



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№01

$$a_4 = 6 - 9X$$

$$a_6 = (X^2 - 2X)^2$$

$$a_{10} = 9X^2$$

Будем обозначать члены арифметической прогрессии как  $a_i$ , где  $i$  - номер члена последовательности

пусть  $(a_2 - a_1 = b) \quad a_{i+1} - a_i = b$

то есть  $b$  - разность между двумя последовательными членами арифметической прогрессии

Тогда

$$a_4 = a_1 + 3b$$

$$a_6 = a_1 + 5b$$

$$a_{10} = a_1 + 9b$$

получим систему:

$$\begin{cases} a_1 + 3b = 6 - 9X & (1) \\ a_1 + 5b = (X^2 - 2X)^2 & (2) \\ a_1 + 9b = 9X^2 & (3) \end{cases}$$

из (1) и (3)

$$6b = 9X^2 + 9X - 6$$

$$2b = 3X^2 + 3X - 2 \quad (*)$$

$$(X^2 - 2X)^2 = X^4 - 4X^3 + 4X^2$$

из (1) и (2)

$$2b = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + 9X - 6 \quad (**)$$

из (\*) и (\*\*)

$$X^4 - 4X^3 + 4X^2 + 9X - 6 = 3X^2 + 3X - 2$$

$$X^4 - 4X^3 + X^2 + 6X - 4 = 0$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$

$$X_1 = 1$$

$$(X-1)(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0$$

$$1 - 3 - 2 + 4 = 0$$

$$X_2 = 1$$

$$\begin{array}{r} X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \quad | \quad \frac{X-1}{X^2 - 2X - 4} \\ - X^3 + X^2 \\ \hline -2X^2 - 2X + 4 \\ - -2X^2 + 2X \\ \hline -4X + 4 \\ - -4X + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X^4 - 4X^3 + X^2 + 6X - 4 \quad | \quad \frac{X-1}{X^3 - 3X^2 - 2X + 4} \\ - X^4 + X^3 \\ \hline -3X^3 + X^2 + 6X - 4 \\ - -3X^3 + 3X^2 \\ \hline -2X^2 + 6X - 4 \\ - -2X^2 + 2X \\ \hline 4X - 4 \\ - 4X - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(X-1)^2 (X^2 - 2X - 4) = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$X = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 (продолжение)

Тогда, значения  $x$ , удовлетворяющие условию  $x = \frac{1}{2} \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

Проверим:

при  $x = 1$

$$a_4 = -3 \mid \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow a_{10} = 1 + 2 \cdot 4 = 9$$

$$a_6 = 1$$

$$9x^2 \text{ при } x=1 \Rightarrow \text{верно}$$

при  $x = 1 + \sqrt{5}$

$$a_4 = 6 - 9 - 9\sqrt{5} = -3 - 9\sqrt{5}$$

$$a_6 = ((1 + \sqrt{5})^2 - 2 - 2\sqrt{5})^2 = 16 \mid \Rightarrow -3 - 9\sqrt{5} + 2\beta = 16$$

$$2\beta = 19 + 9\sqrt{5}$$

$$1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$a_{10} = a_6 + 4\beta \Rightarrow a_{10} = 16 + 38 + 18\sqrt{5} = 54 + 18\sqrt{5}$$

с другой стороны  $9x^2 =$

$$= 9(1 + \sqrt{5})^2 =$$

$$= 9 + 18\sqrt{5} + 45 =$$

$$= 54 + 18\sqrt{5} \text{ верно}$$

~~$$a_4 = 6 - 9 + 9\sqrt{5}$$~~

~~$$a_6 = (1 - \sqrt{5})^2$$~~

Ответ:  $1; 1 \pm \sqrt{5}$ .

выяснить по чему  $x = 1 - \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x \text{ max-?}$$

