



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№01

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

Будем обозначать члены арифметической прогрессии как a_i , где i - номер члена последовательности

пусть $(a_2 - a_1 = b) \quad a_{i+1} - a_i = b$

то есть b - разность между двумя последовательными членами арифметической прогрессии

Тогда

$$a_4 = a_1 + 3b$$

$$a_6 = a_1 + 5b$$

$$a_{10} = a_1 + 9b$$

получим систему:

$$\begin{cases} a_1 + 3b = 6 - 9x & (1) \\ a_1 + 5b = (x^2 - 2x)^2 & (2) \\ a_1 + 9b = 9x^2 & (3) \end{cases}$$

из (1) и (3)

$$6b = 9x^2 + 9x - 6$$

$$2b = 3x^2 + 3x - 2 \quad (*)$$

$$(x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

из (1) и (2)

$$2b = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \quad (**)$$

из (*) и (**)

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 = 3x^2 + 3x - 2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$1 - 3 - 2 + 4 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \quad | \quad \frac{x}{x-1} \\ - x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 - 2x \\ -2x^2 + 2x \\ \hline -4x + 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \quad | \quad \frac{x-1}{x-1} \\ - x^4 - x^3 \\ \hline -3x^3 + x^2 \\ -3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 + 6x \\ -2x^2 + 2x \\ \hline 4x - 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 (продолжение)

Тогда, значения x , удовлетворяющие условию $x = \frac{1}{2} \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

Проверим:

при $x = 1$

$$a_4 = -3 \mid \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow a_{10} = 1 + 2 \cdot 4 = 9$$

$$a_6 = 1$$

$$9x^2 \text{ при } x=1 \Rightarrow \text{верно}$$

при $x = 1 + \sqrt{5}$

$$a_4 = 6 - 9 - 9\sqrt{5} = -3 - 9\sqrt{5}$$

$$a_6 = ((1 + \sqrt{5})^2 - 2 - 2\sqrt{5})^2 = 16 \mid \Rightarrow -3 - 9\sqrt{5} + 2\beta = 16$$

$$2\beta = 19 + 9\sqrt{5}$$

$$1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$a_{10} = a_6 + 4\beta \Rightarrow a_{10} = 16 + 38 + 18\sqrt{5} = 54 + 18\sqrt{5}$$

с другой стороны $9x^2 =$

$$= 9(1 + \sqrt{5})^2 =$$

$$= 9 + 18\sqrt{5} + 45 =$$

$$= 54 + 18\sqrt{5} \text{ верно}$$

~~$$a_4 = 6 - 9 + 9\sqrt{5}$$~~

~~$$a_6 = (1 - \sqrt{5})^2$$~~

Ответ: $1; 1 \pm \sqrt{5}$.

выяснить по чему $x = 1 - \sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x \text{ max-?}$$

