МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $(x^2-2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии

$$\begin{cases} |x-2y| \leqslant 2 \\ |2x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=6$, $AZ=3$, $YZ=4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=4$, $AN=5$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Задача 1 $a_4 = 6-9x$ $a_6 = (x^2-2x)^2$ $a_{10} = 9x^2$

Это арифметическая прогрессия, пусть её разность d

$a_{10} = 6d + a_4 \Rightarrow 9x^2 = 6d + 6 - 9x$

$\Rightarrow 9x^2 + 9x - 6 = 6d \Rightarrow d = \frac{3x^2+3x-2}{2}$

$a_6 = a_4 + 2d \Rightarrow (x^2-2x)^2 = 6 - 9x + 3x^2 + 3x - 2$

$\Rightarrow (x^2-2x)^2 = 3x^2 - 6x - 2$ $x^2 - 2x = t$

$t^2 = 3t - 2$ $t^2 - 3t + 2 = 0$

$t = 1,\ t = 2$

$x^2 - 2x = 1$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x^2 - 2x = 2$ $x^2 - 2x - 2 = 0$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

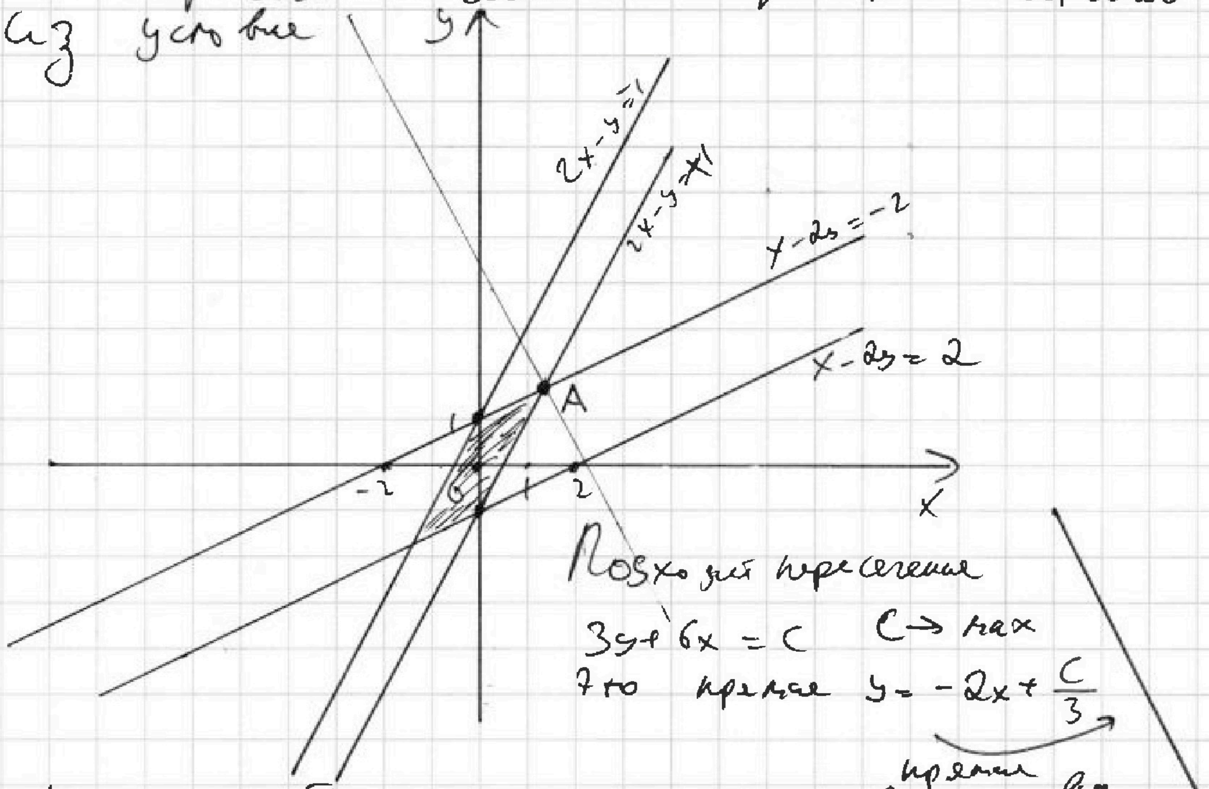
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Изо~~ Задача 2 Изобразим на графике множество ~~то~~точек, подходящих под каждое из уравнений

$|x-2y| \le 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2y \le 2 \\ x-2y \ge -2 \end{cases} \Rightarrow$ лежат между прямыми $x-2y=2$ и $x-2y=-2$

Аналогично $|2x-y| \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-y \le 1 \\ 2x-y \ge -1 \end{cases}$ лежат между $2x-y=1$ и $2x-y=-1$

Их пересечение — множество решений системы из условия



Подходит пересечение

$3y+6x=C$ $C \to max$

Это прямые $y=-2x+\frac{C}{3}$

прямые вот такого вида

Нужно, чтобы такая прямая проходила через какую-то точку пересечения и пересекала ось Oy как можно выше (тогда $C \to max$)

Тогда она должна пройти через точку A (видно из рисунка)

Найдем координаты точки A пересечений.

