



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

$$\begin{cases} a_7 = (x^2 - 4x)^2 = a_5 + 2d = 6x + 18 + 2d \\ a_{11} = -3x^2 = a_5 + 6d = 6x + 18 + 6d \end{cases} \begin{cases} (x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 + 2d \\ 2d = \frac{-3x^2 - 6x - 18}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 - x^2 - 2x - 6 & (1) \\ 2d = -x^2 - 2x - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 4x)^2 = -x^2 - 2x - 6 \\ 2d = -x^2 - 2x - 6 \end{cases}$$

$$1) (x^2 - 4x)^2 = -x^2 - 2x - 6$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

$$\left(\frac{x^2 - 4x}{t}\right)^2 \text{ Пусть } (x^2 - 4x) = t, \text{ тогда}$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$t = -4 \quad \text{или} \quad t = 3$$

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 2$$

$$\text{Ответ: } 2; 2 \pm \sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y = 14 \cdot \frac{(-48)}{7} + 7 \cdot \frac{(-50)}{7} = -96 - 50 = -146$$

Ответ: -146





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

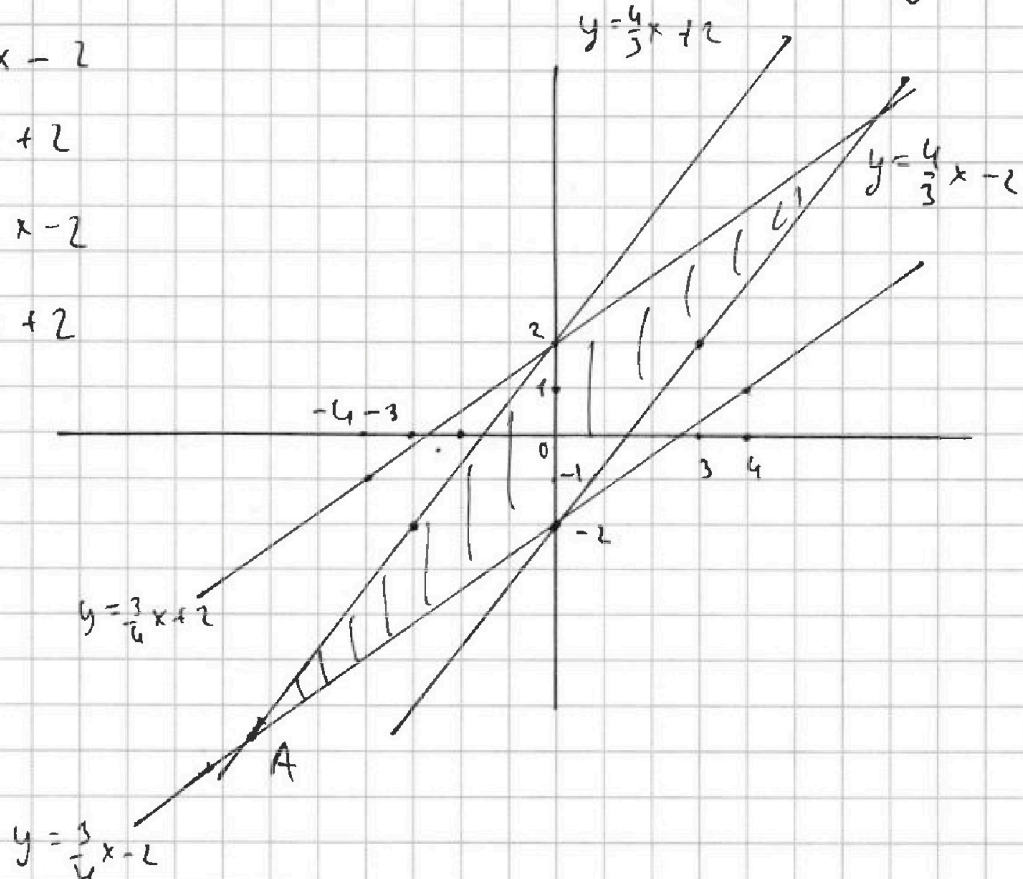
$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \xrightarrow{\sqrt{2}} \begin{cases} (4x - 3y)^2 - 6^2 \leq 0 \\ (3x - 4y)^2 - 8^2 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} (4x - 3y - 6)(4x - 3y + 6) \leq 0 \\ (3x - 4y - 8)(3x - 4y + 8) \leq 0 \end{cases}$$

$$1) y = \frac{4}{3}x - 2$$

$$2) y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$3) y = \frac{3}{4}x - 2$$

$$4) y = \frac{3}{4}x + 2$$



Найти минимальное значение выражения  $(14x + 7y)$  в точке A.

$$\frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2 \quad | \cdot 12$$

$$9x - 16x = 48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) - 2 = -\frac{36}{7} - \frac{14}{7} = -\frac{50}{7}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$(p, q)$  - простые числа

$$(m, n) \in \mathbb{N}$$

Пусть  $x = m - n$ , а  $y = mn$ , тогда

$$I) A = 13p^2$$

$$\begin{cases} x(x+9) = 13p^2 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+9) = 13p^2 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases}$$

т.к. если  $x \neq 2 \Rightarrow p:2 \Rightarrow p=2$ ; если  $x \neq 2 \Rightarrow (x+9):2 \Rightarrow p:2 \Rightarrow p=2$

$$\begin{cases} x^2 + 9x - 13 \cdot 4 = 0 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases} \xrightarrow{p=2} \begin{cases} (x+13)(x-4) = 0 \\ y(x+3) = 3q^2 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ 7y = 3q^2 \\ x=-13 \\ -10y = 3q^2 \end{cases}$$