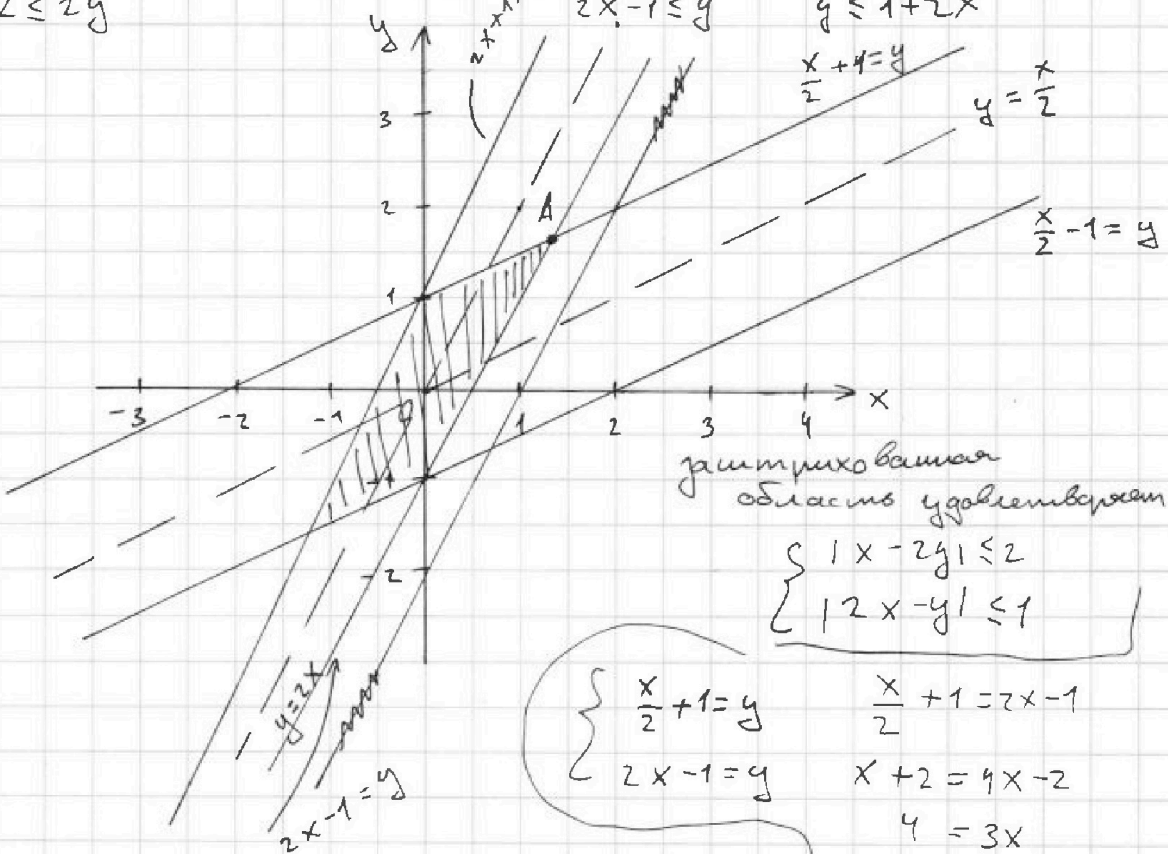
$3(y + 2x) \Rightarrow$ достаточно найти максимальное значение $y + 2x$

$$\begin{aligned} |x - 2y| \leq 2 \\ x \geq 2y \\ x - 2y \leq 2 \\ x - 2 \leq 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < 2y \\ 2y \leq x \\ y \leq \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$|2x - y| \leq 1$$

$$\begin{aligned} 2x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \\ 2x - 1 \leq y \end{aligned}$$



$3y + 6x$ максимально при x и y максимальных

заштрихованная область удовлетворяет

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 = y & \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1 \\ 2x - 1 = y & x + 2 = 4x - 2 \\ & 4 = 3x \\ & x = \frac{4}{3} \\ & y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

заметьте, что x и y принимают максимальные значения в точке A , отмеченной на графике тогда A является точкой пересечения

тогда $3y + 6x = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$

$\frac{x}{2} + 1 = y$ и $2x - 1 = y$

Ответ: 13.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

m, n - натуральные p, q - простые числа

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

при этом

$$\begin{cases} A = 11p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A = 75q^2 \\ B = 11p^2 \end{cases} \quad (2)$$

для (1)

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11p^2$$

если m и n - четные то $11p^2$ должно быть четным, что возможно

только при $p = 2$, т.к. p - простое, аналогично $75q^2$ тогда тоже должно быть четным и $q = 2$

тогда:

$$\begin{cases} m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 44 \\ m^2n + 2mn^2 + 9mn = 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$75 \cdot 4 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$mn(m + 2n + 9)$$

т.к. m и n - натуральные по условию $\Rightarrow m + 2n + 9$ - натуральное

т.к. по предположению m и n четные \Rightarrow

$$\Rightarrow mn : 4 \quad \text{тогда } m + 2n + 9 = \sqrt{5^2 \cdot 3}$$

$$m + 2n + 9 = 25$$

$$m + 2n = 16$$

$$mn = 12 \quad \text{не подходит}$$

$$m + 2n + 9 = 15 \quad \Rightarrow m + 2n = 6$$

$$mn = 20 \quad \text{не подходит}$$

$$m + 2n + 9 = 75$$

$$mn = 4 \Rightarrow m = n = 2 \Rightarrow 2 + 4 + 9 \neq 75$$

аналогично для (2) если m и n четные

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = 11 \cdot 4$$

$$mn(m + 2n + 9) = 11 \cdot 4 \quad \text{где } mn : 4 \Rightarrow m = n = 2$$

$$\Rightarrow 9 \Rightarrow m + 2n + 9 = 11 \quad \text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

Получается, что оба числа не могут быть четными если оба числа m и n нечетные, то