$\Rightarrow 2 \begin{cases} x-2y=-2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow 2x-1=\frac{x+2}{2} \Rightarrow 4x-2=x+2$

$\Leftrightarrow 3x=4$ $x=4/3$ $y=2x-1=5/3$ $3(y+2x)=3(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\cdot 2)$

$=5+4\cdot 2=13$

Ответ: 13

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$

Преобразуем $A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = mn(m+2n+9)$

Рассмотрим случай, когда $A = 11p^2$

$\Rightarrow (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 = 11 \cdot p \cdot p$ ← эти 3 делителя должны быть распределены между скобками

$m+2n > m+2n-7$

Варианты: ① $\begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-7 = p^2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} m+2n = 11p \\ m+2n-7 = p \end{cases}$ ③ $\begin{cases} m+2n = 11p^2 \\ m+2n-7 = 1 \end{cases}$ Это все варианты т.к. ~~[illegible]~~ у $11p^2$ будет 6 делителей (11, p – простые)

④ $\begin{cases} m+2n = p \\ m+2n-7 = 11p \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} m+2n = p^2 \\ m+2n-7 = 11 \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} m+2n = 1 \\ m+2n-7 = 11p^2 \end{cases}$

Переберём их

① Вычтем 2 уравнения $11 - p^2 = 7 \Rightarrow p^2 = 4 \quad p = 2$

② Вычтем $11p - p = 7 \Rightarrow p = 7/10$ – не подходит

③ Вычтем $11p^2 - 1 = 7 \Rightarrow p = \sqrt{8/11}$ – не подходит

④ $p < 11p$, но $m+2n > m+2n-7 \Rightarrow$ такого не бывает

⑤ $p^2 - 11 = 7 \quad p = \sqrt{18}$ не подходит

⑥ $1 - 11p^2 = 7 \quad p^2 = -\frac{6}{11}$ не бывает

$\Rightarrow$ единственный случай, когда $A = 11p^2$, при $p = 2$, $m + 2n = 11$ ~~[illegible]~~

тогда число B $mn(m+2n+9) = mn(11+9) = 20mn = 75q^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4mn = 15q^2 \Rightarrow q \vdots 2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow 4mn = 60 \Rightarrow mn = 15 \Rightarrow \begin{cases} mn = 15 \\ m+2n = 11 \end{cases}$

Решим такую систему $m \cdot \frac{11-m}{2} = 15 \Rightarrow -m^2 + 11m - 30 = 0$

$m = \frac{-11 \pm \sqrt{121-120}}{-2} = \frac{-11 \pm 1}{-2} \quad m = 6 \quad m = 5 \quad m = 6$ не подходит т.к. $15 \not\vdots 2$

$\Rightarrow$ В случае $A = 11p^2$ подходит только $m = 5$ $n = 3$ $p = 2$ $q = 2$

Случай $B = 11p^2 \Rightarrow mn(m+2n+9) = 11p^2 \quad m+2n+9 \geq 1+1\cdot 2+9 = 12$

$\Rightarrow m+2n+9 \neq 11$, $m+2n+9 \neq 1 \Rightarrow m+2n+9 = p$ или $m+2n+9 = p^2$

Если $m+2n+9 = p^2$, то $mn = 11 \Rightarrow$ (либо m либо n) $= 11$

Варианты $m = 11$ $n = 1 \Rightarrow 11 + 2 + 9 = 22 \Rightarrow p = \sqrt{22}$ не подходит

$n = 11$ $m = 1 \Rightarrow 1 + 22 + 9 = p^2 \Rightarrow 32 = p^2$ $p = \sqrt{32}$ не подходит

$\Rightarrow m+2n+9 = p$, $mn = 11p \Rightarrow$ (либо m либо n) $\vdots p \Rightarrow$ (либо m либо n) – хотя бы $p \Rightarrow m+2n+9 \geq p+9$ т.к. $\Rightarrow$ такого не бывает

$\Rightarrow B$ не может быть равен $11p^2$. $\Rightarrow$ Единственная подходящая пара это $m = 5$ $n = 3$