невозможно, т.к.  
 $m, n \in \mathbb{N}, n \cdot k(m, n) \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn = \frac{3q^2}{7} \end{cases}$$

т.к.  $q:7 \Rightarrow q=7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \end{cases} \begin{cases} m=4+n \\ n^2+4n-21=0 \end{cases} \begin{cases} m=4+n \\ (n+7)(n-3)=0 \end{cases} \begin{cases} m=4+n \\ n=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=7 \\ n=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=4+n \\ n=-7 \end{cases}$$

или по другому  $n=3, 6, 4$   
 $n \in \mathbb{N}$

$$\text{II) } A=3q^2$$

$$\begin{cases} x(x+9)=3q^2 \\ y(x+3)=13p^2 \end{cases}$$

т.к. если  $x:2 \Rightarrow q:2 \Rightarrow q=2$ ; если  $x \not\equiv 2 \Rightarrow \frac{x+9}{2}:2 \Rightarrow q:2 \Rightarrow q=2$

$$\begin{cases} x^2+9x-12=0 \\ y(x+3)=13p^2 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+48}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{2} \text{ - т.к. корни не являются } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow (m,n) \notin \mathbb{N}$$

Ответ:  $m=7; n=3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \text{ - по свойству биссектрисы}$$

$$\frac{\frac{2}{3}a}{\frac{4}{3}a} = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \cdot \frac{2}{4} = 6$$

$$\triangle ABX \sim \triangle YBM (\angle B; \angle BAX = \angle BYZ = \alpha)$$

$$\frac{AB}{BY} = \frac{AX}{YM} \Rightarrow \frac{6}{4+ZM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{ZM}{AX} = \frac{3}{4} \\ \frac{AX}{4+ZM} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ZM}{4+ZM} = \frac{1}{2} \\ ZM = 4 \end{cases}$$

По теореме косинусов в  $\triangle M(Z)$ :

$$MC^2 = \cancel{16} - ZM^2 + ZC^2 - 2ZM \cdot ZC \cdot \cos \alpha = 16 + 81 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3}$$
$$\cdot \frac{2}{3} = 97 - 48 = 49$$

$$\Downarrow$$
$$MC = 7$$

$$BC = 2MC = 14$$

Ответ: 14



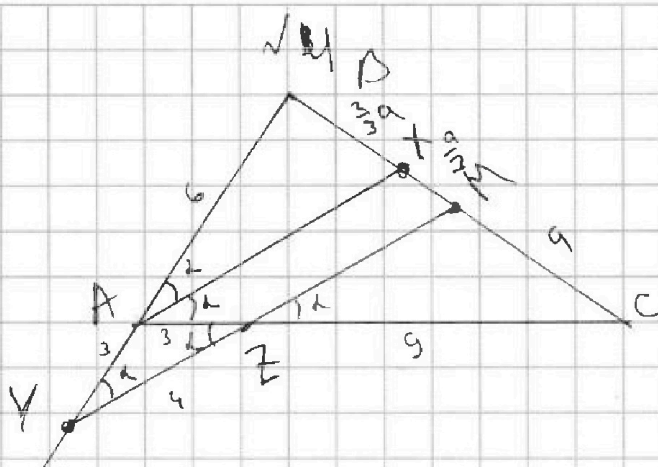
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BAX = \angle CAZ; BM = MC; AC = 12; AZ = 3; YZ = 4$$

$$ZC = AC - AZ = 12 - 3 = 9$$

Пусть  $\angle BAX = \angle CAZ = \alpha; MC = a$

$$\alpha = \angle BAZ = \angle BAX - \text{соответствующие}$$

$$\angle AZY = \angle XAZ = \alpha - \text{интерес лежащие}$$

$\Downarrow$

$\triangle YAZ$  - равнобедр.

$$\overset{\parallel}{AY} = AZ = 3$$

~~cos~~ По теореме косинусов в  $\triangle YAZ$ :

$$\cos \alpha = \frac{AZ^2 + AY^2 - YZ^2}{2 \cdot AZ \cdot AY} = \frac{16 + 9 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\triangle (MZ \in) \triangle (XA \in) \angle C; \angle XA \in \angle (ZM \in) \perp$  - вертикальные

$$\frac{CM}{CX} = \frac{CZ}{AC} = \frac{ZM}{AX} \Rightarrow \frac{a}{a+XM} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow XM = \frac{a}{3}$$

$$BX = BM - XM = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} \quad (2)$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y} \quad (1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq -6 \\ y \leq 5 \\ 30-x-y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \in [0; 5] \\ 30-x \geq y \end{cases}$$

$$1) 4x^4 - 4y^4 + x + y + 5\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[4]{y} = 0$$

$$4(x^4 - y^4) + (x - y) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) =$$

$$= (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2)$$

$$4(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) \cdot$$

$$\cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(4(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$+ 5) = 0$$

Второе слагаемое скобка  $\geq 5$ , т.к.  $x \geq 0$   
 $y \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{y}$$

$$x = y$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$-x^2 - x + 30 = -(x^2 + x - 30) = -(x+6)(x-5) = (5-x)(x+6)$$

$$x+6 + 5-x = 11$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+6)} - 11$$

$$6 + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+6} = 11 - 2\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

$$6 + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+6} = (\sqrt{5-x})^2 - 2\sqrt{(5-x)(x+6)} + (\sqrt{x+6})^2$$

$$(\sqrt{5-x} - \sqrt{x+6})^2 + (\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}) - 6 = 0$$