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

(n - нечетное
 m - четное)

$$A = n + 2 + 2 - n - 2$$

A - четное

$$B = n + 2 + n$$

B - четное

$$\Rightarrow p = q = 2$$

$$B = \underbrace{m}_n \cdot \underbrace{(m + 2n + 9)}_{4+2+1=7} = \begin{matrix} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{matrix}$$

если $B = 11p^2$ то $mn(m+2n+9) = 44$ где $m+2n+9 : 4$

если же $mn(m+2n+9) = 75 \cdot 4$

$$m + 2n + 9 = \begin{matrix} 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 5^2 \\ 75 \cdot 4 \text{ не подходит} \end{matrix}$$

$5^2 \cdot 3$

$m + 2n = 3$
 $m = n = 1$
не подходит

$m + 2n = 11$
 $mn = 15$

н.к. $m + 2n + 9 > 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m + 2n + 9 = 44$
 $mn = 1 \Rightarrow m = n = 1$
 $1 + 2 + 9 \neq 44$
не подходит

или $m = 5$
 $n = 3$
 $5 + 6 = 11$

$m + 2n + 9 = 60$
 $m + 2n = 51$
 $mn = 5$ не подходит

$m + 2n + 9 = 100$
 $mn = 3$ не подходит

тогда $A = 44$

$$5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 - 7 \cdot 5 - 14 \cdot 3 =$$

$$= 25 + 60 + 36 - 35 - 42 =$$

$$= 26 = 2 \cdot 13 = 2 \cdot 13 = 26$$

$\Rightarrow m = 5, n = 3$ удовлетворяет условию



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

Теперь рассмотрим случаи когда одно из чисел m или n четное, а второе нечетное

тогда: 1) пусть m - четное

$$A = \tau + \tau + \tau - \tau - \tau = \tau \Rightarrow A - \text{четное} \Rightarrow$$

$$B = \tau + \tau + \tau - \text{четное}$$

$$\Rightarrow p = q = 4$$

$$m \cdot n (m + 2n + 9) = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$\tau + \tau + \tau = 4 \Rightarrow m, n : 4, \text{ а т.к. } n - \text{нечетное} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m : 4$$

тогда где $B = 44$ $n = 1; m = 4; m + 2n + 9 \neq 11$

где $B = 75 \cdot 4$ $m + 2n + 9 = \begin{cases} 75 \rightarrow m = 4, n = 1 \text{ не подходит} \\ 15 \Rightarrow m, n = 5 \cdot 4; m + 2n = 6 \text{ не подходит} \\ 25 \Rightarrow m, n = 3 \cdot 4; m + 2n = 16 \end{cases}$

2) пусть n - четное

$$A = n + \tau + \tau - n - \tau \Rightarrow A - \text{нечетное} \Rightarrow$$

$$B = \tau + \tau + \tau - \text{нечетное}$$

$$\Rightarrow p = q = 2 \Rightarrow B = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$m \cdot n (m + 2n + 9) = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$n + \tau + n \Rightarrow \tau : 2$$

если $B = 44$ $m + 2n + 9 = 2 \cdot 11 = 22 (m, k. > 9)$

$$m + 2n = 13 \text{ не подходит}$$

$$m \cdot n = 2$$

если $B = 75 \cdot 4$

$$m + 2n + 9 = \begin{cases} 75 \cdot 2 \text{ не подходит} \\ 5 \cdot 2 \text{ } m + 2n \neq 1 \text{ не подходит} \\ 5 \cdot 3 \cdot 2 \text{ } 30 \Rightarrow m, n = 10 \Rightarrow m = \begin{cases} 2 \cdot n = 5 \\ 10 \cdot n = 1 \end{cases} \\ 25 \cdot 2 \end{cases}$$

Таким образом
есть единственная пара
чисел m, n , удовлетворяющая
условию

Ответ: $m = 5; n = 3.$

$$m + 2n + 9 = 50 \begin{cases} 70 + 2 + 9 \neq 30 \\ 2 + 10 + 9 \neq 30 \\ \text{не подходит} \\ 6 + 8 + 9 \neq 50 \\ 2 + 6 + 9 \neq 50 \end{cases}$$