Ответ: $m = 5$ $n = 3$

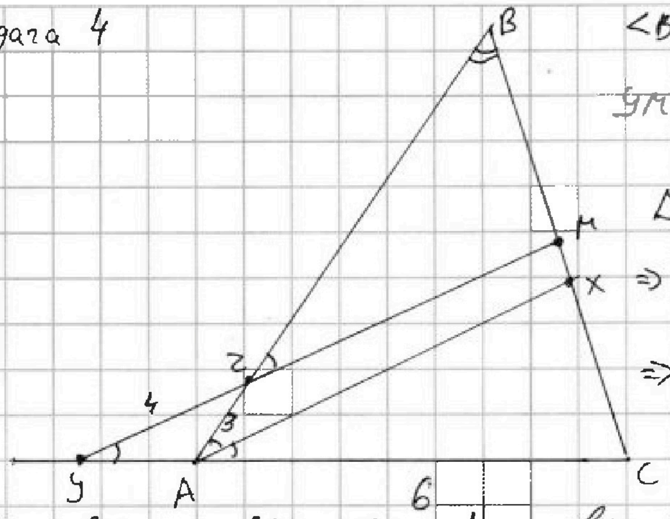
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



$\angle BAX = \angle CAX$ т.к. это биссектриса

$YM \parallel AX \Rightarrow \angle BAX = \angle BZM = \angle MYC$

$\triangle ABX \sim \triangle ZBM$ по 2 углам

$\Rightarrow \frac{BX}{BM} = \frac{AB}{BZ} \Rightarrow 1 + \frac{MX}{BM} = 1 + \frac{AZ}{BZ}$

$\Rightarrow \frac{MX}{AZ} = \frac{BM}{BZ}$.

Из того-же подобия

$\frac{BM}{BZ} = \frac{BX}{AB}$. $\Rightarrow \frac{MX}{AZ} = \frac{BX}{AB}$. По свойству биссектрисы $BX = \frac{AB}{AB+AC}\cdot BC$

$\Rightarrow \frac{\frac{AB}{AB+AC}\cdot BC - \frac{BC}{2}}{AZ} = \frac{\frac{AB}{AB+AC}\cdot BC}{AB} \Rightarrow \cancel{\frac{AB-AC}{AZ}}\ \frac{\frac{AB-AC}{2AB+2AC}\cdot BC}{AZ} = \frac{BC}{AB+AC}$

$\Rightarrow \frac{AB-AC}{6(AB+AC)}\cdot BC = \frac{BC}{AB+AC} \Rightarrow \frac{AB-AC}{6} = 1 \Rightarrow \frac{AB-6}{6} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 12 \Rightarrow BZ = 9$ По th Менелая $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{ZB} = 1$

$\Rightarrow 1\cdot\frac{6+YA}{YA}\cdot\frac{3}{9} = 1 \Rightarrow 18 + 3YA = 9YA \Rightarrow YA = 3$

Аналогично по th Менелая $\frac{YA}{AC}\cdot\frac{CB}{BM}\cdot\frac{MZ}{ZY} = 1 \Rightarrow \frac{3}{6}\cdot 2\cdot\frac{MZ}{4} = 1$

$\Rightarrow MZ = 4$ Пусть $\angle MYC = \alpha$, тогда по th косинусов

$AZ^2 = YA^2 + YZ^2 - 2AY\cdot YZ\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cancel{3^2} = \cancel{3^2} + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\alpha \Rightarrow 4 = 2\cdot 3\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = 2/3$

Найдем MC по th cos. $MC^2 = YC^2 + YM^2 - 2YM\cdot YC\cos\alpha$

$\Rightarrow MC^2 = 9^2 + 8^2 - 2\cdot 9\cdot 8\cdot 2/3 = 81 + 64 - 32\cdot 3 = 145 - 96 = 49$

$\Rightarrow MC^2 = 49 \Rightarrow MC = 7$

$BC = 2MC \Rightarrow BC = 14$

Ответ: $BC = 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3+3x-\sqrt{2y} = y^3+3y-\sqrt{2x} \end{cases}$

Рассмотрим второе уравнение

$x^3+3x - \sqrt{2y} = y^3+3y-\sqrt{2x} \Rightarrow x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$

$x, y \geq 0$, т.к корень должен быть определён

~~$x^3+3x+\sqrt{2x}$ — возрастающая~~

Рассмотрим f — функцию $f(x) = x^3+3x+\sqrt{2x}$

$f(x)$ — возрастающая $\Rightarrow$ если $a > b$, то $f(a) > f(b)$

$\Rightarrow$ Если $f(x) = f(y)$, то если $x \neq y$ то либо $f(x) > f(y)$ или $f(x) < f(y) \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$ Из второго уравнения следует, что $x = y$