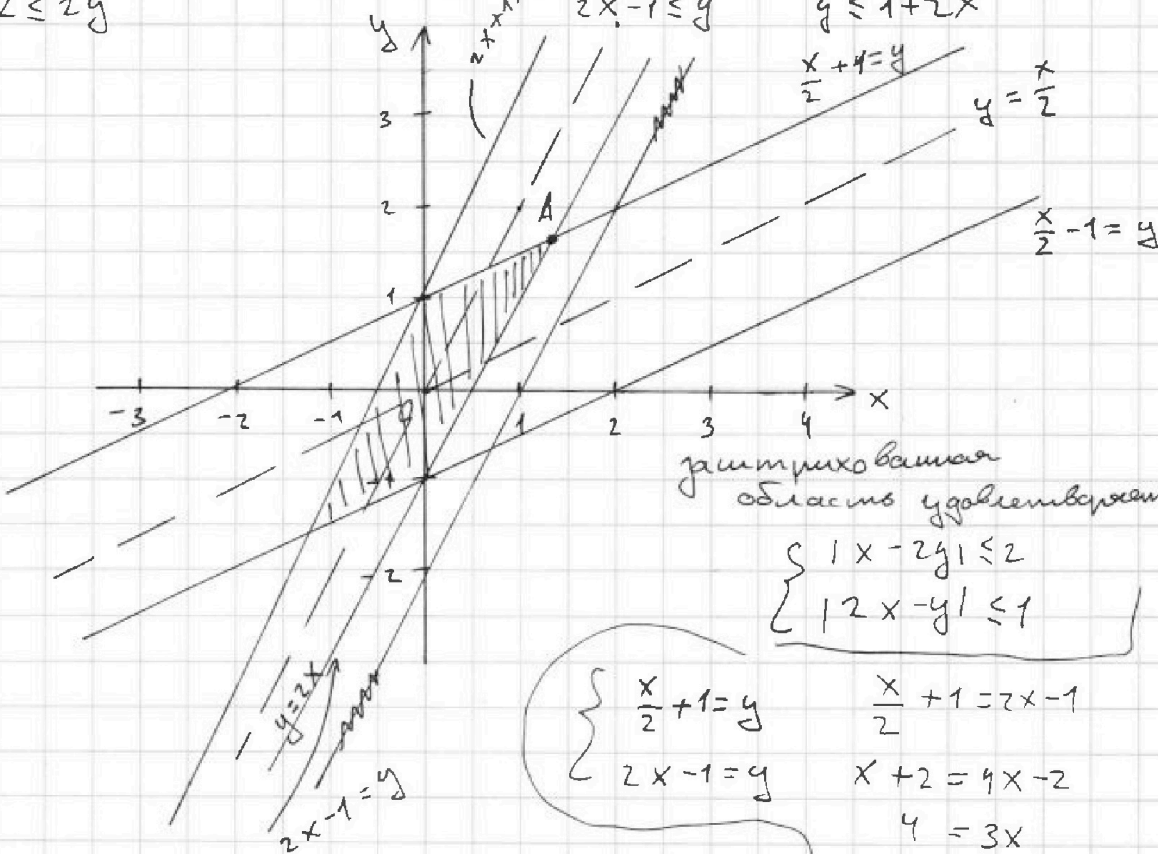
$3(y + 2x) \Rightarrow$  достаточно найти максимальное значение  $y + 2x$

$$\begin{aligned} |x - 2y| \leq 2 \\ x \geq 2y \\ x - 2y \leq 2 \\ x - 2 \leq 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < 2y \\ 2y \leq 2 + x \\ y \leq 1 + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$|2x - y| \leq 1$$

$$\begin{aligned} 2x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \\ y - 2x \leq 1 \\ y \leq 1 + 2x \end{aligned}$$



заштрихованная область удовлетворяет

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 = y \\ 2x - 1 = y \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1 \\ x + 2 = 4x - 2 \\ 4 = 3x \\ x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$3y + 6x$  максимально при  $x$  и  $y$  максимальных

заметьте, что  $x$  и  $y$  принимают максимальные значения в точке  $A$ , отмеченной на графике тогда  $A$  является точкой пересечения

$$\text{тогда } 3y + 6x = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 = y \\ 2x - 1 = y \end{cases}$$

Ответ: 13.





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$m, n$  - натуральные  $p, q$  - простые числа

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

при этом

$$\begin{cases} A = 11p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A = 75q^2 \\ B = 11p^2 \end{cases} \quad (2)$$

~~11p^2, 75q^2~~

для (1)

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11p^2$$

если  $m$  и  $n$  - четные то  $11p^2$  должно быть

четным, что возможно

только при  $p = 2$ , т.к.  $p$  - простое, аналогично  $75q^2$  тогда тоже должно быть четным и  $q = 2$

тогда:

$$\begin{cases} m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 44 \\ m^2n + 2mn^2 + 9mn = 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$75 \cdot 4 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$mn(m + 2n + 9)$$