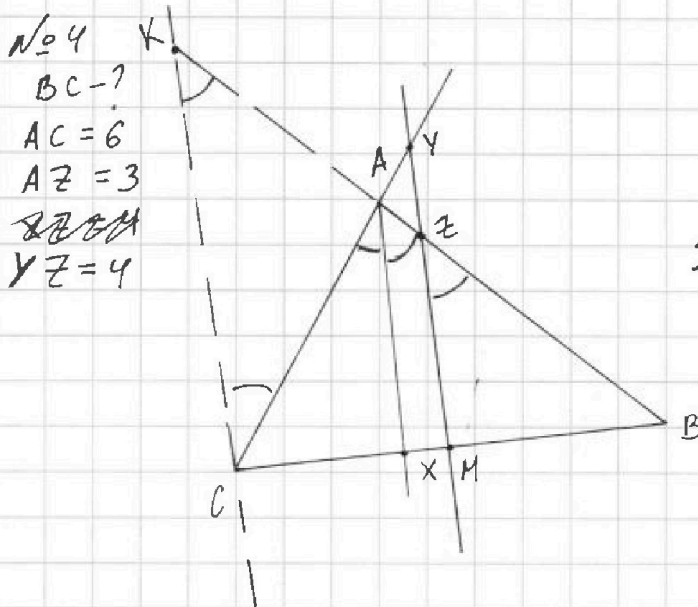


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AX - биссектриса

AX || MZ

BM = MC

Проведем прямую || MZ через точку C и продолжим AB до пересечения с ней. Обозначим точку пересечения K. В получившемся ΔCBK :

M - середина CB и \Rightarrow
MZ || CK

\Rightarrow MZ - средняя линия и Z - середина KB

т.к. AX - биссектриса то $\angle CA X = \angle XAB$

т.к. AX || MZ || KC $\Rightarrow \angle CA X = \angle B Z M = \angle B K C = \angle A C K$

(По теореме о пропорциональных отрезках:)

$$\frac{BZ}{ZA} = \frac{BM}{MX} \quad \frac{AZ}{AK} = \frac{XM}{XC}$$

$\Delta CAK - \text{п/б} \Rightarrow$

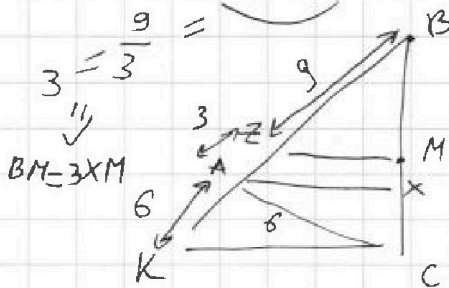
$\Rightarrow AK = AC = 6$

по условию

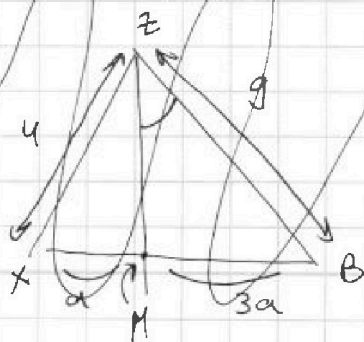
т.к. Z - середина BK \Rightarrow

$\Rightarrow KZ = ZB = KA + AZ = 6 + 3 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow ZB = 9$



также в условии нам дана длина отрезка XZ = 4



$$\frac{ZB}{AZ} = \frac{BM}{XM} = \frac{9}{3} = 3$$

$BM = 3XM$

обозначим

$XM = a \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = 3a \Rightarrow BC = 6a$



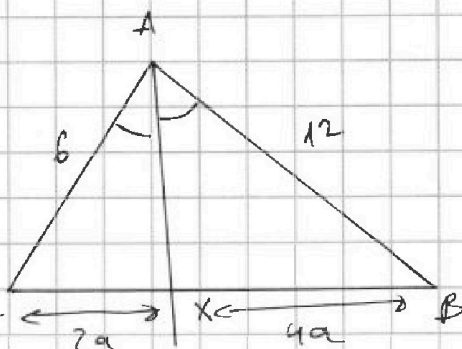
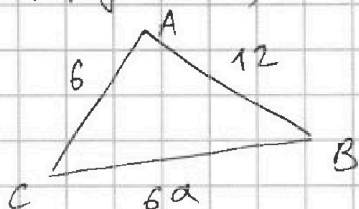
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 (проформулише)