Подставим в первое

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$

Ограничения:

~~$x \geq -2$, $y < 7$, из прошлого $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y < 7$~~

Преобразуем

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{7-x}$

Ограничения из уравнения $x \geq 0$ из прошлого,

$x \leq 7$, т.к $\sqrt{7-x}$ должен существовать, при $x > 0$ $\sqrt{x+2}$ существует всегда

~~$2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} = -(\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x})^2 +$~~

$-(\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x})^2 = \cancel{-x}-2-7\cancel{+x}+2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x}-9$

$\Rightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}+7-9 = 2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x}-9 = -(\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x})^2$

Пусть $\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x} = t$, тогда $t+7-9 = -t^2 \Rightarrow t^2+t-2=0$

$\Rightarrow t = 1$ или $t = -2$

Подставим обратно $\Rightarrow$ или $\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x} = 1$ или $\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x} = -2$

~~первый случай $\sqrt{x+2} = 1+\sqrt{7-x}$ левая часть возрастающая~~

первый случай ~~$\sqrt{x+2} = 1+\sqrt{7-x}$~~ $\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x} = 1$ Возведем в квадрат

$\Rightarrow (x+2)+(7-x) - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 1$

$\Rightarrow 9 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} = 1 \Rightarrow \sqrt{(x+2)(7-x)} = 4 \Rightarrow 14+5x-x^2 = 16$

$\Rightarrow x^2-5x+2 = 0$ $x = \frac{5\pm\sqrt{25-8}}{2}$ $x = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

При $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ $\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}-\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}<0$

=> Такой корень не подходит. (т.е при его подстановке получается -1 а не 1)

$x=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ подходит, т.к $\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}>0$ ~~одх~~ и $\frac{9-\sqrt{17}}{2}>0$,

а значит равен 1

Второй случай

$\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}=-2$ ~~левая часть возрастает, правая const => 1 корень~~

~~[illegible]~~

=> $2=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+2}$ => $4=(7-x)+(x+2)-2\sqrt{(7-x)(x+2)}$

=> $4=9-2\sqrt{(7-x)(x+2)}$

=> $\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+2}=\frac{5}{2}$ => $7-x^2+5x+14=\frac{25}{4}$ =>

$-4x^2+20x+31=0$ $x=\frac{-20\pm\sqrt{400+16\cdot 31}}{-8}=\frac{5\pm\sqrt{25+31}}{2}$

~~$x=\frac{8\pm\sqrt{56}}{2}$~~ ~~[illegible]~~ $x=\frac{5\pm\sqrt{56}}{2}$

подставим

$\sqrt{\frac{9-\sqrt{56}}{2}}-\sqrt{\frac{9+\sqrt{56}}{2}}<0$ => $x=\frac{5-\sqrt{56}}{2}$

не подходит. Аналогично с прошлым вариантом.

$x=\frac{5+\sqrt{56}}{2}$ подходит

Ответ: $\left(x=\frac{5+\sqrt{17}}{2};\ y=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(x=\frac{5+\sqrt{56}}{2};\ y=\frac{5+\sqrt{56}}{2}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

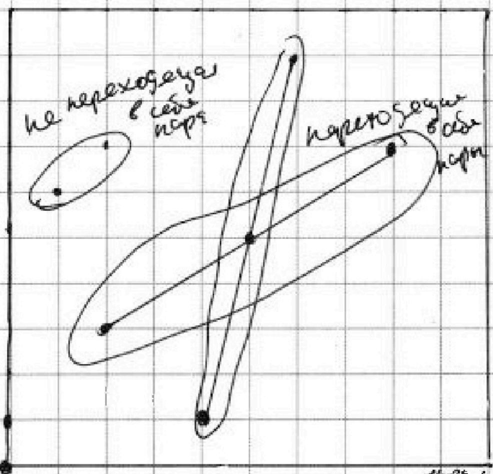
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

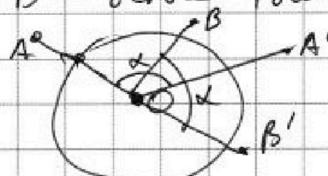
Задача 6

Пусть ~~раскраска~~ пара – способ покрасить 2 точки.

~~Если две раскраски не могут совпасть при повороте на 90° или 180° 270° т.е. при повороте на 180° в любую сторону. Т.к. пусть точка A →~~



Докажем, что две ~~раскраски~~ пары не могли совпасть при повороте, если угол поворота был не 180°. Пусть O – центр квадрата, A, B – белые точки, тогда рассмотрим направление на A, B.