т.к.  $m$  и  $n$  - натуральные по условию  $\Rightarrow$

$m + 2n + 9$  - натуральное

т.к. по предположению  $m$  и  $n$  четные  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow mn : 4 \quad \text{тогда } m + 2n + 9 = 5^2 \cdot 3$$

$$m + 2n + 9 = 25$$

$$m + 2n = 16$$

$$mn = 12 \quad \text{не подходит}$$

не подходит

$$m + 2n + 9 = 15 \quad \Rightarrow m + 2n = 6$$

$$mn = 20 \quad \text{не подходит}$$

$$m + 2n + 9 = 75$$

$$mn = 4 \Rightarrow m = n = 2 \Rightarrow 2 + 4 + 9 \neq 75$$

аналогично для (2) если  $m$  и  $n$  четные

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = 11 \cdot 4$$

$$mn(m + 2n + 9) = 11 \cdot 4 \quad \text{где } mn : 4 \Rightarrow m = n = 2$$

$$\Rightarrow 9 \Rightarrow m + 2n + 9 = 11 \quad \text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

Получается, что оба числа не могут быть четными если оба числа  $m$  и  $n$  нечетные, то

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

( $n$  - нечетное  
 $m$  - четное)

$$A = n + 2 + 2 - n - 2$$

A - четное

$$B = n + 2 + n$$

B - четное

$\Rightarrow p = q = 2$

$$B = \underbrace{m}_n \cdot \underbrace{(m + 2n + 9)}_{4+2+1=7} = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

если  $B = 11p^2$  то  $mn(m+2n+9) = 44$  где  $m+2n+9 : 4$

если не  $mn(m+2n+9) = 75 \cdot 4$

н.к.  $m+2n+9 > 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m+2n+9 = 44$$

$$mn = 1 \Rightarrow m = n = 1$$

$$1 + 2 + 9 \neq 44$$

не подходит

$$m + 2n + 9 = \begin{cases} 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 5^2 \\ 75 \cdot 4 \text{ не подходит} \end{cases}$$

$5^2 \cdot 3$

$$\rightarrow m + 2n = 3$$

$m = n = 1$   
не подходит

$$\rightarrow m + 2n = 11$$

$mn = 15$  или  $m = 5, n = 3$   
 $5 + 6 = 11$

$$m + 2n + 9 = 60$$

$$m + 2n = 51$$

$$mn = 5 \text{ не подходит}$$

$$m + 2n + 9 \leq 100$$

$$mn = 3 \text{ не подходит}$$

тогда  $A = 44$

$$5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 - 7 \cdot 5 - 14 \cdot 3 =$$

$$= 25 + 60 + 36 - 35 - 42 =$$

$$= 26 = 86 - 42 = 44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 5, n = 3 \text{ удовлетворяет}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

Теперь рассмотрим случаи когда одно из чисел  $m$  или  $n$  четное, а второе нечетное

тогда: 1) пусть  $m$  - четное

$$A = \tau + \tau + \tau - \tau - \tau = \tau \Rightarrow A - \text{четное} \Rightarrow$$

$$B = \tau + \tau + \tau - \text{четное}$$

$$\Rightarrow p = q = 4$$

$$m \cdot n (m + 2n + 9) = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$\tau + \tau + \tau = 4 \Rightarrow m, n : 4, \text{ а т.к. } n - \text{нечетное} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m : 4$$

тогда где  $B = 44$   $n = 1; m = 4; m + 2n + 9 \neq 11$

где  $B = 75 \cdot 4$   $m + 2n + 9 = \begin{cases} 75 \rightarrow m = 4, n = 1 \text{ не подходит} \\ 15 \Rightarrow m, n = 5 \cdot 4; m + 2n = 6 \text{ не подходит} \\ 25 \Rightarrow m, n = 3 \cdot 4; m + 2n = 16 \end{cases}$

2) пусть  $n$  - четное

$$A = n + \tau + \tau - n - \tau \Rightarrow A - \text{четное} \Rightarrow$$

$$B = \tau + \tau + \tau - \text{четное}$$

$$\Rightarrow p = q = 2 \Rightarrow B = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$m \cdot n (m + 2n + 9) = \begin{cases} 44 \\ 75 \cdot 4 \end{cases}$$

$$n + \tau + n \Rightarrow \tau : 2$$

если  $B = 44$   $m + 2n + 9 = 2 \cdot 11 = 22 (m, k. > 9)$

$$m + 2n = 13 \text{ не подходит}$$

$$m \cdot n = 2$$

если  $B = 75 \cdot 4$

$$m + 2n + 9 = \begin{cases} 75 \cdot 2 \text{ не подходит} \\ 5 \cdot 2 \text{ } m + 2n \neq 1 \text{ не подходит} \\ 5 \cdot 3 \cdot 2 \text{ } 30 \Rightarrow m, n = 10 \Rightarrow m = \begin{cases} 2 \cdot n = 5 \\ 10 \cdot n = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом

есть единственная пара чисел  $m, n$ , удовлетворяющая условию

Ответ:  $m = 5; n = 3.$

$$m + 2n + 9 = 50$$

$$m \cdot n = 6 \Rightarrow m = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{не подходит}$$

$$70 + 2 + 9 \neq 30$$

$$2 + 10 + 9 \neq 30$$

$$\text{не подходит}$$

$$6 + 2 + 9 \neq 50$$

$$2 + 6 + 9 \neq 50$$



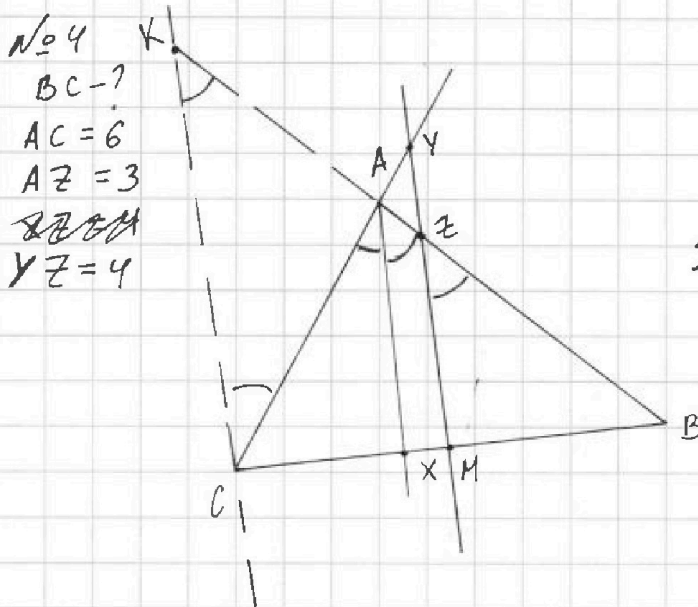


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AX - биссектриса

AX || MZ

BM = MC

Проведем прямую || MZ через точку C и продолжим AB до пересечения с ней. Обозначим точку пересечения K. В получившемся  $\Delta CBK$ :

M - середина CB и  $\Rightarrow$   
MZ || CK

$\Rightarrow$  MZ - средняя линия и Z - середина KB

т.к. AX - биссектриса то  $\angle CA X = \angle XAB$

т.к. AX || MZ || KC  $\Rightarrow \angle CA X = \angle B Z M = \angle B K C = \angle A C K$

(По теореме о пропорциональных отрезках:)

$$\frac{BZ}{ZA} = \frac{BM}{MX} \quad \frac{AZ}{AK} = \frac{XM}{XC}$$

$\Delta CAK - \text{п/б} \Rightarrow$

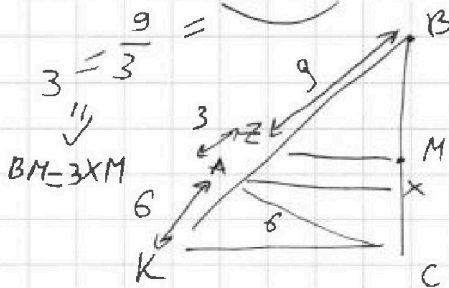
$\Rightarrow AK = AC = 6$

по условию

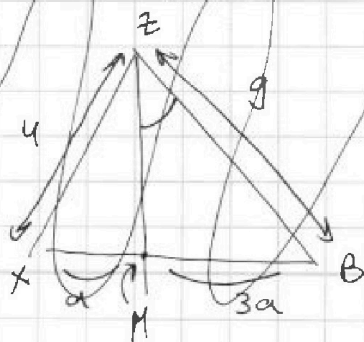
т.к. Z - середина BK  $\Rightarrow$

$\Rightarrow KZ = ZB = KA + AZ = 6 + 3 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow ZB = 9$



также в условии нам дана длина отрезка XZ = 4



$$\frac{ZB}{AZ} = \frac{BM}{XM} = \frac{9}{3} = 3$$

$$BM = 3XM$$

обозначим

$$XM = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM = 3\alpha \Rightarrow BC = 6\alpha$$



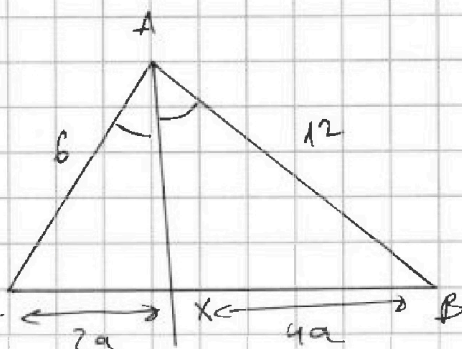
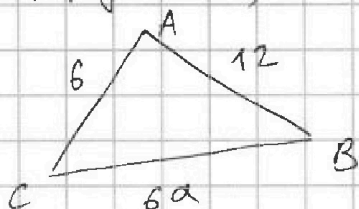
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 (проформулише)