K

т.к. AX - биссектриса \Rightarrow

$$\frac{AC}{CX} = \frac{AB}{BX}$$

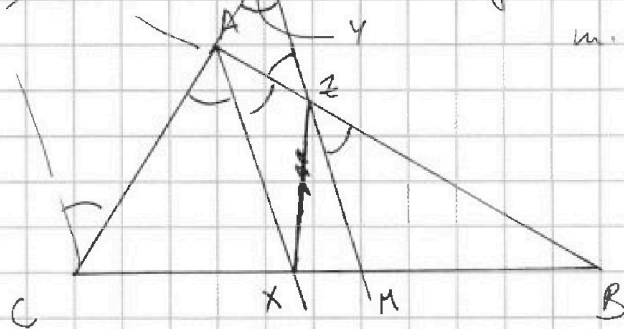
решим, что $\triangle KAC \sim \triangle ZAY$
т.к. $KC \parallel ZY$; $\angle KAC = \angle YAZ$
как верши
наибольше

мы уже знаем,

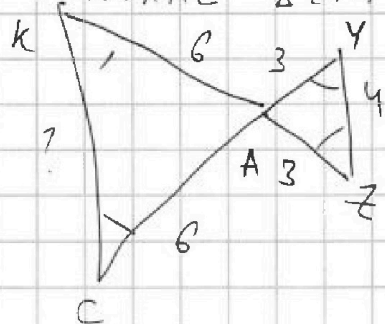
$$\text{что } AZ = 3$$

$$YZ = 4$$

$$KA = AC = 6$$



~~KAZ~~ т.к. $\triangle KAC \sim \triangle ZAY \Rightarrow$ они оба $\mu/\delta \Rightarrow AZ = AY = 3$



$$\frac{KC}{YZ} = \frac{AC}{ZA} \Rightarrow \frac{KC}{4} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$$

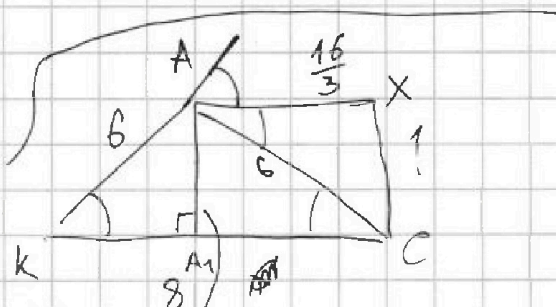
$$\Rightarrow KC = 8$$

$\triangle BKC \sim \triangle BAX \sim \triangle BZM$

$$MZ = \frac{KC}{2} = 4$$

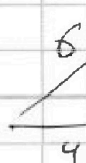
$$\frac{AX}{MZ} = \frac{XB}{MB} = \frac{4}{3}$$

$$AX = \frac{16}{3}$$



высота в $\triangle KAC$
является и
медиапой т.к. $\mu/\delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

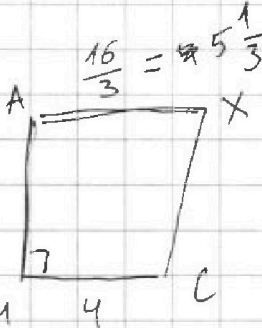
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение)

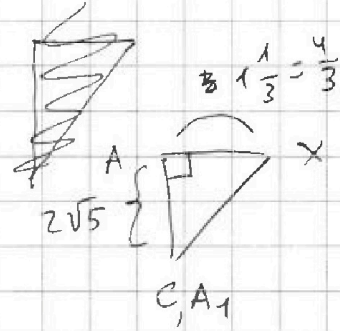
Площа пацели:



$$CX = \sqrt{4 \cdot 5 + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{196}}{3}$$

$$\frac{20 \cdot 9 + 16}{9} = \frac{196}{9}$$

~~20 \cdot 9 + 16 = 196~~
~~180 + 16 = 196~~
~~196~~



или тогда $CX + XM = \frac{BC}{2}$
 $XM = \frac{BM}{3} = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow CX + a = 3a$$

$$CX = 2a$$

$$\frac{\sqrt{196}}{3} = 2a$$

$$\sqrt{196} = 6a = BC$$

Ответ: $\sqrt{196} = BC$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ \sqrt{x^3+3x-\sqrt{2y}} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

Реш:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

$$\begin{cases} 7-y \geq 0 \\ 7 \geq y \\ 2y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 7 \geq y \geq 0$$

$$14+5x-y^2 \geq 0$$

$$x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$$

заменим, что если
(сез обращения
общности)

$$\begin{cases} x > y \Rightarrow x^3 > y^3 \\ 3x > 3y \\ \sqrt{2x} > \sqrt{2y} \end{cases} \Rightarrow x = y$$