Если A' совпадает с B, то $\alpha = \angle AOB$

Если B' совпадает с A, то $\alpha = 360 - \angle AOB$

$\Rightarrow \angle AOB = 360 - \angle AOB \Rightarrow AOB = 180°$. Доказано.

Значит все ~~раскраски~~ пары будут посчитаны ~~дважды~~ четырежды, кроме тех, в которых A, B – симметричны относительно O точки. У каждой из точек есть симметричная (кроме центра) они будут посчитаны дважды.

Всего точек 11^2 ⇒ ~~раскрасок~~ пар переходящих в себя $\frac{121-1}{2} = 60$. Всего раскрасок $C_{11^2}^2$ ⇒ Раскрасок не переходящих в себя $C_{11^2}^2 - 60$ ~~...~~ В этом числе каждая из пар с учетом поворота посчитана 4 раза. (т.к. бывают повороты на 0, 90, 180, 270 градусов, которые переводят квадрат в квадрат) их 4. ⇒ Уникальных

$$\frac{C_{11^2}^2 - 60}{4} + \frac{60}{2} = \frac{121 \cdot 120 - 60}{4} + \frac{60}{2} = 121 \cdot 30 - 15 + 30 = 3645$$

~~121·30 + 30 = 3660 Ответ: 3660~~

Ответ: 3645

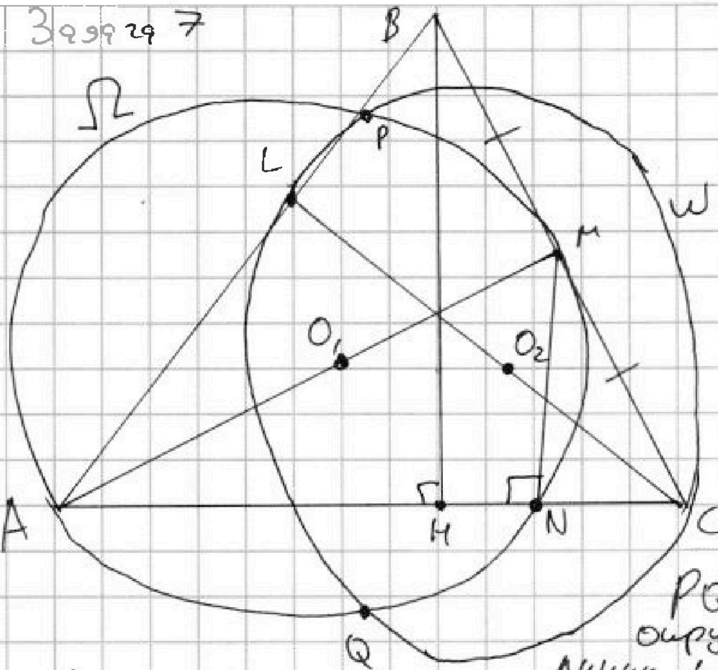
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



$\angle ANM = 90^\circ$, т.к. это угол опирающийся на диаметр

$PQ \parallel BH$, где H — основание высоты из B

$\Rightarrow PQ \perp AC$

PQ — радикальная ось двух окружностей, она перпендикулярна линии центров $\Rightarrow$ линия центров $\parallel AC$

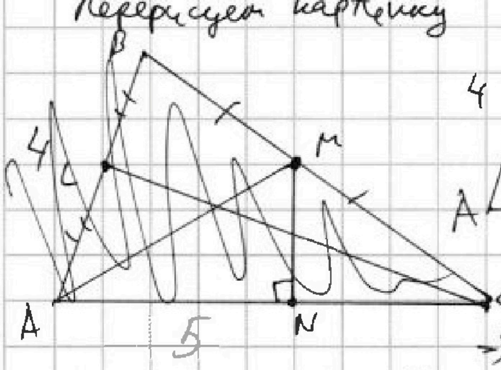
$\Rightarrow$ (середина AM, середина CL) $\parallel AC$.

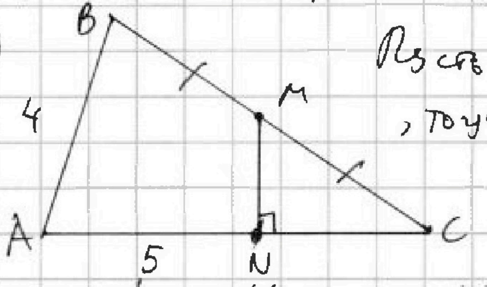
Пусть O_1 — центр AM, O_2 — центр CL ~~O_2~~ $O_1O_2 \parallel AC$

$\Rightarrow LM \parallel AC$, т.к. M в 2 р. дальше от AC чем O_1, L в 2 р. дальше от AC чем O_2, а O_2 и O_1 равноудалены от AC (условие параллельности) $\Rightarrow M, L$ — тоже равноудалены.