K

т.к. AX - биссектриса  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CX} = \frac{AB}{BX}$$

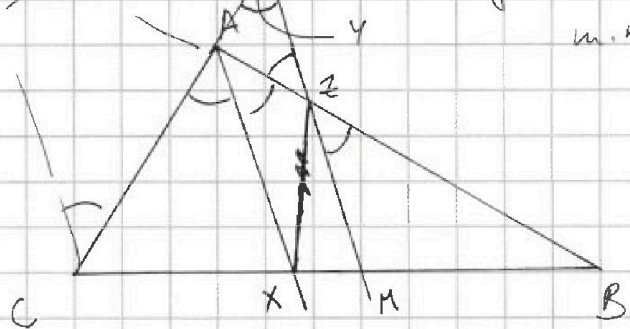
решим, что  $\triangle KAC \sim \triangle ZAY$   
т.к.  $KC \parallel ZY$ ;  $\angle KAC = \angle YAZ$   
как верши  
наибольше

мы уже знаем,

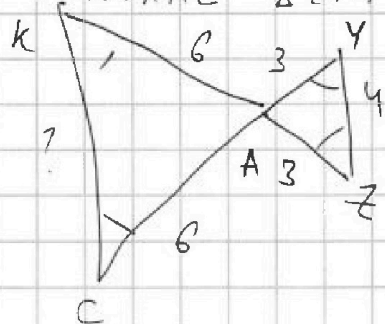
$$\text{что } AZ = 3$$

$$YZ = 4$$

$$KA = AC = 6$$



~~KAZ~~ т.к.  $\triangle KAC \sim \triangle ZAY \Rightarrow$  они оба  $\mu/\delta \Rightarrow AZ = AY = 3$



$$\frac{KC}{YZ} = \frac{AC}{ZA} \Rightarrow \frac{KC}{4} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$$

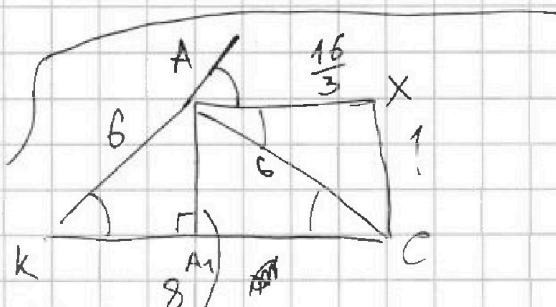
$$\Rightarrow KC = 8$$

$\triangle BKC \sim \triangle BAX \sim \triangle BZM$

$$MZ = \frac{KC}{2} = 4$$

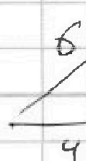
$$\frac{AX}{MZ} = \frac{XB}{MB} = \frac{4}{3}$$

$$AX = \frac{16}{3}$$



высота в  $\triangle KAC$   
является и  
медяной т.к.  $\mu/\delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

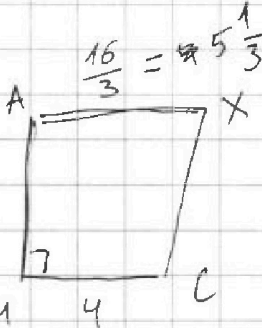
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение)

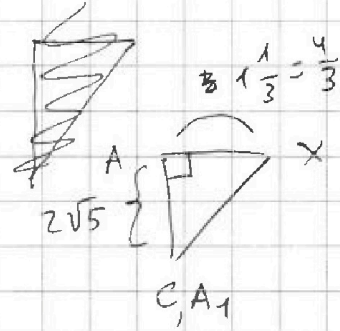
Площа пацели:



$$CX = \sqrt{4 \cdot 5 + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{196}}{3}$$

$$\frac{20 \cdot 9 + 16}{9} = \frac{196}{9}$$

~~20 \cdot 9 + 16 = 196~~  
~~196~~  
~~196~~  
~~256~~



или тогда  $CX + XM = \frac{BC}{2}$   
 $XM = \frac{BM}{3} = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow CX + a = 3a$$

$$CX = 2a$$

$$\frac{\sqrt{196}}{3} = 2a$$

$$\sqrt{196} = 6a = BC$$

Ответ:  $\sqrt{196} = BC$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ \sqrt{x^3+3x-\sqrt{2y}} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