тогда

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} + \sqrt{7-x}$$

$$x+2 + 14\sqrt{x+2} + 49 = 4(14+5x-x^2) + 4\sqrt{7-x} + 7-x$$

$$x + 5\sqrt{7-x} + x - 4 \cdot 14 - 20x + 4x^2 + 14\sqrt{x+2} = 4\sqrt{7-x}$$

$$4x^2 - 18x + 44 - 56 + 14\sqrt{x+2} = 4\sqrt{7-x} \quad | :2$$

$$(2x^2 - 9x - 6) + 7\sqrt{x+2} = 2\sqrt{7-x}\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$(2x^2 - 9x - 6)^2 + 14\sqrt{x+2}(\quad) + 49(x+2) = 4(7-x)(14+5x-x^2)$$

$$\begin{aligned} \cancel{2x^2 - 9x - 6} (2x^2 - 9x - 6)^2 &= (2x^2 - 9x)^2 - 12(2x^2 - 9x) + 36 = \\ &= 4x^4 - 36x^3 + 81x^2 - 24x^2 + 108x + 36 = \\ &= 4x^4 - 36x^3 + 57x^2 + 108x + 36 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

$$4x^4 - 36x^3 + 57x^2 + 108x + 36 + 49x + 98$$

134

$$\begin{array}{r} 2 \\ 14 \\ \times 4 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \cdot 4 - 154 \\ 84 \end{array}$$

$$4(7-x)(14+5x-x^2) = 4(98 + 35x - 7x^2 - 14x - 5x^2 + x^3) =$$

$$= 4 \cdot 98 + 35 \cdot 4x - 28x^2 - 20x^2 - 14 \cdot 4x + 4x^3$$

$$14\sqrt{x+2}(2x^2-9x-6) = -4x^4 + 40x^3 - 105x^2$$

$$14 + 5x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 14 \leq 0$$

$$(x-7)(x+2) \leq 0$$

$$x \in [-2; 7]$$

ог. об.з., м.к. $x=y$

$$\Rightarrow x \in [0; 7]$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \times 4 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$25 + 4 \cdot 14 = 25 + 56 = 81$$

$$x = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} 7 \\ -2 \end{cases}$$

214

2208

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} + 6 = 2\sqrt{14 + 30} - 36$$

$$2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 98 \\ \times 4 \\ \hline 392 \\ 134 \\ \hline 258 \end{array}$$

$$14\sqrt{x+2}(2x^2-9x-6) = -4x^4 + 40x^3 - 105x^2 - 73x +$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 2 \cdot 6}}{4} + 98 \cdot 4 - 134$$

$$\frac{48 + 80 + 12}{4} = 129$$

$$374 \pm 2\sqrt{14 + 30} = 49$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

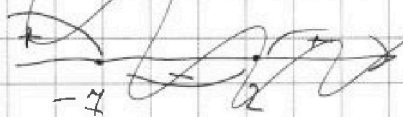
№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$(\cancel{2x+4})(\cancel{x-2})$$

$$(\cancel{x+7})(\cancel{x-2}) \geq 0$$



$$\begin{aligned} x &\in [0; 7] \\ -x^2 + 5x + 14 &= 0 \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm 9}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$-x^2 + 5x + 14 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 14 \leq 0 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = \begin{matrix} 7 \\ -2 \end{matrix}$$

$$(x-7)(x+2) \leq 0$$

$$x \in [-2; 7]$$

или $x \in [0; 7]$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$14+5x-x^2 = -(x-7)(x+2)$$

$$= -x^2 - 2x + 7x + 14$$

$$\begin{aligned} (7-x)(x+7) \\ 2x+14-x^2-7x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= a \\ \sqrt{7-x} &= b \end{aligned}$$

$$a - b + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

или тогда $x+2 \geq 0$ и $7-x \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(x-7)(x+2) \leq 0 \Rightarrow x = \begin{matrix} 7 \\ -2 \end{matrix}$$

если $x=7$ $\sqrt{x+2} = \sqrt{9} = 3$

$$3 - 0 + 7 = 2 \cdot \sqrt{0} \quad 7 \neq 0$$

Таким образом система не имеет корней
Ответ: \emptyset



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

11 - 11 ~~11~~

121 узел (всего)

всего способов выбрать
два угла, которые мы
затем
перекрасим
в белый

$$\frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60 = 7260$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 121 \\ \times 60 \\ \hline 7260 \end{array}$$