$ML \parallel AC \Rightarrow ML$ — средняя линия т.к. она выходит из центра BC параллельно стороне AC $\Rightarrow AL = BL \Rightarrow CL$ — и биссектриса и медиана $\Rightarrow ABC$ — р/б $AC = BC$ AB — основание $= 4$

Перерисуем картинку





Пусть $CN = x$, тогда $AC = BC = 5 + x$

$$\cos\angle C = \frac{x}{\left(\frac{5+x}{2}\right)}$$

по th cos $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\,BC \cdot \cos(C)$

$$\Rightarrow 4^2 = 2\cdot(5+x)^2 - 2(5+x)^2 \cdot \left(\frac{x}{\frac{5+x}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 = 2(5+x)^2\left(1 - \frac{2x}{5+x}\right) = 2(5+x)^2\left(\frac{5-x}{5+x}\right) = 2(5+x)(5-x) = 2\cdot 5^2 - 2\cdot x^2$$

$16 = 50 - 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(50-16) = \frac{1}{2}34$ $x = \pm\sqrt{17}$ $x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{17}$

Ответ: ~~[illegible]~~ $AB = AC = \sqrt{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$25 + 4\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot 4 - 7\cdot 5 - 4\cdot 2$

$6-9x \quad (x^2-2x)^2 \quad 9x^2$

$4 \quad 6 \quad 10$

$65+16-35-28$

$25+4\cdot 3\cdot 5+9\cdot 4-35-42$

$25+\cancel{60}+\cancel{36}-\cancel{35}-\cancel{42}$

$9x$:

$(x^2-2x)^2-6+9x = 2d = x^4-4x^3+4x^2+9x-6=2d$

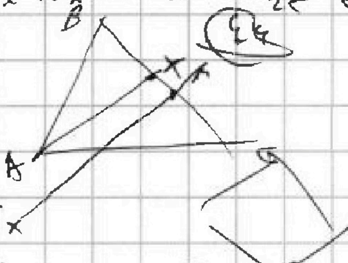
$\frac{6+x}{x} \cdot \frac{3}{9} = 1$

$m^2+4mn+4n^2-7m-14n\,\cancel{+11p^2}$

$18+3x=9x$

$18=6x$

$x=3$



$(m+2n)^2-7(m+2n)$

$3y+6x$

$(m+2n-7)(m+2n)$

$|x-2y| \le 2 \qquad (x-2y)^2 \le 4$

$|2x-y| \le 1 \qquad (2x-y)^2 \le 1$

$mn(m+2n+9)$

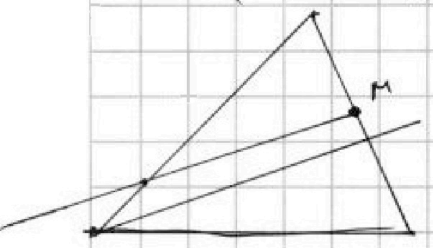
$11p^2$

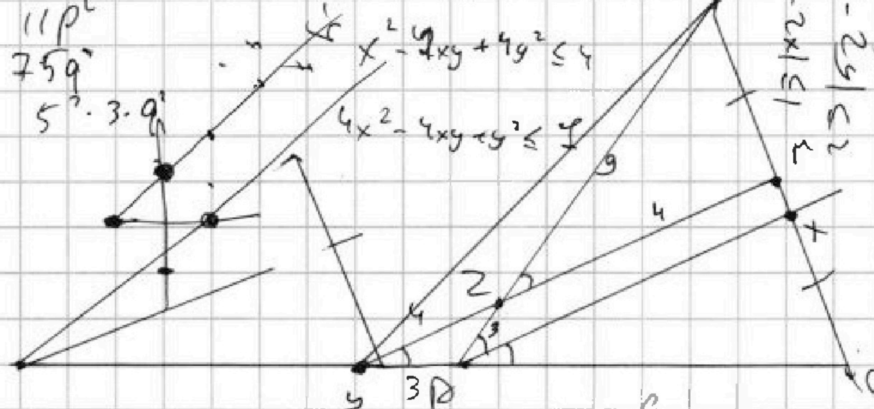
759

$5^3\cdot 3\cdot 9$

$x^2-4xy+4y^2 \le 4$

$4x^2-4xy+y^2 \le 1$





$3^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos t$

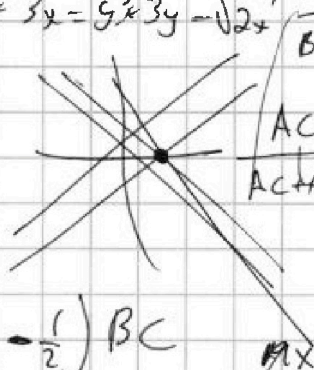
$2=7\cdot\cos t$

$\cos t = 2/3$

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2}\\ x^3+3x=y^3+3y-\sqrt{2x}\end{cases}$$