Пусть  $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = t$ , тогда

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2) = 0$$

$$t = -3$$

или

$$t = 2$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$\sqrt{5-x} = 3 + \sqrt{x+6}$$

$$\sqrt{x+6} = 2 + \sqrt{5-x}$$

$$5-x = 9 + 6\sqrt{x+6} + x+6$$

$$x+6 = 4 + 4\sqrt{5-x} + 5-x$$

$$-10-2x = 6\sqrt{x+6}$$

$$2x-3 = 4\sqrt{5-x}; x \geq 1,5$$

$$-5-x = 3\sqrt{x+6}; x \leq -5$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (4\sqrt{5-x})^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 80 - 16x + 16$$

$$20x^2 - 12x - 74 = 0$$

ка не подходит  
т.к.  $x \geq 0$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 71}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{72}}{4} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{18}}{4} = -0,5 \pm \sqrt{18}$$

$(-0,5 - \sqrt{18})$  — не подходит, т.к.  $x \geq 0$

$-0,5 + \sqrt{18}$  — подходит по всем ОДЗ

Ответ:  ~~$x = y = -0,5$~~   $x = y = -0,5 + \sqrt{18}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

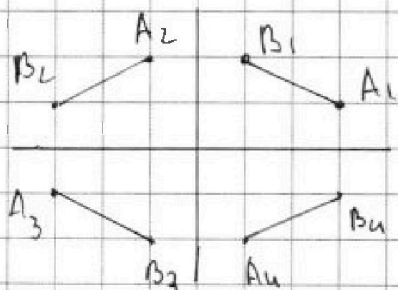
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√6

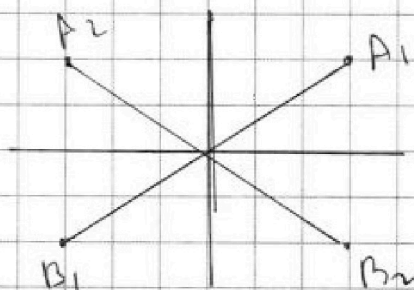
Квадрат переходит в себя относительно центра только при поворотах на  $90^\circ; 180^\circ; 270^\circ$

Чтобы получить количество способов раскладки несимметричных относительно центра пар узлов, нужно разделить на 4 общее количество несимметричных относительно центра пар узлов, поскольку при поворотах ~~таких~~ пар узлов образуются на  $90^\circ; 180^\circ; 270^\circ$  таких пар узлов, они переходят в новые пары узлов

Чтобы получить количество способов раскладки симметричных относительно центра пар узлов, нужно разделить на 2 общее количество симметричных относительно центра пар узлов, поскольку при поворотах на  $180^\circ$  пара переходит в другую, а при поворотах на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  образуются одна новая пара узлов.



де несимметричные относительно центра пар узлов



де симметричные относительно центра пар узлов

~~Общее количество симметричных относительно центра пар узлов без учета поворотов:~~

Т.к. квадрат  $9 \times 9 \Rightarrow$  количество узлов  $10 \times 10$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Общее количество симметричных обходов узла пара узлов ~~без~~ без учета поворотов равно:

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

$$\text{С учетом поворотов: } \frac{50}{2} = 25$$

Общее количество несимметричных обходов узла пара узлов без учета поворотов равно:

$$C_{100}^2 - 50 = \frac{100 \cdot 99}{2} - 50 = 50 \cdot 98 = 4900$$

$$\text{С учетом поворотов: } \frac{4900}{4} = 1225$$

$$1250 + 25 = 1275$$

Ответ: 1275



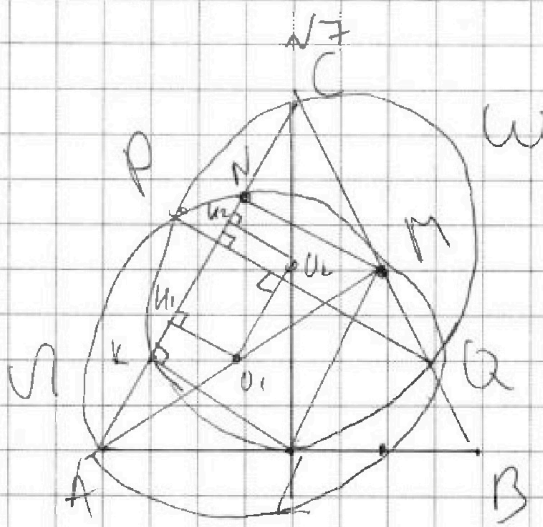


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AB = 20$ ;  $AN = 20$ ;  $PQ \parallel$  высоте из  $B$

Т.к.  $PQ \parallel$  высоте из  $B \Rightarrow PQ \perp AC$  (высота из  $B \perp AC$ )

Пусть центр окружности  $\Omega - O_1$ , а  $\omega - O_2$

$O_2 O_1 \perp PQ$ , т.к.