Заметим, что и раскраски, которые называются друг из друга поворотом относятся к тем, в которых белые узлы симметричны относительно центра квадрата

Заметим, что для всех углов краев центрального (свердловск) есть один (и только один) узел симметричный (на рисунке) относительно центра, ~~то есть углы~~

И для каждой такой раскраски (когда мы перекрасим выделенный узел и симметричный ему относительно центра) есть еще одна раскраска которая получается из предыдущей поворотом, например:



Всего раскрасок, в которых узлы симметричные $\frac{120}{2} = 60$ (для каждого угла краев центрального есть 1 симметричный)

или эти же для каждой из них есть одна, которая получается поворотом \Rightarrow таких $\frac{60}{2} = 30$ (1230)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Таким образом среди 7260 возможных раскрасок
есть 60 таких, что они учитывают одну
раскраску, а именно самую первую
двигаясь \Rightarrow раскрасок, удовлетворяющих
условию:

$$7260 - 60 = 7200$$

Ответ: 7200

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Печать QR-кода недоступна!

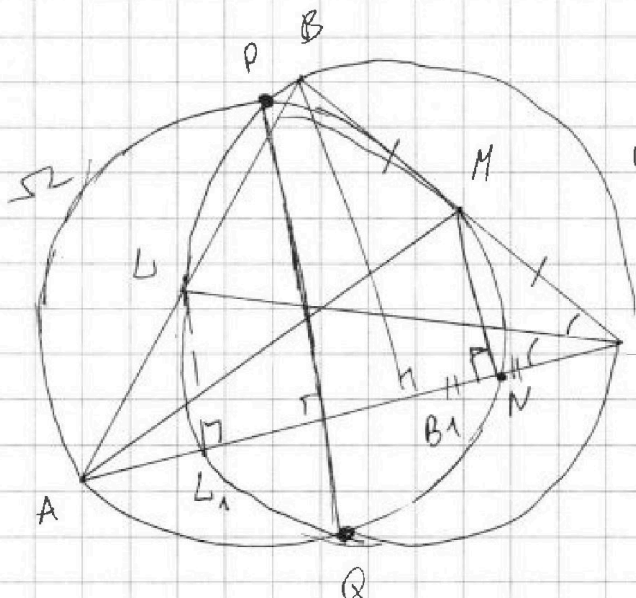


№ 7

$PQ \parallel BB_1$
 $AC, BC - ?$

$AB = 4$

$AN = 5$



Π и Σ — диаметры
 $\Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$

а т.к. BB_1 — высота \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle AB_1B = 90^\circ$

\Downarrow
 $BB_1 \parallel MN$

При этом по условию $BB_1 \parallel PQ \Rightarrow PQ \parallel MN$

заменим, что в $\triangle BCB_1$ $MN \parallel BB_1$ и M — середина BC по условию \Rightarrow

$\Rightarrow MN$ — средняя линия $\Rightarrow CN = NB_1$

т.к. CL — биссектриса $\Rightarrow \frac{AC}{AL} = \frac{CB}{BL}$ где $AL + BL = AB = 4$

если $\angle AMC = 90^\circ \Rightarrow MC^2 = \underbrace{CN \cdot CA}_{AN + CN}$

$AN \cdot AM = AL \cdot AB$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

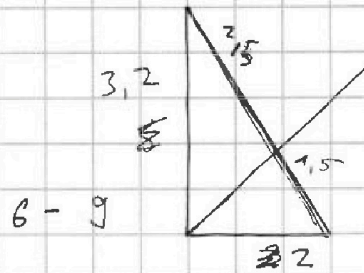
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-1)^2(x^2-2x-4) = (x^2-2x+1)(x^2-2x-4) =$$

$$= x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 8x + x^2 - 2x - 4 =$$

$$= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$$



$$6 - 9 = -3$$

$$\frac{32}{24} = \frac{4}{3} \quad -3 \quad 1 \quad 9$$

$$\frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad -3 + 26 = 1 \quad \frac{19}{38}$$