$\frac{BM}{Bx} = \frac{B2}{2A} \qquad \frac{yA}{Ac} = \frac{Mx}{xc}$

$BC = 2\cdot\frac{Bx\cdot B2}{A2}$



$\frac{AC}{AC+AB}\cdot BC \qquad \frac{BC}{AC+AB}$

$\frac{BM}{Bx} = \frac{B2}{AB} \Rightarrow BC = 2\frac{Bx\cdot B2}{AB}$

$\left(\frac{3AB}{2AB+2Ac}-\frac{1}{2}\right)BC$

$\frac{Mx}{A2} = \frac{Bx}{BM} = \frac{AB}{B2} \Rightarrow \frac{Bx}{BM} = \frac{A2}{B2} \Rightarrow \frac{Mx}{A2} = \frac{BM}{B2}$

$\left(\frac{AB-Ac}{2AB+2Ac}\right)BC/3 = \left(\frac{AB}{AB+Ac}\right)\cdot BC/AB$

$\left(\frac{AB}{AB+BC}-\frac{1}{2}\right)BC = \frac{\cancel{AB}\cancel{BC}}{\cancel{AB}+}$

$\frac{AB-Ac}{6}=1 \qquad \frac{AB}{6}=2 \qquad AB=12$

$(x-2y)^2 \le 4$

$3(y+2x)$

$(x-2y)(3(2x-y)) \le 2$

$x^2+9xy+4x$

$x^2+4xy+4y^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^3+3x-\sqrt{2x}=y^3+3y-\sqrt{2y}$