$\triangle PO_2 O_1 = \triangle QO_2 O_1$   
(по 3 сторонам)

$PO_2 = QO_2$  - радиусы

$PO_1 = QO_1$  - радиусы

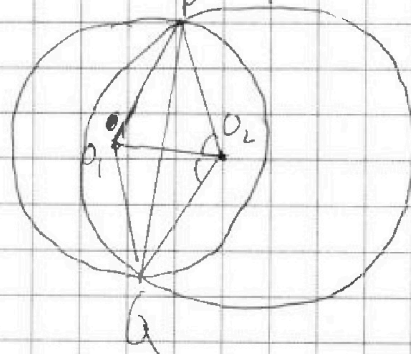
$O_2 O_1$  - общая

$\angle PO_2 O_1 = \angle QO_2 O_1 \Rightarrow O_2 O_1$  - биссектриса  $\Rightarrow O_2 O_1$  - высота  
(т.к.  $PO_2 O_1$  - равнобедренный)

$PQ \perp O_2 O_1 \Rightarrow O_2 O_1 \parallel AC$  (т.к.  $PQ \perp AC$ )

Проведем  $O_2 U_2$  и  $O_1 U_1$  ( $O_2 U_2 \perp AC$  и  $O_1 U_1 \perp AC$ )

$O_2 U_2 \parallel O_1 U_1$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$O_1, U_1, U_2, O_2$  - вершины окружностей ( $O_1, O_2 \parallel U_1, U_2$ ;  $U_2, O_2 \parallel U_1, O_1$ ,  
 $U_2, O_2 \perp AC$ )

$$\Downarrow$$

$$O_2, U_2 = U_1, O_1$$

Проведем  $\angle K$  ( $K$  - точка пересечения  $U_1$  с  $AC$ )

$\angle MNK = 90^\circ$  ( $\angle$  опирается на диаметр  $AM$ )

$\angle CLK = 90^\circ$  - опирается на диаметр  $CL$

$$\Downarrow$$

$$MN \parallel U_1, O_1; \quad KL \parallel U_2, O_2$$

$U_1, O_1$  - средняя линия  $\triangle ANM$  ( $MO_1 = AO_1$  - радиусы;  $U_1, O_1 \parallel MN$ )

$U_2, O_2$  - средняя линия  $\triangle KCL$  ( $CO_2 = O_2L$  - радиусы;  $U_2, O_2 \parallel KL$ )

$$NM = 2U_1, O_1 = 2U_2, O_2$$

$$KL = 2U_2, O_2 = 2U_1, O_1$$

$$\Downarrow$$

$$MN = KL$$

$MNKL$  - прямоугольник ( $NM = KL$ ;  $NM \parallel KL$ ;  $ML \perp KN$ )

$$\Downarrow$$

$$ML \parallel KN \text{ и } ML = KN$$

$\angle M$  - средняя линия  $\triangle ABC$  ( $ML \parallel AC$ ;  $CM = MB$ )

$$\Downarrow$$

$$AC = 2ML$$

$$\Downarrow$$

$$AL = LB$$

$\Downarrow$   
 $CL$  - биссектриса и медиана  $\Rightarrow \triangle ABC$  равнобедрен



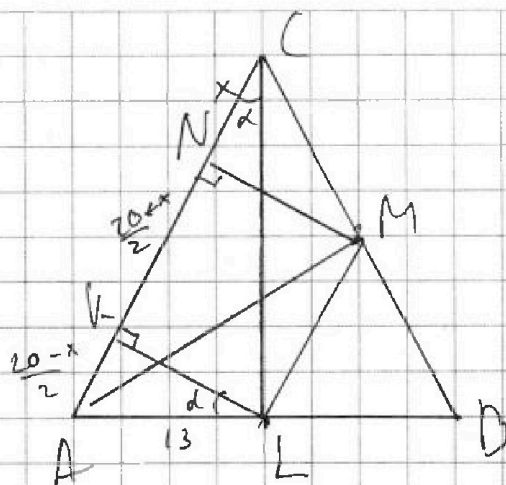


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AL = LB = \frac{AB}{2} = 13, \quad AC = CB$$

