a(a-1) \frac{4}{2} = \frac{4a^2(a-1)}{2}$

3) шариков: 1-е шаронала -  $4a^2 - 4a$   
 1-е шаронала -  $4a^2 - 4a - 1$   
 $\Rightarrow$  всего  $\frac{1}{8} 4a(a-1)(4a^2 - 4a - 1) = \frac{a(a-1)(4a^2 - 4a - 1)}{2}$

$\Rightarrow$  всего шариков  $2a^2 + 4a^2(a-1) + \frac{a(a-1)(4a^2 - 4a - 1)}{2} =$   
 $= 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^2 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{4^2}{2} \cdot (4 \cdot 5 \cdot 4 - 1) =$   
 $= 5(10 + 4 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 79) = 1240$

Ответ: 1240

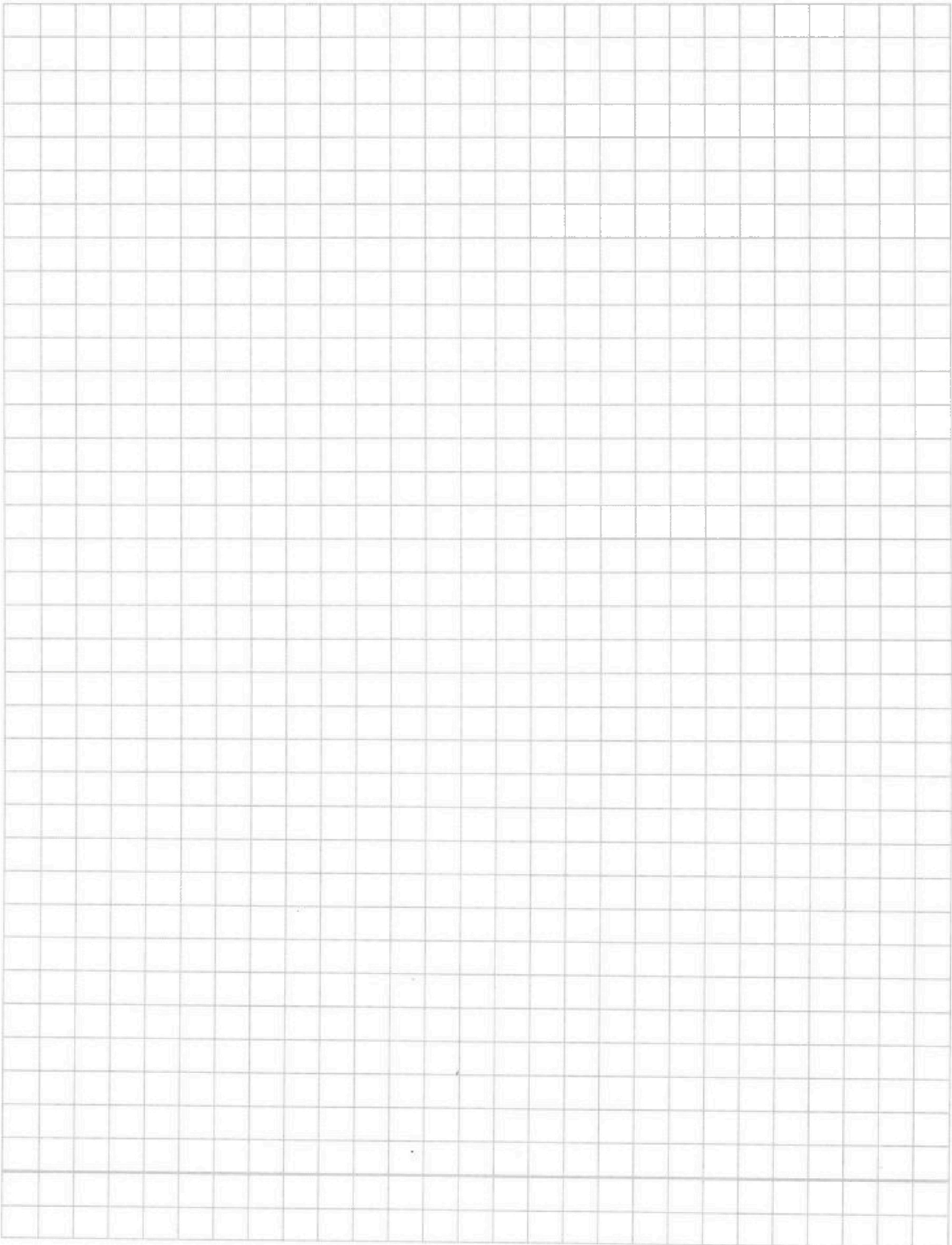


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