$3x^2+3-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$

$3x^2+3=$

$x>-2 \quad y<7$

$5x-y^2>-14$

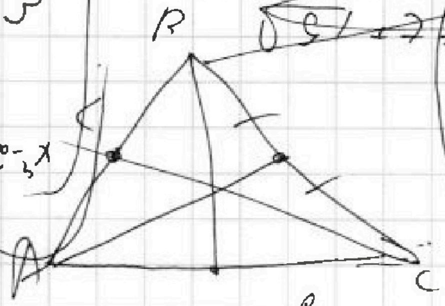
$x>0$

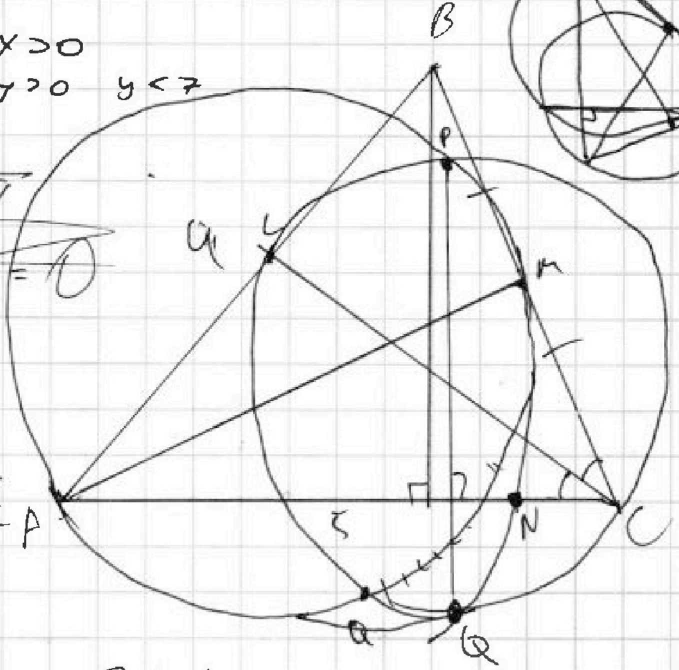
$y>0 \quad y<7$

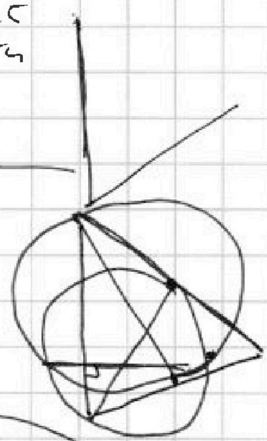
$x^3+3x+\sqrt{2x}=y^3+3y+\sqrt{2y}$

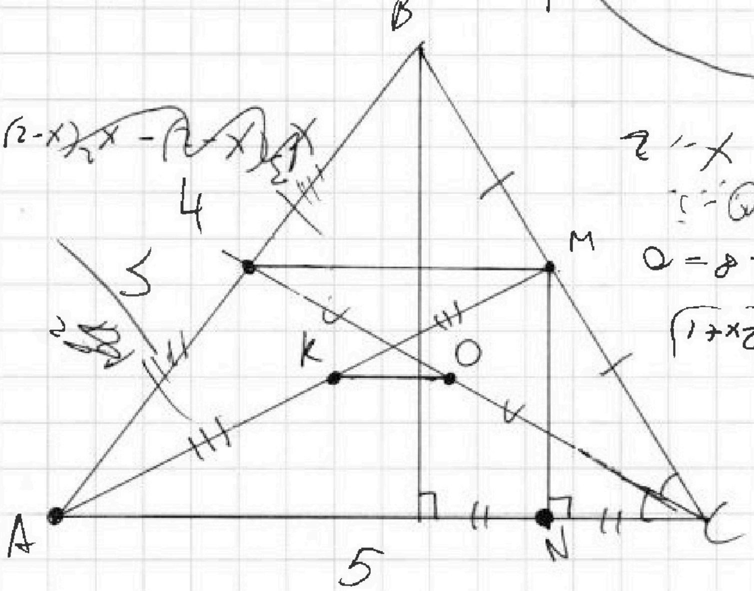
$14+2\cdot\varepsilon^2$

$C_{11}^2+0+60+0$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

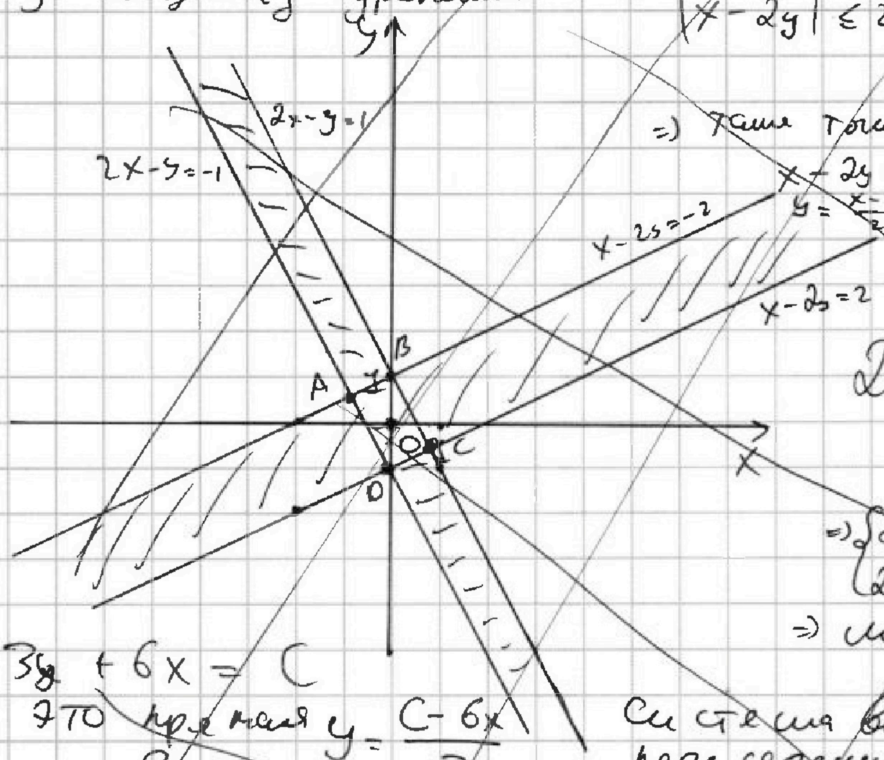
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 Изобразим на графике точки, подходящие под каждое из уравнений

$|x-2y| \le 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2y \le 2 \\ x-2y \ge -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ такие точки лежат выше $x-2y=2$ и ниже $x-2y=-2$

$y=\frac{x-2}{2}$ $\quad$ $y=\frac{x+2}{2}$



Для второго уравнения $|2x-y| \le 1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y \le 1 \\ 2x-y \ge -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ между $2x-y=1$ $y=2x-1$

$2x-y=-1$ $y=2x+1$

$3y+6x=C$

Это прямая $y=\frac{C-6x}{3}$

$y=\frac{C}{3}-2x$

Система выполняется в пересечении

нам нужно найти max C $\Rightarrow$ найдем самую высокую прямую проходящую хотя бы через одну точку пересечения

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7	СТРАНИЦА
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!