Пусть  $d = \angle ACL$ , а  $x = NC$ , тогда

$$AC = AN + NC = 20 + x$$

$$ML = \frac{AC}{2} = \frac{20+x}{2} = NK$$

$$AK = AN - NK = 20 - \frac{20+x}{2} = \frac{20-x}{2}$$

$$\angle CAL = 90 - d \Rightarrow \angle AKL = d$$

$$\sin d = \frac{AK}{AL} = \frac{ML}{AC}$$

$$\frac{20-x}{26} = \frac{13}{20+x}$$

$$2(20-x)^2 = 169 \cdot 2$$

$$x^2 = 2(200 - 169) = 231 = 62$$

$$x = \sqrt{62}$$

$$AC = CB = \sqrt{62} + 20$$

$$\text{Ответ: } 20 + \sqrt{62}$$



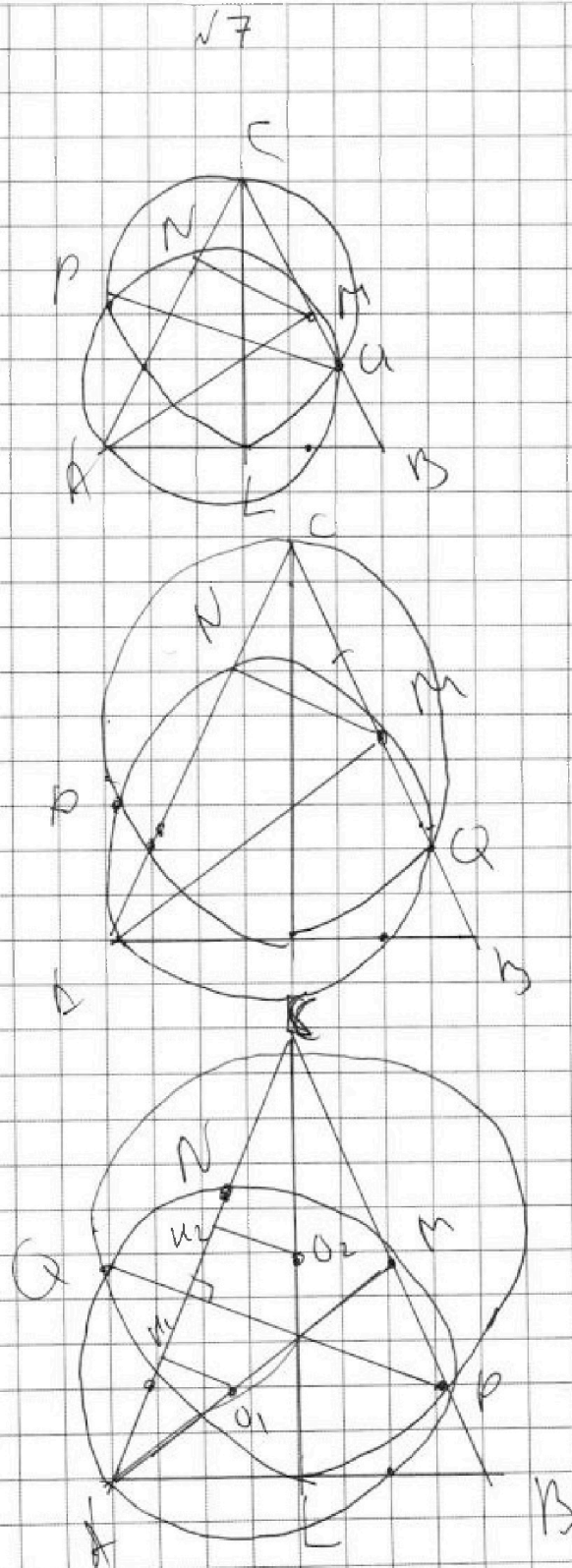


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Квадрат переходит в сеть только при поворотах на  $90^\circ, 180^\circ$   
 Общее количество несимметричных пар узлов  
 нужно получить на 4, так как при поворотах  
 на  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  образуется 3 новых пары узлов

Общее количество симметричных пар узлов  
 нужно получить на 2, так как при повороте  
 на  $180^\circ$  пара переходит сама в себя, а при по-  
 вращениях на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  образуется 1 новая пара

Квадрат  $9 \times 9$ , в комнате узлы  $10 \times 10$

Общее количество симметричных пар узлов при поворотах:

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

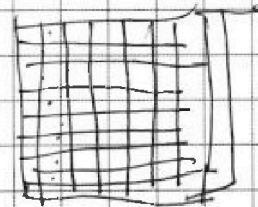
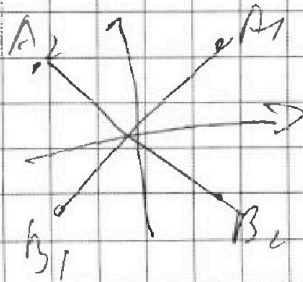
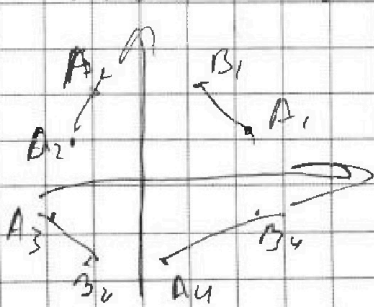
С учетом поворотов:  $\frac{50}{2} = 25$

Общее количество несимметричных пар узлов при поворотах:

$$100 - 50 = \frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99$$

С учетом поворотов:  $\frac{50 \cdot 99}{4} = \frac{4950}{4} = 1237.5$

$$1237.5 + 25 = 1262.5$$





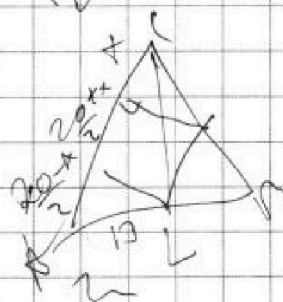
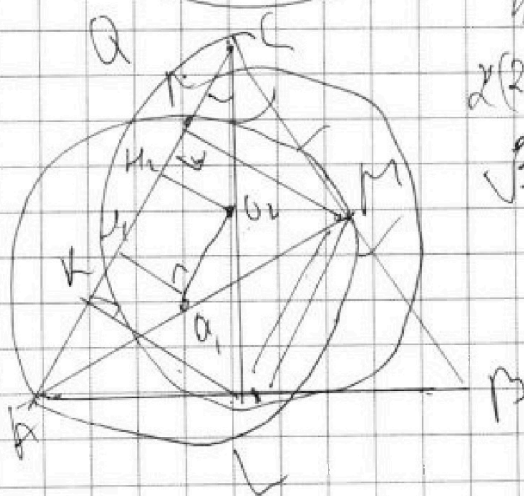
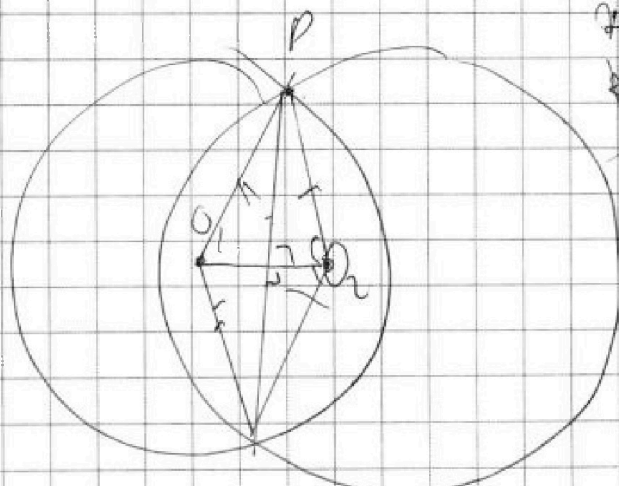
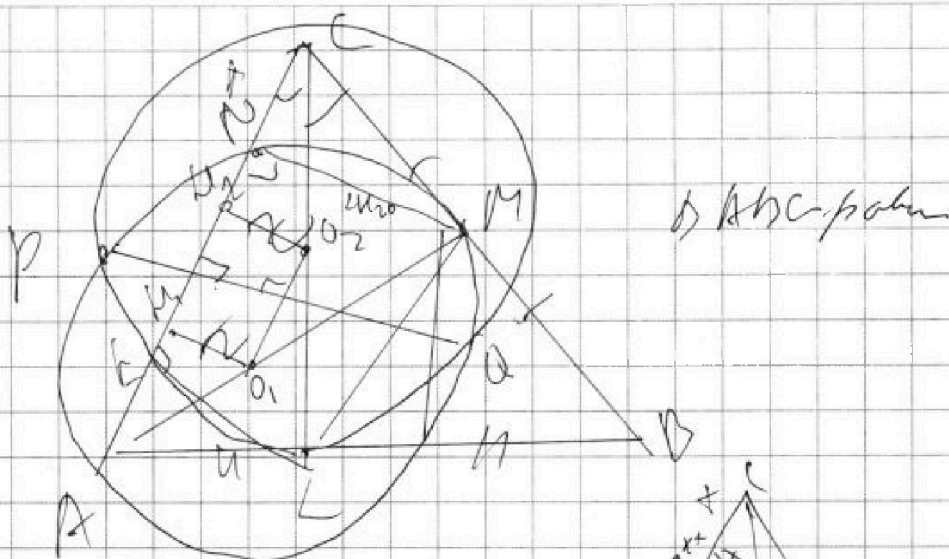