Реш:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

$$\begin{cases} 7-y \geq 0 \\ 7 \geq y \\ 2y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 7 \geq y \geq 0$$

$$14+5x-y^2 \geq 0$$

$$x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$$

заменим, что если  
(сез обращения  
обобщения)

$$\begin{cases} x > y \Rightarrow x^3 > y^3 \\ 3x > 3y \\ \sqrt{2x} > \sqrt{2y} \end{cases} \Rightarrow x = y$$

тогда

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} + \sqrt{7-x}$$

$$x+2 + 14\sqrt{x+2} + 49 = 4(14+5x-x^2) + 4\sqrt{7-x} + 7-x$$

$$x + 5\sqrt{7-x} + x - 4 \cdot 14 - 20x + 4x^2 + 14\sqrt{x+2} = 4\sqrt{7-x}$$

$$4x^2 - 18x + 44 - 56 + 14\sqrt{x+2} = 4\sqrt{7-x} \quad | :2$$

$$(2x^2 - 9x - 6) + 7\sqrt{x+2} = 2\sqrt{7-x}\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$(2x^2 - 9x - 6)^2 + 14\sqrt{x+2}(\quad) + 49(x+2) = 4(7-x)(14+5x-x^2)$$

$$\begin{aligned} \cancel{2x^2 - 9x - 6} (2x^2 - 9x - 6)^2 &= (2x^2 - 9x)^2 - 12(2x^2 - 9x) + 36 = \\ &= 4x^4 - 36x^3 + 81x^2 - 24x^2 + 108x + 36 = \\ &= 4x^4 - 36x^3 + 57x^2 + 108x + 36 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

$$4x^4 - 36x^3 + 57x^2 + 108x + 36 + 49x + 98$$

134

$$\begin{array}{r} 2 \\ 14 \\ \times 4 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \cdot 4 - 154 \\ 84 \end{array}$$

$$4(7-x)(14+5x-x^2) = 4(98 + 35x - 7x^2 - 14x - 5x^2 + x^3) =$$

$$= 4 \cdot 98 + 35 \cdot 4x - 28x^2 - 20x^2 - 14 \cdot 4x + 4x^3$$

$$14\sqrt{x+2}(2x^2-9x-6) = -4x^4 + 40x^3 - 105x^2$$

$$14 + 5x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 14 \leq 0$$

$$(x-7)(x+2) \leq 0$$

$$x \in [-2; 7]$$

огр. об. 3, м.к.  $x=y$

$$\Rightarrow x \in [0; 7]$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \times 4 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$25 + 4 \cdot 14 = 25 + 56 = 81$$

$$x = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} 7 \\ -2 \end{cases}$$

2208

2208

78 = 2√2

$$2\sqrt{2} + 6 = 2\sqrt{14 + 30} - 36$$

$$2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 98 \\ \times 4 \\ \hline 392 \\ 134 \\ \hline 258 \end{array}$$

$$14\sqrt{x+2}(2x^2-9x-6) = -4x^4 + 40x^3 - 105x^2 - 73x +$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 2 \cdot 6}}{4} + 98 \cdot 4 - 134$$

$$\frac{48 + 80 + 12}{4} = 129$$

$$377 \pm 2\sqrt{144 + 35} = 419$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

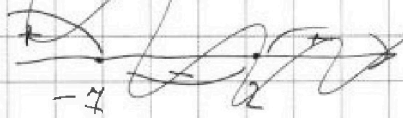
№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$(\cancel{2x+4})(\cancel{x-2})$$

$$(\cancel{x+7})(\cancel{x-2}) \geq 0$$



$$\begin{aligned} x &\in [0; 7] \\ -x^2 + 5x + 14 &= 0 \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm 9}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$-x^2 + 5x + 14 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 14 \leq 0 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = \begin{matrix} 7 \\ -2 \end{matrix}$$

$$(x-7)(x+2) \leq 0$$

$$x \in [-2; 7]$$

или  $x \in [0; 7]$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$14+5x-x^2 = -(x-7)(x+2)$$

$$= -x^2 - 2x + 7x + 14$$

$$\begin{aligned} (7-x)(x+7) \\ 2x+14-x^2-7x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= a \\ \sqrt{7-x} &= b \end{aligned}$$

$$a - b + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

или тогда  $x+2 \geq 0$  и  $7-x \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(x-7)(x+2) \leq 0 \Rightarrow x \in [-2; 7]$$

если  $x=7$   $\sqrt{x+2} = \sqrt{9} = 3$

$$3 - 0 + 7 = 2 \cdot \sqrt{0} \quad 7 \neq 0$$

Таким образом система не имеет корней

Ответ:  $\emptyset$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

11 - 11 ~~11~~

121 узел (всего)