$$\frac{1}{15} \quad 1 + 2 \cdot 4 = 9$$

$$1 + 4 + 4 - 7 - 14 =$$

$$= 9 - 14 - 7 =$$

$$= 2 - 14 = -12$$

$$\frac{x-y}{2} = 4$$

$$x - 2 \leq 2y$$

$$\frac{x}{2} - 1 \leq y$$

$$x = 2 \quad x = 4$$

$$y = 0 \quad y = 2 - 1$$

$$\frac{25}{4} + \frac{10}{8}$$

$$45 = 5 \cdot 15$$

$$5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$v = 1 + \frac{1}{2}$$

$$m + 2n + g = 15 \quad m + 2n = 21$$

$$m + 2n = 6$$

$$mn = 20$$

$$25 \quad m + 2n = 16 \quad 8$$

$$mn = 12 \quad 8 \cup 2$$

$$\frac{6 \cdot 2}{4+6} = \frac{12+2}{4+6}$$

$$(6 - 2n)n = 20$$

$$6n - 2n^2 - 20 = 0$$

$$2n^2 - 6n + 20 = 0$$

$$36 - 4 \cdot 20 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

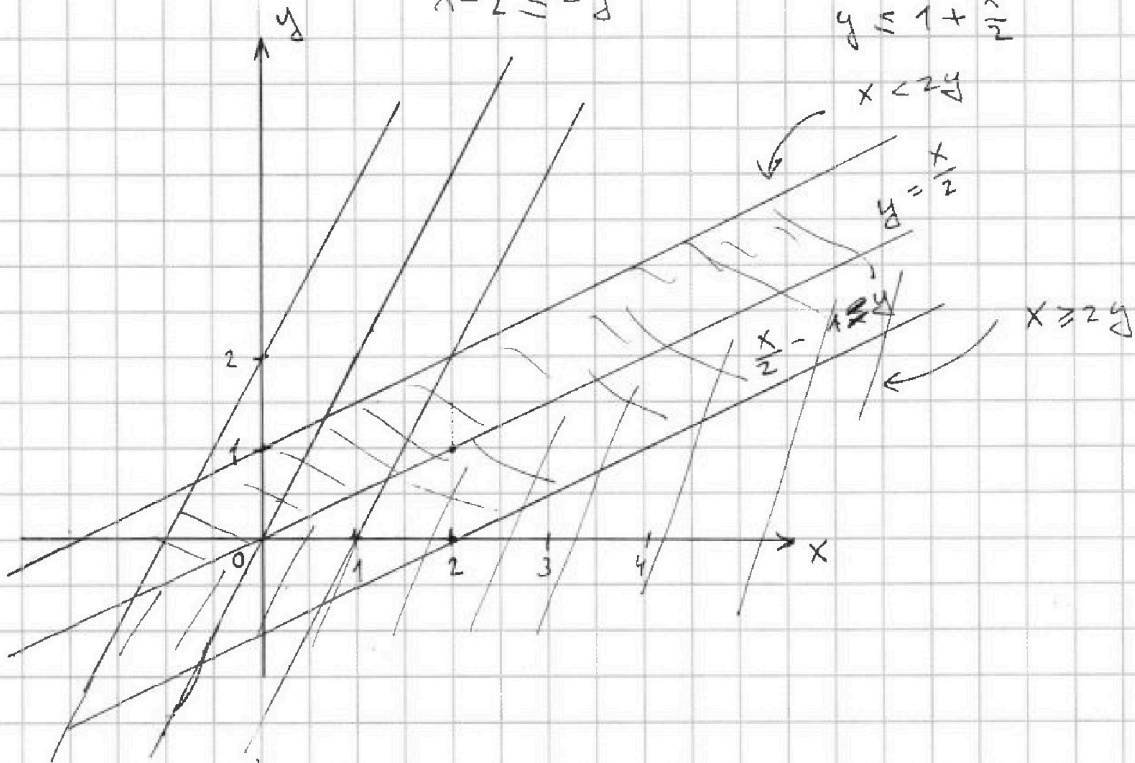
№2

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \quad 3y+6x \text{ max - ?}$$

$$3y+6x = 3(y+2x)$$

$$\begin{aligned} x &\geq 2y \\ x-2y &\leq 2 \\ x &\leq 2+2y \\ x-2 &\leq 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\leq 2y \\ 2y-x &\leq 2 \\ 2y &\leq 2+x \\ y &\leq 1+\frac{x}{2} \\ x &< 2y \end{aligned}$$



$$|2x-y| \leq 1$$

$$2x \geq y$$

$$2x < y$$

$$2x-y \leq 1$$

$$y-2x \geq 1$$

$$y \geq 1+2x$$

$$y \leq 1+2x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