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{26-x}{26} = \frac{13}{20+x}$$

$$400-x^2=169 \cdot 2$$

$$x(200-169) = x^2$$

$$\sqrt{31 \cdot 2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$20x^2 - 12x - 71 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 71 \cdot 20}}{20} = \frac{6 \pm 2\sqrt{9 + 71 \cdot 5}}{20} = \frac{3 \pm \sqrt{364}}{10} =$$

$$= 3 \pm 1$$

~~$$4x^2 - 4x - 71 = 0$$~~

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 71}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{18}}{4} = -0,5 \pm \frac{\sqrt{18}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{18}}{4} = -0,5 \pm \sqrt{18}$$

$-0,5 - \sqrt{18}$  не подходит, т.к.  $x \geq 0$

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

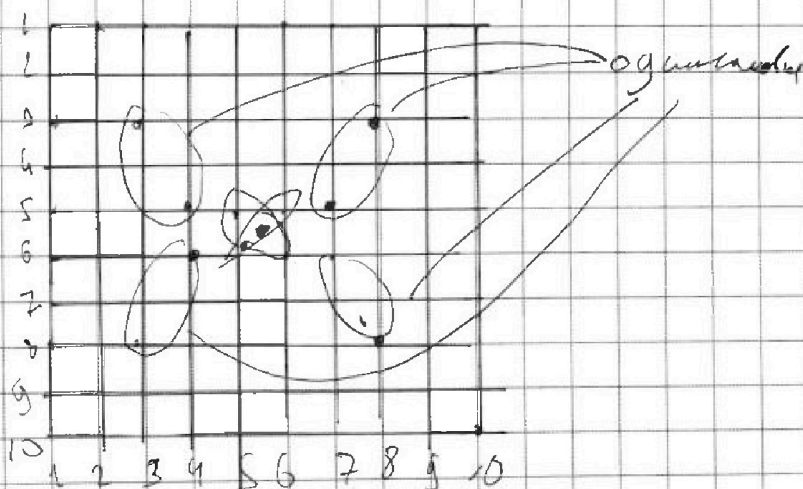
$$\frac{50}{2} = 25$$

$$2 \cdot 100 = 200 = 50 \cdot 4$$

$$= \frac{100 \cdot 98}{2} = 50 \cdot 98$$

$$\frac{50 \cdot 98}{4} = \frac{4900}{4} = 1225$$

$$1225 + 25 = 1250$$





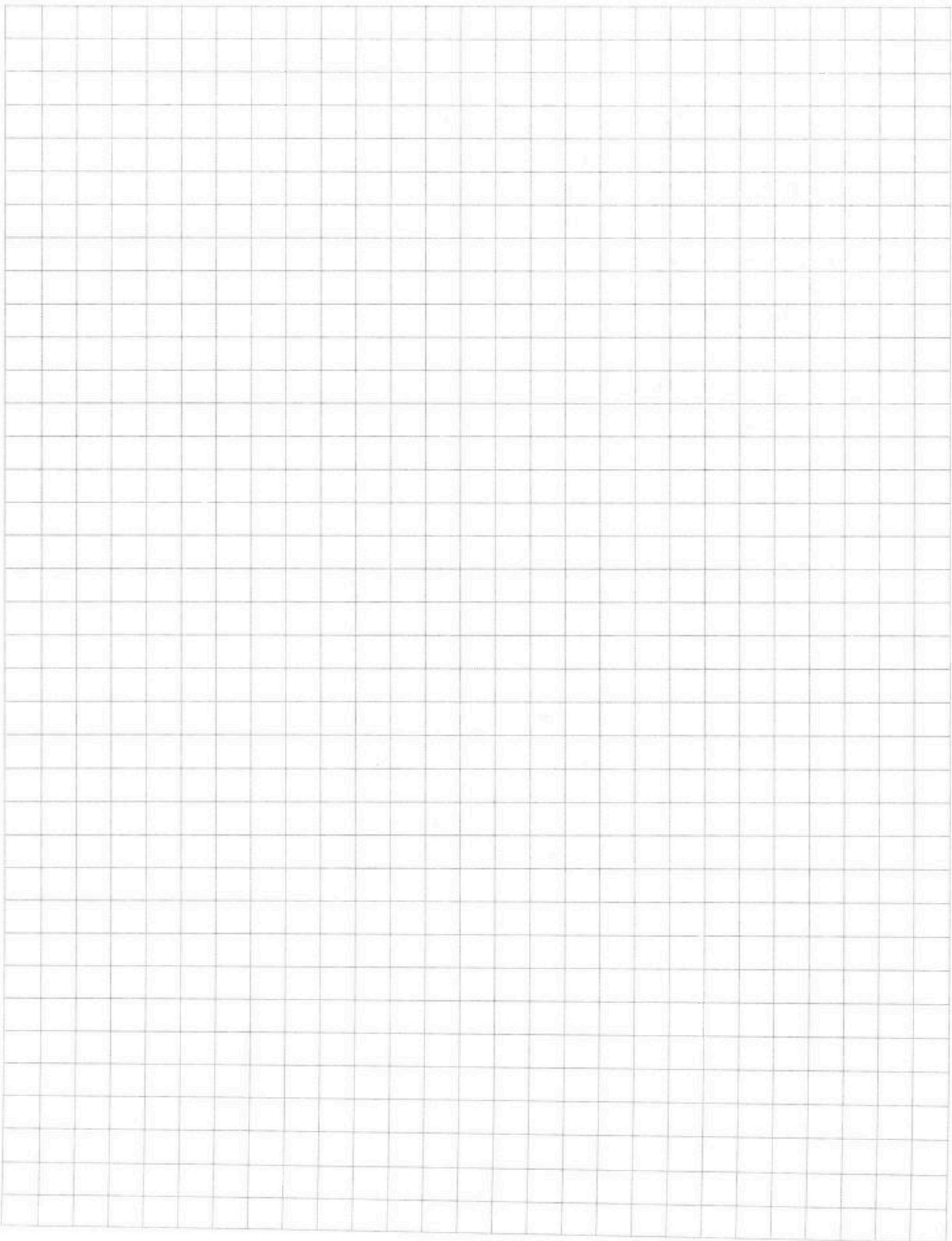


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

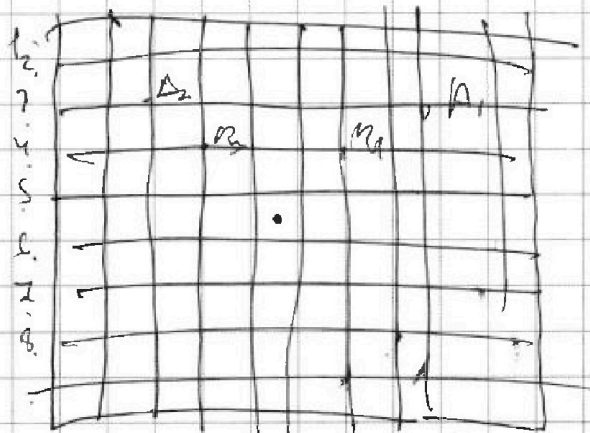
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ y \leq 5 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y & (a) \\ z_c \end{cases}$$

$$a) 4x^4 - 4y^4 + x - y - 5(\sqrt[4]{y^4 x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$\sqrt[4]{x} = a, a \sqrt[4]{y} = b, 6azga$$

$$4(a^4 - b^4)$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 5$$

$$\cdot (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$4(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2) + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 5$$