всего способов выбрать  
два угла, которые мы  
затем  
перекрасим  
в белый

$$\frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60 = 7260$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 121 \\ \times 60 \\ \hline 7260 \end{array}$$

Заметим, что и раскраски, которые называются друг из друга поворотом относятся к тем, в которых белые узлы симметричны относительно центра квадрата

Заметим, что для всех углов краев центрального (свердловск) есть один (и только один) узел симметричный (на рисунке) относительно центра, ~~то есть углы~~

И для каждой такой раскраски (когда мы перекрасим выделенный узел и симметричный ему относительно центра) есть еще одна раскраска которая получается из предыдущей поворотом, например:



Всего раскрасок, в которых узлы симметричные  $\frac{120}{2} = 60$  (для каждого угла краев центрального есть симметричный)

или эти же для каждой из них есть одна, которая получается поворотом  $\Rightarrow$  таких  $\frac{60}{2} = 30$  1230



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Таким образом среди 7260 возможных раскрасок  
есть 60 таких, что они учитывают одну  
раскраску, а также максимум максимума поворотом  
двух  $\Rightarrow$  раскрасок, удовлетворяющих  
условию:

$$7260 - 60 = 7200$$

Ответ: 7200



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

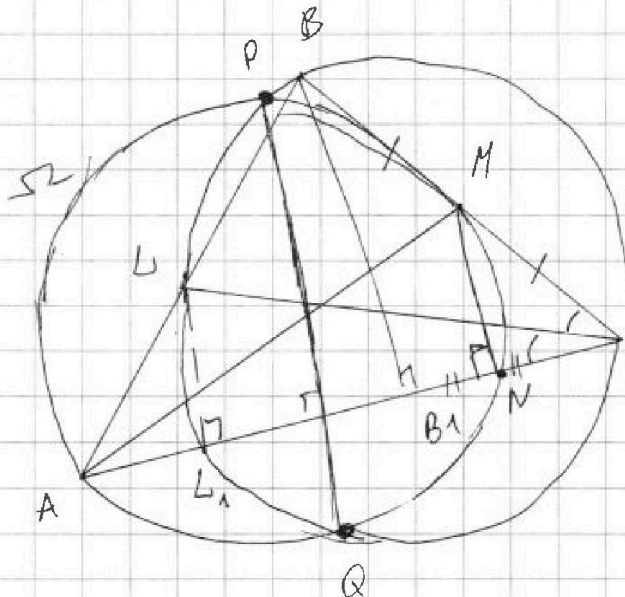


№7

$PQ \parallel BB_1$   
 $AC, BC - ?$

$$AB = 4$$

$$AN = 5$$



М.к.  $AM$  - диаметр  
 $\Sigma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$$

м.к.  $BB_1$  -  
- высота  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle AB_1B = 90^\circ$

$$\Downarrow$$

$$BB_1 \parallel MN$$

При этом по условию  $BB_1 \parallel PQ \Rightarrow PQ \parallel MN$

заменим, что в  $\triangle BCB_1$   $MN \parallel BB_1$  и  $M$  - середина  $BC$  по условию  $\Rightarrow$

$\Rightarrow MN$  - средняя линия  $\Rightarrow CN = NB_1$

м.к.  $CL$  - биссектриса  $\Rightarrow \frac{AC}{AL} = \frac{CB}{BL}$  где  $AL + BL = AB = 4$

если  $\angle AMC = 90^\circ \Rightarrow MC = \frac{BC}{AN + CN} \cdot CA$

$AN \cdot AL = AB^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

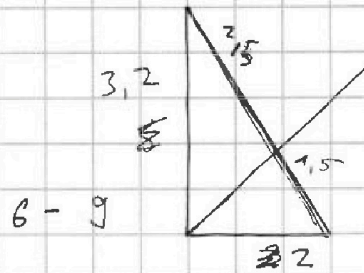
СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-1)^2(x^2-2x-4) = (x^2-2x+1)(x^2-2x-4) =$$

$$= x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 8x + x^2 - 2x - 4 =$$

$$= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$$



$$6 - 9 = -3$$

$$\frac{32}{24} = \frac{4}{3} \quad -3 \quad 1 \quad 9$$

$$\frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad -3 + 26 = 1 \quad \frac{19}{38}$$