$$\cdot (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$4(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2)(x + y)$$

$$4x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)$$

$$\cdot (x^2 + y^2) = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2)$$

$$364 = 2 + 80 + 91 \cdot 4$$

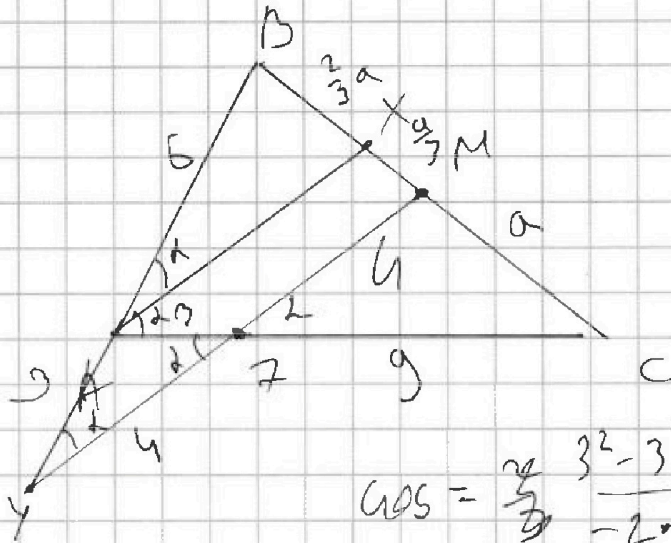


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{-2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 4}{-2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{AX}{b} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{3}a} = \frac{1}{2} \quad AB = 5$$

$$\frac{CM}{CX} = \frac{AZ}{CA} \Rightarrow \frac{a}{a+XM} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3a + 3XM$$

$$XM = \frac{a}{3}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{2}{3} = \frac{AX}{4+XM}$$

$$AX = \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \quad MC = 7$$

$$AX = \frac{4}{3} XM \quad BC = 14$$

$$\frac{\frac{4}{3} XM}{\frac{4}{3} XM + XM} = \frac{2}{3}$$

$$2XM = 4 + XM \quad XM = 4$$

$$MC^2 = 16 + 81 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} = 97 - 48 = 49$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n+3)(m-n)$$

$$B = m^2n^2 - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$m-n = x, mn = y$$

$$(x+9)x = A$$

$$B = y(x+3)$$

$$x : 2 \Rightarrow A : 2$$

$$x/2 \Rightarrow A/2$$

$$D) (x+9)x = 13n^2$$

↓

$13 \neq 2 \Rightarrow$  б.к  $13$ -простое число  $\Rightarrow 13 \nmid 2$

$$x^2 + 9x - 13n^2 = 0$$

$$x = -13; x = 4$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ mn = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ mn = 10 \end{cases}$$

↓  
 $\Rightarrow$  нет решений

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ 7mn = 3q^2 \end{cases}$$

$$q = 7$$

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ 7mn = 147 \end{cases} \begin{cases} m = 4+n \\ (4+n)n = 21 \end{cases}$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$n = -7 \quad \begin{cases} n = 3 \\ m = 7 \end{cases}$$

нельзя  
использовать



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14x + 7y = -\frac{64}{7} \cdot 14 + 7 \cdot \frac{(-62)}{7} = -128 - 62 = -190$$

$$\text{II) } A = 3q^2$$

$$\text{max } X(x \in q) = 3q^2$$

$$q = 2$$

$$x^2 + 9x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 12}}{2}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 48}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{2}$$



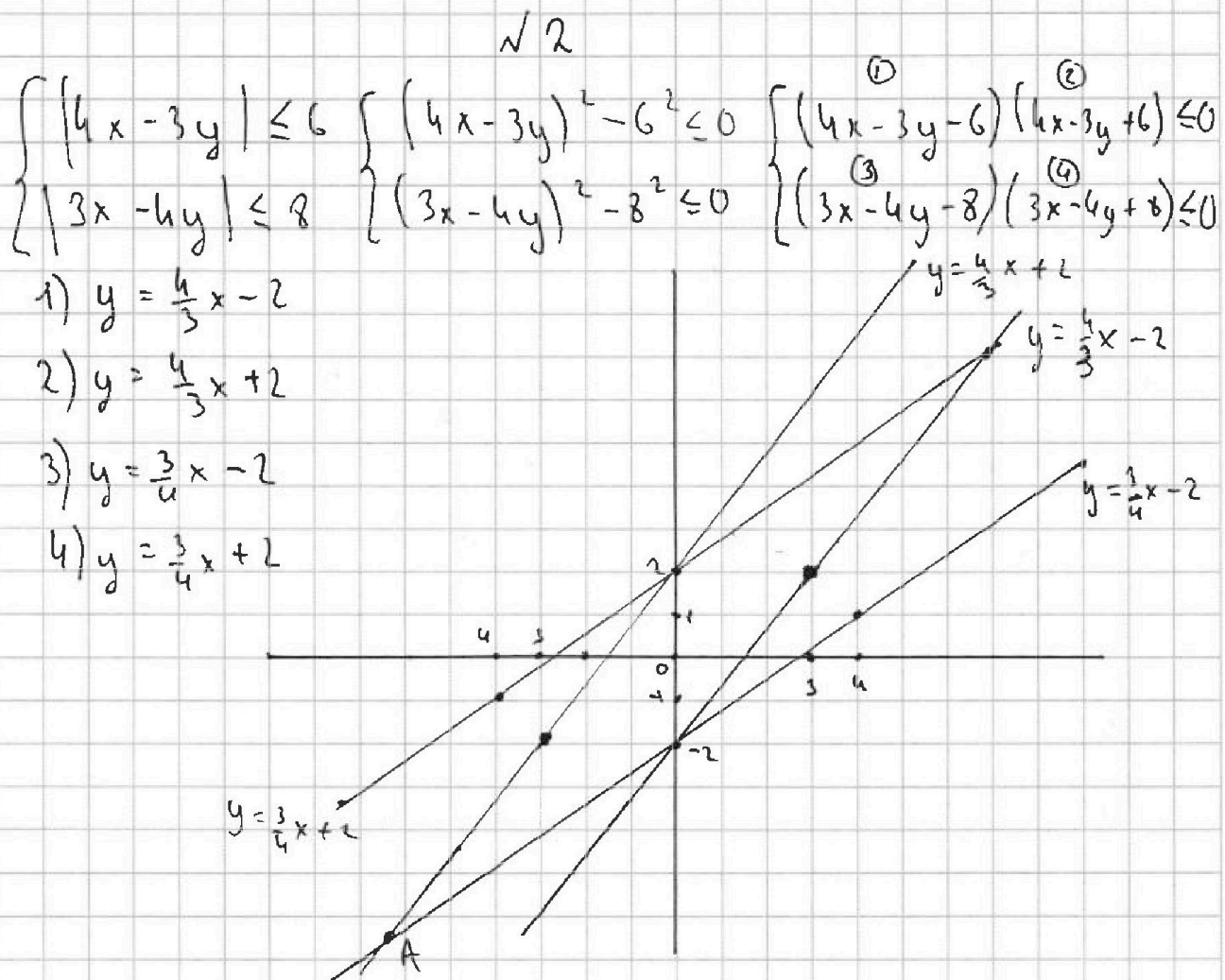


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Наименьшее значение выражения  $(14x + 7y)$  будет в точке А.

$$\frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2 \quad | \cdot 12$$

$$9x - 16x = 4 \cdot 12$$

$$-7x = 4 \cdot 12$$

$$x = -\frac{4 \cdot 12}{7} = -\frac{48}{7}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) - 2 = -\frac{48}{7} - 2 = -\frac{48 - 14}{7} = -\frac{62}{7}$$