$$\frac{1}{15} \quad 1 + 2 \cdot 4 = 9$$

$$1 + 4 + 4 - 7 - 14 =$$

$$= 9 - 14 - 7 =$$

$$= 2 - 14 = -12$$

$$\frac{x-y}{2} = 4$$

$$x - 2 \leq 2y$$

$$\frac{x}{2} - 1 \leq y$$

$$x = 2 \quad x = 4$$

$$y = 0 \quad y = 2 - 1$$

$$\frac{25}{4} + \frac{10}{8}$$

$$45 = 5 \cdot 15$$

$$5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$v = 1 + \frac{1}{2}$$

$$m + 2n + g = 15$$

$$m + 2n = 6$$

$$mn = 20$$

$$m + 2n = 21$$

$$25 \quad m + 2n = 16 \quad 8$$

$$mn = 12 \quad 8 \vee 2$$

$$5 \cdot 5 \cdot 3$$

$$6 \cdot 2 \cdot 12 + 2$$

$$4 + 6$$

$$(6 - 2n) \cdot n = 20$$

$$6n - 2n^2 - 20 = 0$$

$$2n^2 - 6n + 20 = 0$$

$$36 - 4 \cdot 20 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

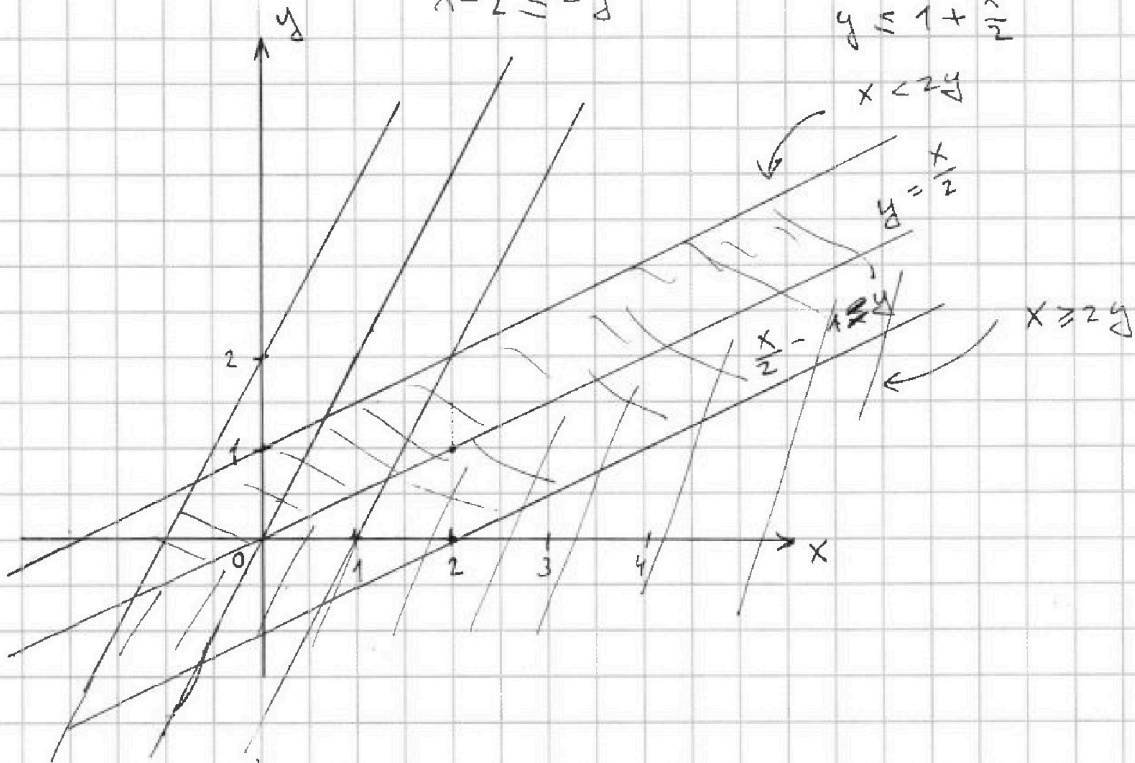
№2

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \quad 3y+6x \text{ max - ?}$$

$$3y+6x = 3(y+2x)$$

$$\begin{aligned} x &\geq 2y \\ x-2y &\leq 2 \\ x &\leq 2+2y \\ x-2 &\leq 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\leq 2y \\ 2y-x &\leq 2 \\ 2y &\leq 2+x \\ y &\leq 1+\frac{x}{2} \\ x &< 2y \end{aligned}$$



$$|2x-y| \leq 1$$

$$2x \geq y$$

$$2x < y$$

$$2x-y \leq 1$$

$$y-2x \geq 1$$

$$y \geq 1+2x$$

$$y \leq 1+2x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

